МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2001

УДК 539.3

 А.Г. БАГДОЕВ

АНТИПЛОСКАЯ АНИЗОТРОПНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ШТАМПА, КОНЦЫ КОТОРОГО ДВИЖУТСЯ ПО ГРАНИЦЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

Рассматривается антиплоская задача о движении штампа по границе полуплоскости, занятой анизотропной упругой средой, по произвольному закону. Соответствующая задача о трещине изучена в [1]. В [2], [3] рассмотрены задачи о трещине в плоской и антиплоской постановке для изотропной среды. В настоящей статье результаты [1] распространяются на антиплоскую задачу о штампе, движущемся по границе анизотропной упругой полуплоскости по произвольному закону. Получено значение перемещений границы вне штампа вблизи его краев и напряжения под штампом и вблизи его краев.

1. Постановка задачи. Рассматривается антиплоская анизотропная задача о штампе, приложенном на части границы упругой полуплоскости. Ось x выбрана по поверхности полуплоскости, ось y – вертикально вниз, вдоль оси z, нормальной плоскости x, y, имеется единственная компонента смещения $u(x, y, t)$. Штамп приложен на участке границы $x_1(t) < x < x_2(t)$, концы которой движутся с произвольной скоростью. Упругая антиплоская задача для анизотропной полуплоскости формулируется следующим образом: найти решение уравнения [1]:

$$a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t} \qquad (1.1)$$

удовлетворяющее граничным условиям при $y = 0$:

$$u = u_1(x,t), \quad x_1 < x < x_2, \quad \tau_{yz}\rho^{-1} = a_{12}^2 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad x < x_1, \quad x > x_2 \qquad (1.2)$$

Здесь a_1, a_2, a_{12} – упругие константы, ρ – плотность, τ_{yz} – касательное напряжение. Пусть $a^2 = a_1^2 a_2^2 - a_{12}^4$. Введя обозначения

$$X_1 = x - \frac{a_{12}^2}{a_2^2} y, \quad y_1 = \frac{a}{a_2^2} y \qquad (1.3)$$

можно записать уравнение (1.1) и условия (1.2) в виде

$$\frac{a^2}{a_2^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1.4)$$

$$y = 0, \quad u = u_1(x,t), \quad x_1 < X_1 < x_2, \quad \tau_{yz} / \rho = a\partial u / \partial y_1 = 0, \quad X_1 < x_1, \quad X_1 > x_2 \qquad (1.5)$$

Таким образом анизотропная задача свелась к изотропной со скоростью волн aa_2^{-1}.

2. Решение задачи о перемещениях вне штампа. Обозначим $\partial u/\partial y_1 = v$. Тогда, учитывая (1.4), можно (1.5) записать в виде $y_1 = 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial y_1} = \frac{a_2^2}{a^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{2.1}$$

$$x_1 < x < x_2, \quad v = 0, \quad x < x_1, \quad x > x_2$$

При этом v снова удовлетворяет уравнению (1.4). Тогда для v получим известную задачу [3] о трещине в изотропной среде. Обозначая $t_0 = ta/a_2$, $x = x_0$, $x_{1,2}(t) = l_{1,2}(t)$ и используя связь функций v и $\partial v/\partial y_1$ на границе $y_1 = 0$ [3]:

$$v = -\frac{1}{\pi}\iint \frac{\partial v / \partial y_1}{\sqrt{(t_0 - t)^2 - (x_0 - x)^2}}dxdt \tag{2.2}$$

можно, учитывая (2.1), получить интегральное уравнение для $\partial v/\partial y_1$ вне штампа. Решая это уравнение можно найти $\partial v/\partial y$ вне штампа [3].

Вводя характеристические координаты

$$\xi = t - x, \quad \eta = t + x, \quad \xi_0 = t_0 - x_0, \quad \eta_0 = t_0 + x_0 \tag{2.3}$$

можно получить [3] для $\partial v/\partial y_1$ вне правого конца штампа при $x_0 > l_2(t_0)$

$$\frac{\partial v}{\partial y_1} = -\frac{1}{\pi\sqrt{\eta_0 - \eta_2(\xi_0)}}\int_{-\xi_0}^{\eta_2(\xi_0)} f_1(\xi,\eta)\frac{\sqrt{\eta_2(\xi_0) - \eta}}{\eta_0 - \eta}d\eta \tag{2.4}$$

где f_1 есть значение f из (2.1) в переменных ξ, η при интегрировании вдоль характеристики $\xi = \xi_0 = \text{const}$, проходящей через данную точку (x_0, t_0) (фигура), взятую справа от штампа $x_2 > l_2(t_0)$, имеет место

$$t - x = t_0 - x_0, \qquad t_0 - x_0 = t_2 - l_2(t_2) \tag{2.5}$$

Индекс 2 соответствует пересечению характеристики с кривой конца штампа $x = l_2(t)$, $\eta_2(\xi_0)$ есть значение η в точке пересечения характеристики с указанной кривой $x = l_2(t)$, причем

$$\eta_2(\xi_0) = t_2 + l_2(t_2) \tag{2.6}$$

Поскольку в силу (2.3), (2.5) имеет место

$$\eta_0 - \eta = 2(x_0 - x) \tag{2.7}$$

и учитывая, что по (2.5), (2.6):

$$\eta_2(\xi_0) - \eta = 2\{l_2(t_2) - x\} \tag{2.8}$$

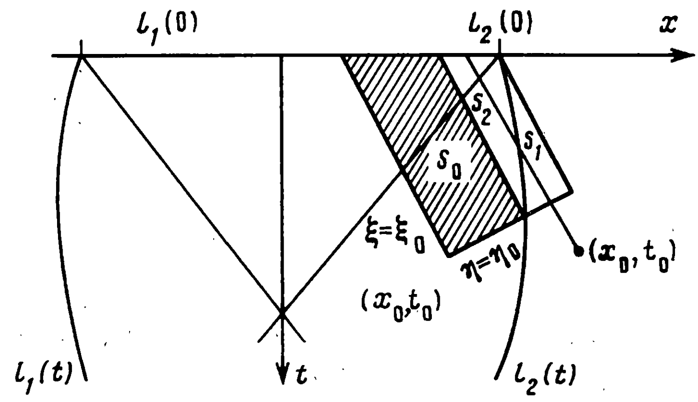
$$\eta_0 - \eta_2(\xi_0) = 2[x_0 - l_2(t_2)] \tag{2.9}$$

то в верхнем пределе интегрирования $\eta = \eta_2(\xi_0)$ можно полагать $x = l_2(t_2)$. Тогда, как и в [3], для (2.4) при $x_0 > l_2(t_0)$ в физических переменных x_0, t_0 будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial y_1} = -\frac{1}{\pi\sqrt{x_0 - l_2(t_2)}}\int_{x_0 - t_0}^{l_2(t_2)} f(x, t_0 - x_0 + x)\frac{\sqrt{l_2(t_2) - x}}{x_0 - x}dx \tag{2.10}$$

Точно так же получается решение около левого конца штампа $x_0 < l_1(t_0)$ в виде [3]:

$$\frac{\partial v}{\partial y_1} = -\frac{1}{\pi\sqrt{l_1(t_1) - x_0}}\int_{x_0 + t_0}^{l_1(t_1)} f(x, x_0 + t_0 - x)\frac{\sqrt{x - l_1(t_1)}}{x_0 - x}dx \tag{2.11}$$



где $t_1 + l_1(t_1) = t_0 + x_0$. Вблизи концов штампа можно записать соотношения при $x_0 \to l_2(t_0)$, $x_0 > l_2(t_0)$:

$$\frac{\partial v}{\partial y_1} = \frac{K_2}{\pi\sqrt{x_0 - l_2(t_0)}}, \quad t_0 - t_2 \approx \frac{x_0 - l_2(t_0)}{1 - \dot{l}_2(t)}$$

$$K_2 = -\sqrt{1 - \dot{l}_2(t_0)} \int\limits_{l_2(t_0)-t_0}^{l_2(t_2)} f(x, t_2 - l_2 + x)\frac{dx}{\sqrt{l_2(t_0) - x}} \tag{2.12}$$

при

$$x_0 \to l_1(t_0), \qquad x_0 < l_1(t_0)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y_1} = \frac{K_1}{\pi\sqrt{l_1(t_0) - x_0}}, \quad K_1 = -\sqrt{1 + \dot{l}_1(t_0)} \int\limits_{l_1(t_0)}^{l_1(t_0)+t_0} f(x, t_0 + l_1 - x)\frac{dx}{\sqrt{x - l_1(t_0)}} \tag{2.13}$$

где точка обозначает дифференцирование по t_0.

Поскольку в силу (1.4) $\partial v / \partial y_1 = \partial^2 u / \partial y_1^2 = \partial^2 u / \partial t_0^2 - \partial^2 u / \partial x_0^2$, можно, например, из (2.12) найти u, полагая вблизи конца штампа $x_0 \approx l_2(t_0)$, $u = A(x_0 t_0)[x_0 - l_2(t_0)]^{3/2}$ и приравнивая члены основного порядка в (2.13) $\sim [x_0 - l_2(t_0)]^{-1/2}$, получим значение A. Таким образом, можно найти распределение $u(x_0, t)$ вне штампа и его значение вблизи концов штампа в конечном виде.

3. Определение напряжения под штампом и вблизи его концов. Более интересно знать значение $v = \partial u / \partial y_1 = \tau_{yz} / \rho a$ под штампом, причем рассматривается решение при $x < x_2(t)$. Это решение не приведено в [3], а может быть взято из решения задачи о крыле [4.5]. При этом в характеристических координатах получится из [5], где следует заменить $x_a \to \xi_\alpha$, $y \to \eta_0$, $\psi_1(x) \to -\xi$, $x \to \xi_0$ на границе $y = 0$, $x_0 < l_2(t_0)$:

$$v = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi_a}^{\xi_0}\int\limits_{-\xi}^{\eta_0} f_1(\xi,\eta)\frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}} \tag{3.1}$$

Причем интегрирование взято по заштрихованной области (фиг. 1), ξ_0 есть точка пересечения характеристики $\eta = \eta_0 = \text{const}$ или $t + x = t_0 + x_0 = \text{const}$ с кривой $x = l_2(t)$; при этом для координаты $t = t_3$ этой точки имеет место уравнение

$$t_3 + l_2(t_3) = t_0 + x_0, \quad \xi_a = t_3 - l_2(t_3) \tag{3.2}$$

Тогда из (3.1) получим под штампом

$$v = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{t_3 - l_2(t_3)}^{t_0 - x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{t_0 - x_0 - \xi}} \int\limits_{-\xi}^{\eta_0} f_1(\xi, \eta) \frac{d\eta}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} \tag{3.3}$$

Вблизи края штампа $x_0 \approx l_2(t_0)$ и тогда будем иметь

$$v = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{t_3 - l_2(t_3)}^{t_0 - x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{t_0 - x_0 - \xi}} \int\limits_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} \frac{f_1(t_0 - x_0, \eta)}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} d\eta \tag{3.4}$$

где интегрирование по ξ ведется в узкой области (фиг.), для которой $t_3 \approx t_0$, $l_2(t_3) \approx x_0$. Вычислим интеграл по ξ, η, где вдоль $\xi = \text{const}$, $dt = dx$, $d\eta = 2dx$, $\eta_0 - \eta = 2(x_0 - x)$, а во внутреннем интеграле в (3.4) пределы по η заменяются на пределы по $x = x', x''$, найденные в виде

$$x' = l_2(t_2) \tag{3.5}$$

$$x'' = x_0 - t_0 \tag{3.6}$$

Тогда интеграл по η можно записать так

$$\sqrt{2} \int\limits_{x_0 - t_0}^{l_2(t_2)} f(x, t_0 - l_2 + x) \frac{dx}{\sqrt{x_0 - x}}$$

и (3.4) запишется в следующем виде ($x_0 < l_2(t_0)$):

$$v = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{t_0 - x_0 - t_3 + l_2(t_3)} \int\limits_{x_0 - t_0}^{l_2(t_2)} f(x, t_0 - l_2 + x) \frac{dx}{\sqrt{x_0 - x}} \tag{3.7}$$

Следует отметить, что при получении (2.4) брался интеграл по характеристике $\xi = \text{const} = \xi_0$, проходящей через точку x_0, t_0 (фиг.), для которой $x_0 > l_2(t_0)$, в то время, как (3.7) берется вдоль характеристики, $\xi = \xi_0$, проходящей через точку (x_0, t_0), для которой $x_0 < l_2(t_0)$, однако вблизи конца штампа $x_0 \approx l_2(t_0)$ оба интеграла совпадают. Вблизи конца штампа $x_0 \approx l_2(t_0)$, согласно (3.2) получим

$$t_3 \approx t_0, \quad t_3 - t_0 = \frac{x_0 - l_2(t_0)}{1 + \dot{l}_2(t_0)}$$

Тогда (3.7) запишется в виде ($x_0 < l_2(t_0)$):

$$v = \frac{K_2' \sqrt{l_2(t_0) - x_0}}{\pi}, \quad K_2' = -\frac{2}{\sqrt{1 + \dot{l}_2(t_0)}} \int\limits_{l_2(t_0) - t_0}^{l_2(t_2)} f(x, t - l_2 + x) \frac{dx}{\sqrt{x_0 - x}} \tag{3.8}$$

Таким образом получено значение $v = \partial u / \partial y_1$ около правого конца штампа, причем напряжение τ_{yz} в исходных координатах x и времени t будет записываться так

$$\frac{\tau_{yz}}{a\rho} = \frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{K_2'}{\pi} \sqrt{l_2(t) - x}$$

$$K_2' = -\frac{2}{\sqrt{1 + \dfrac{a_2}{a} \dfrac{dx_2(t)}{dt}}} \int\limits_{x_2(t) - a a_2^{-1} t}^{x_2(t)} f\left(x', t\frac{a}{a_2} - x_2 + x'\right) \frac{dx'}{\sqrt{x - x'}} \tag{3.9}$$

Отметим, что решение (2.10), (3.3) имеет силу в области, ограниченной характеристикой $\xi = \text{const} = t - x$, проходящей через точку $x_1 = l_1(0)$ пересечения начальной прямой $t = 0$ с кривой $x = l_1(t)$. Полученное решение, строго говоря, верно для достаточно гладкой функции $u_1(x, t)$, обращающейся в нуль на концах штампа $x = x_{1,2}(t)$, например, для случая поведения u_1 вблизи концов штампа вида $(l_{1,2}-x_0)^2$, кроме того следует полагать $|dx_{1,2}/dt|<\frac{a}{a_2}$, т.е. для "дозвуковой" скорости концов штампа.

Высказанное относится к особенности решения. Что касается общей формулы для решения (3.1), она верна для любых $f(x, t)$. В частности, для u_1 непрерывной в точках $x_0 = l_2(t_0)$, но имеющей разрыв в производных можно полагать вблизи конца $x_0 = l_2(t_0)$ штампа

$$u_1(x_0,t_0)=B(t_0)\begin{cases} l_2(t_0)-x_0, & x_0<l_2(t_0) \\ 0, & x_0>l_2(t_0) \end{cases}$$

тогда вблизи указанной точки для определения особенности в основных порядках получим

$$f(x_0,t_0)\approx B(t_0)\{\dot{l}_2^2(t_0)-1\}\delta(\xi), \quad \xi=l_2(t_0)-x_0$$

где δ – дельта функция, или в переменных ξ, η

$$f_1(\xi,\eta)=B(t)[\dot{l}_2^2(t)-1]\delta\left[l_2\left(\frac{\eta+\xi}{2}\right)-\frac{\eta-\xi}{2}\right]$$

Для нуля аргумента δ функции получится с учетом вида области интегрирования (фигура) $x = l_2(t)$, $t + x = t_0 + x_0$. Отсюда следует, что $t \approx t_3$, $x = l_2(t_3)$ и в функции под знаком интеграла в (3.1) нужно полагать $\xi = \xi_a = t_3 - l_2(t_3)$.

Тогда (3.1) вблизи $x_0 = l_2(t_0)$ примет вид

$$v=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\xi_0}^{\eta_0}\frac{2B(t)[\dot{l}_2^2(t)-1]}{\sqrt{(\eta_0-\eta)(\xi_0-\xi_a)}[\dot{l}_2(t)+1]}d\eta$$

где $t = x + t_0 - x_0$ вдоль характеристики $\xi = \xi_a \approx \xi_0$. В результате получится

$$v=-\frac{1}{2\pi\sqrt{\xi_0-\xi_a}}\int_{-\xi_0}^{\eta_0}\frac{2B(t_0-l_2+x)[\dot{l}_2(t_0-l_2+x)-1]}{\sqrt{\eta_0-\eta}}d\eta$$

$$l_2=l_2(t_0)$$

Окончательно под штампом будем иметь

$$v=-\frac{2\sqrt{1-\dot{l}_2(t_0)}}{\pi\sqrt{l_2(t_0)-x_0}}\int_{x_0-t_0}^{l_2(t_0)}\frac{B(t_0-l_2+x)[\dot{l}_2(t_0-l_2+x)-1]}{\sqrt{x_0-x}}dx$$

Таким образом, для негладкой у концов $x_0 = l_{1,2}(t_0)$ функции $u_1(x_0, t_0)$ получится особенность решения для напряжения известного вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.* Приближенное решение анизотропной задачи о распространении трещины // Механика. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1989. Вып. 7. С. 48–55.
2. *Сарайкин В.А., Слепян Л.И.* Плоская задача о динамике трещины в упругом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 54–73.
3. *Костров Б.В.* Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1042–1049.
4. *Ward G.* Supersonic flow past thin wings // Quar. J. Mech. and Appl. Math. 1949. V. 2. Pt. 2. P. 136–152.
5. *Красильщикова Е.А.* Тонкое крыло в сжимаемом потоке. М.: Наука, 1978. 223 с.

Ереван

Поступила в редакцию
16.11.1998