МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2001

УДК 539.3

© 2001 г. И.И. АРГАТОВ

ДАВЛЕНИЕ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО СИСТЕМЫ ШТАМПОВ В ФОРМЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПАРАБОЛОИДОВ

Методом сращиваемых асимптотических разложений изучена нелинейная контактная задача о вдавливании без трения нескольких параболоидальных штампов в упругое полупространство. Найдена асимптотика контактной жесткости системы штампов при учете их взаимодействия. Исследована чувствительность параметров эллиптических пятен контакта к расположению штампов в системе. В явном виде выписана асимптотика контактного давления для случая двух шарообразных штампов.

Постановка задачи. На границе полупространства $\mathbf{R}^3_+ = \{\mathbf{x} : x_3 > 0\}$ фиксируем точки $P^1,\ldots, P^J$ с координатами $(x_1^j, x_2^j, 0)$ и обозначим d наименьшее из всевозможных расстояний $d_{jk} = |P^j - P^k|$ при $j \neq k$. Исследуем задачу о поступательном вдавливании в упругое полупространство на глубину δ_0 системы штампов, ограниченных поверхностями

$$x_3 = -\Phi^j(y_1^j, y_2^j); \quad \Phi^j(y_1, y_2) = (2R_1^j)^{-1} y_1^2 + (2R_2^j)^{-1} y_2^2 \quad (j = 1,\ldots, J) \tag{1.1}$$
$$y_1^j = (x_1 - x_1^j)\cos\theta_j + (x_2 - x_2^j)\sin\theta_j, \quad y_2^j = -(x_1 - x_1^j)\sin\theta_j + (x_2 - x_2^j)\cos\theta_j$$

Здесь R_1^j, R_2^j – радиусы кривизны главных нормальных сечений в вершине, θ_j – угол между осью Ox_1 и главным сечением с кривизной $1/R_1^j$. Обозначим ε малый положительный параметр и положим

$$R_1^j = \varepsilon R_1^{*j}, \quad R_2^j = \varepsilon R_2^{*j}; \quad \delta_0 = \varepsilon \delta_0^* \tag{1.2}$$

где величины δ_0^* и R_1^{*j}, R_2^{*j} сравнимы с d. Расположение пятен контакта в окрестностях точек $P^1,\ldots, P^J$ неизвестно. Контакт заведомо отсутствует там, где поверхности штампов располагаются выше уровня невозмущенной границы упругого основания, т.е. пятно контакта с номером j содержится в области

$$\omega_j(\varepsilon) = \left\{(x_1, x_2) : \left(\varepsilon\sqrt{2\delta_0^* R_1^{*j}}\right)^{-2} (y_1^j)^2 + \left(\varepsilon\sqrt{2\delta_0^* R_2^{*j}}\right)^{-2} (y_2^j)^2 < 1\right\}$$

Объединение всех ($j = 1,\ldots, J$) областей $\omega_j(\varepsilon)$ обозначим $\Gamma(\varepsilon)$. При помощи краевых условий одностороннего контакта (см., например, [1, 2]) рассматриваемая задача формулируется так:

$$\mu\Delta_x \mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3_+ \tag{1.3}$$
$$\sigma_{31}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0) = \sigma_{32}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0) = 0, \quad \mathbf{x}' = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \tag{1.4}$$
$$\sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0) = 0, \quad \mathbf{x}' \notin \Gamma(\varepsilon) \tag{1.5}$$
$$u_3(\varepsilon; \mathbf{x}', 0) \geqslant \delta_0 - \Phi^j(y_1^j, y_2^j), \quad \sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0) \leqslant 0$$
$$[u_3(\varepsilon; \mathbf{x}', 0) - \delta_0 + \Phi^j(y_1^j, y_2^j)]\sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{x}', 0) = 0, \quad \mathbf{x}' \in \omega_j(\varepsilon) \quad (j = 1,\ldots, J) \tag{1.6}$$
$$\mathbf{u}(\varepsilon; \mathbf{x}) = o(1), \quad |\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \to \infty \tag{1.7}$$

Здесь λ, μ – постоянные Ламе; $\sigma_{3i}(\mathbf{u})$ – напряжения, отвечающие вектору смещений $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Границы пятен контакта определяются условием положительности контактного давления $p^j(\mathbf{x}') \equiv -\sigma_{33}(\mathbf{u};\mathbf{x}',0)$ при $\mathbf{x}' \in \omega_j(\varepsilon)$.

2. Обсуждение. В первом приближении давления под штампами рассчитываются независимо друг от друга. Эксцентриситет e_j эллиптической области контакта определяется из уравнения (см., например, [3], гл. 5, § 6.5):

$$\frac{R_2^j}{R_1^j} = \frac{(1-e_j^2)\mathbf{D}(e_j)}{\mathbf{B}(e_j)} \tag{2.1}$$

Предполагается, что $R_1^j \geqslant R_2^j$. Большая полуось пятна контакта равна

$$a_0^j = \sqrt{\delta_0 R_1^j}\,(2\mathbf{D}(e_j)/\mathbf{K}(e_j))^{1/2} \tag{2.2}$$

На штамп давит сила

$$Q_0^j = \frac{\pi E}{1-\nu^2}\frac{\sqrt{R^j}\,\delta_0^{3/2}}{\mathbf{c}(e_j)} \tag{2.3}$$

$$R^j = \frac{2R_1^j R_2^j}{R_1^j + R_2^j}, \qquad \mathbf{c}(e_j) = \mathbf{K}(e_j)^{3/2}\left(\frac{9(1-e_j^2)}{4\mathbf{E}(e_j)}\right)^{1/2} \tag{2.4}$$

Здесь E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона; $\mathbf{K}$ и $\mathbf{E}$ – полные эллиптические интегралы первого и второго родов, $\mathbf{D}(e) = e^{-2}[\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)]$, $\mathbf{B}(e) = e^{-2}[\mathbf{E}(e) - (1 - e^2)\mathbf{K}(e)]$. Контактное давление распределено по закону

$$p_0^j(y_1^j, y_2^j) = \frac{3Q_0^j}{2\pi(a_0^j)^2\sqrt{1-e_j^2}}\sqrt{1-\frac{(y_1^j)^2}{(a_0^j)^2}-\frac{(y_2^j)^2}{(a_0^j)^2(1-e_j^2)}} \tag{2.5}$$

Таким образом, при малых ε (в силу соглашения (1.2)) получаем

$$a_0^j = \varepsilon a_0^{*j} \tag{2.6}$$

$$Q_0^j = \varepsilon^2 Q_0^{*j} \quad (j = 1,\ldots,J) \tag{2.7}$$

Формулы (2.1) – (2.5) используются при расчетах характеристик упругого ненасыщенного контакта шероховатых тел (см., например [4], [5], разд. 3.4.2). Они не позволяют учесть эффект взаимного влияния контактов друг на друга. Ранее линейная контактная задача для ансамбля взаимодействующих штампов изучалась в [6–8]. В [9] получено приближенное решение задачи о действии на упругое полупространство системы штампов, области контакта которых близки к круговым. Приведены результаты расчетов для системы, состоящей из двух одинаковых шарообразных штампов. Асимптотическое решение задачи для двух параболоидальных штампов построено в [10]. Периодическая контактная задача изучалась в [11]. В настоящей работе используется метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [12, 13] и др.). Ранее в [14, 15] он применялся для исследования задачи Синьорини [1, 2].

3. Внешнее асимптотическое представление. Поле перемещений в массиве, удаленном от зон контакта, опишем, заменяя влияние штампов действием в точках $P^1,\ldots, P^J$ некоторых сосредоточенных сил $Q^1,\ldots, Q^J$, т.е.

$$\mathbf{v}(\varepsilon;\mathbf{x}) = Q^1\mathbf{T}(\mathbf{x}-P^1) + \ldots + Q^J\mathbf{T}(\mathbf{x}-P^J) \tag{3.1}$$

$$Q^j = \varepsilon^2 Q^{*j} \quad (j = 1,\ldots,J) \tag{3.2}$$

Здесь $\boldsymbol{T}$ – решение задачи Буссинеска (см., например, [16]) о нагружении упругого полупространства вдоль оси Ox_3 единичной сосредоточенной силой

$$4\pi\mu T_i(\mathbf{x}) = x_i x_3 \,|\,\mathbf{x}\,|^{-3} - (1-2\nu)x_i \,|\,\mathbf{x}\,|^{-1}\,(|\,\mathbf{x}\,| + x_3)^{-1} \qquad (i = 1,2)$$

$$4\pi\mu T_3(\mathbf{x}) = x_3^2 \,|\,\mathbf{x}\,|^{-3} + 2(1-\nu)\,|\,\mathbf{x}\,|^{-1} \tag{3.3}$$

Формула (3.2) аналогична (2.7). Ясно, что вектор (3.1) полностью удовлетворяет соотношениям (1.3) – (1.5), (1.7). Воспользуемся формулой Тейлора ($k \neq j$):

$$\frac{\pi E}{1-\nu^2}\mathbf{T}(\mathbf{x}-P^k) = \sum_{i=1}^{3} T_{0,i}^{jk}\mathbf{V}^{0,i} + \sum_{k=1}^{6} T_{1,i}^{jk}\mathbf{V}^{1,i}(\mathbf{x}-P^j) + O(|\,\mathbf{x}-P^j\,|^2), \qquad \mathbf{x}\to P^j \tag{3.4}$$

Здесь $\mathbf{V}^{0,i} = \mathbf{e}_i$ – орт оси Ox_i, а также использованы обозначения

$$T_{0,1}^{jk} = (2d_{jk})^{-1}(1-\alpha)\cos\gamma_{jk}, \qquad T_{0,2}^{jk} = (2d_{jk})^{-1}(1-\alpha)\sin\gamma_{jk}, \qquad T_{0,3}^{jk} = d_{jk}^{-1}$$

$$\alpha = \nu(1-\nu)^{-1}; \qquad T_{1,1}^{jk} = d_{jk}^{-2}\sin\gamma_{jk}, \qquad T_{1,2}^{jk} = -d_{jk}^{-2}\cos\gamma_{jk}, \qquad T_{1,3}^{jk} = 0 \tag{3.5}$$

$$T_{1,4}^{jk} = (2d_{jk}^2)^{-1}(1-\alpha)\sin 2\gamma_{jk}, \qquad T_{1,5}^{jk} = -T_{1,6}^{jk} = (2d_{jk}^2)^{-1}(1-\alpha)\cos 2\gamma_{jk}$$

$$\cos\gamma_{jk} = d_{jk}^{-1}(x_1^k - x_1^j), \qquad \sin\gamma_{jk} = d_{jk}^{-1}(x_2^k - x_2^j) \tag{3.6}$$

$$\mathbf{V}^{1,1}(\mathbf{x}) = -x_3\mathbf{e}_2 + x_2\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{V}^{1,2}(\mathbf{x}) = x_3\mathbf{e}_1 - x_1\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{V}^{1,3}(\mathbf{x}) = -x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{V}^{1,4}(\mathbf{x}) = x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{V}^{1,5}(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{e}_1 - \alpha x_3\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{V}^{1,6}(\mathbf{x}) = x_2\mathbf{e}_2 - \alpha x_3\mathbf{e}_3 \tag{3.7}$$

Подставив (3.4) в (3.1), при $|\mathbf{x} - P^j| \to 0$ найдем

$$\mathbf{v}(\varepsilon;\mathbf{x}) = Q^j\mathbf{T}(\mathbf{x}-P^j) + \sum_{k\neq j} Q^k\mathbf{T}(P^j - P^k) +$$

$$+ \sum_{k\neq j}\frac{1-\nu^2}{\pi E}Q^k\sum_{i=1}^{6} T_{1,i}^{jk}\mathbf{V}^{1,i}(\mathbf{x}-P^j) + O(|\,\mathbf{x}-P^j\,|^2) \tag{3.8}$$

4. Внутренние асимптотические представления. Фиксируем индекс j и в окрестностях зон контакта введем "растянутые" координаты

$$\xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j, \xi_3^j), \qquad \xi^j = \varepsilon^{-1}(\mathbf{x} - P^j) \tag{4.1}$$

С учетом нового масштаба расстояние от точки P^j до оставшихся будет не меньше $\varepsilon^{-1}d$. Поэтому задачу для пограничного слоя формулируем в полупространстве $\xi_3^j \geqslant 0$. Согласно (1.3), (1.4) имеем

$$\mu\Delta_\xi \mathbf{w}^j(\varepsilon;\xi) + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{w}^j(\varepsilon;\xi) = 0, \qquad \xi \in \mathbf{R}_+^3 \tag{4.2}$$

$$\sigma_{31}(\mathbf{w}^j;\xi',0) = \sigma_{32}(\mathbf{w}^j;\xi',0) = 0, \qquad \xi' = (\xi_1,\xi_2) \in \mathbf{R}^2 \tag{4.3}$$

Здесь и далее индекс j в символе ξ^j для упрощения формул иногда не пишется. Условие отсутствия пригрузки вне возможной области контакта (1.5) и краевое условие одностороннего контакта (1.6) объединяются в одно

$$w_3^j(\varepsilon;\xi',0) \geqslant \varepsilon\delta_0^* - \varepsilon\Phi^{*j}(\eta_1^j,\eta_2^j), \qquad \sigma_{33}(\mathbf{w}^j;\xi',0) \leqslant 0$$

$$[u_3^j(\varepsilon;\xi',0) - \varepsilon\delta_0^* + \varepsilon\Phi^{*j}(\eta_1^j,\eta_2^j)]\sigma_{33}(\mathbf{w}^j;\xi',0) = 0, \qquad \xi' \in \mathbf{R}^2 \tag{4.4}$$

$$\Phi^{*j}(\eta_1^j,\eta_2^j) = (2R_1^{*j})^{-1}(\eta_1^j)^2 + (2R_2^{*j})^{-1}(\eta_2^j)^2$$

$$\eta_1^j = \xi_1^j\cos\theta_j + \xi_2^j\sin\theta_j, \qquad \eta_2^j = -\xi_1^j\sin\theta_j + \xi_2^j\cos\theta_j \tag{4.5}$$

Соотношения (4.2) – (4.4) путем сращивания внутренних асимптотических представлений $\mathbf{w}^j(\varepsilon;\ \boldsymbol{\xi}^j)$ $(j = 1,\ldots, J)$ с внешним $\mathbf{v}(\varepsilon;\ \mathbf{x})$ замыкаем условием на поведение $\mathbf{w}^j(\varepsilon;\ \boldsymbol{\xi}^j)$ при $|\boldsymbol{\xi}^j| \to \infty$. В (3.8) сделаем подстановку (4.1). Так как (3.3) и (3.7) суть однородные вектор-функции соответственно степени –1 и 1, то с учетом (3.2) при $\varepsilon|\boldsymbol{\xi}^j| \to 0$ получаем

$$\mathbf{v}(\varepsilon; P^j + \varepsilon\boldsymbol{\xi}^j) = \varepsilon Q^{*j}\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}^j) + \varepsilon^2[\mathbf{V}^{*j}(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^j) + O(\varepsilon^2 \,|\, \boldsymbol{\xi}^j\,|^2)] \tag{4.6}$$

$$\mathbf{V}^{*j}(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^j) = \sum_{k\neq j} Q^{*k}\mathbf{T}(P^j - P^k) + \varepsilon \sum_{k\neq j} \frac{1-\nu^2}{\pi E} Q^{*k} \sum_{i=1}^{6} T_{1,i}^{jk}\mathbf{V}^{1,i}(\boldsymbol{\xi}^j) \tag{4.7}$$

В области сращивания $\{\boldsymbol{\xi}^j : \varepsilon^{-1/2} \leqslant |\,\boldsymbol{\xi}^j\,|/d \leqslant 2\varepsilon^{-1/2}\}$, где $\varepsilon\,|\,\boldsymbol{\xi}^j\,|/d = O(\varepsilon^{1/2})$, разность $\mathbf{v}(\varepsilon;\ P^j + \varepsilon\boldsymbol{\xi}^j) - \mathbf{w}^j(\varepsilon;\ \boldsymbol{\xi}^j)$ будет в определенном смысле малой, если будет выполнено условие (см. (4.6)):

$$\mathbf{w}^j(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^j) = \varepsilon^2\mathbf{V}^{*j}(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^j) + \varepsilon Q^{*j}[\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}^j) + O(|\,\boldsymbol{\xi}^j\,|^{-2})], \qquad |\,\boldsymbol{\xi}^j\,| \to \infty \tag{4.8}$$

5. Модельная задача для пограничного слоя. Решение задачи (4.2) – (4.4), (4.8) представим в форме

$$\mathbf{w}^j(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^j) = \varepsilon^2\mathbf{V}^{*j}(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^j) + \varepsilon\mathbf{W}^{*j}(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^j) \tag{5.1}$$

Нетрудно видеть (см. (4.7), (3.7)), что вектор $\mathbf{V}^{*j}$ удовлетворяет соотношениям (4.2), (4.3), причем $\sigma_{33}(\mathbf{V}^{*j};\ \boldsymbol{\xi}',\ 0) = 0$ и (см. обозначения (3.5), (3.6)):

$$\frac{\pi E}{1-\nu^2} V_3^{*j}(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}',0) = \sum_{k\neq j} Q^{*k} d_{jk}^{-1} + \varepsilon \sum_{k\neq j} Q^{*k} d_{jk}^{-2}(\xi_1 \cos\gamma_{jk} + \xi_2 \sin\gamma_{jk}) \tag{5.2}$$

Подставляя (5.1) в (4.2) – (4.4), (4.8), найдем, что вектор-функция $\mathbf{W}^{*j}$ должна удовлетворять (4.2), (4.3) и соотношениям (см. (4.4), (4.8))

$$W_3^{*j}(\varepsilon;\ \boldsymbol{\xi}',0) \geq \delta_0^* - F^{*j}(\varepsilon;\ \eta_1^j,\eta_2^j), \quad \sigma_{33}(\mathbf{W}^{*j};\ \boldsymbol{\xi}',0) \geq 0$$

$$[W_3^{*j}(\varepsilon;\ \boldsymbol{\xi}',0) - \delta_0^* - F^{*j}(\varepsilon;\ \eta_1^j,\eta_2^j) \quad \sigma_{33}(\mathbf{W}^{*j};\ \boldsymbol{\xi}',0) = 0, \quad \boldsymbol{\xi}' \in \mathbf{R}^2 \tag{5.3}$$

$$\mathbf{W}^{*j}(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}) = Q^{*j}\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}) + O(|\,\boldsymbol{\xi}\,|^{-2}), \quad |\,\boldsymbol{\xi}\,| \to \infty \tag{5.4}$$

Здесь в соответствии с (4.5) и (5.2):

$$F^{*j}(\varepsilon;\eta_1^j,\eta_2^j) = \Phi^{*j}(\eta_1^j,\eta_2^j) + \sum_{k\neq j} \frac{1-\nu^2}{\pi E} Q^{*k}[\varepsilon A_{jk} + \varepsilon^2(B_1^{jk}\eta_1^j + B_2^{jk}\eta_2^j)] \tag{5.5}$$

$$A_{jk} = d_{jk}^{-1}, \qquad B_1^{jk} = d_{jk}^{-2}\cos(\gamma_{jk} - \theta_j), \qquad B_2^{jk} = d_{jk}^{-2}\sin(\gamma_{jk} - \theta_j) \tag{5.6}$$

Решение данной задачи, где в (5.3) фигурирует полином второй степени (5.5), построим, используя теорию Герца (см. [17], гл. 4, § 3; [3], гл. 5, § 6.5).

6. Решение модельной задачи. В области контакта должно выполняться равенство (см. (5.3)):

$$W_3^{*j}(\varepsilon;\xi_1^j,\xi_2^j,0) = \delta_0^* - \frac{(\eta_1^j)^2}{2R_1^{*j}} - \frac{(\eta_2^j)^2}{2R_2^{*j}} - \varepsilon\sum_{k\neq j}\tilde{Q}^{*k}A_{jk} - \varepsilon^2\sum_{k\neq j}\tilde{Q}^{*k}(B_1^{jk}\eta_1^j + B_2^{jk}\eta_2^j) \tag{6.1}$$

$$\tilde{Q}^{*j} = (1-\nu^2)(\pi E)^{-1}Q^{*j} \qquad (j = 1,\ldots,J) \tag{6.2}$$

Выделяя в (6.1) полные квадраты, находим

$$W_3^{*j}(\varepsilon;\xi_1^j,\xi_2^j,0) = \delta_0^* - \varepsilon\sum_{k\neq j}\tilde{Q}^{*k}A_{jk} - \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2R_i^{*j}}(\eta_i^j - \eta_i^{\circ j}) + O(\varepsilon^4) \tag{6.3}$$

$$\eta_i^{\circ j} = -\varepsilon^2 R_i^{*j}\sum_{k\neq j}\tilde{Q}^{*k}B_i^{jk} \qquad (i = 1,2) \tag{6.4}$$

Значит центр пятна контакта смещен относительно вершины штампа в точку ($\eta_1^{\circ j}$, $\eta_2^{\circ j}$) с координатами (6.4). Пусть e_j и

$$a^j = \varepsilon a^{*j} \qquad (1,\ldots,J) \tag{6.5}$$

суть эксцентриситет и большая полуось эллиптической области контакта. Отбрасывая в (6.3) величины $O(\varepsilon^4)$, для определения Q^{*j}, a^{*j} и e_j в предположении $R_1^{*j} \geqslant R_2^{*j}$ выводим соотношения

$$\delta_0^* - \varepsilon \sum_{k\neq j} \tilde{Q}^{*k} A_{jk} = \frac{3\tilde{Q}^{*j}}{2a^{*j}} \mathbf{K}(e_j) \tag{6.6}$$

$$\frac{1}{R_1^{*j}} = \frac{3\tilde{Q}^{*j}}{(a^{*j})^3} \mathbf{D}(e_j), \qquad \frac{1}{R_2^{*j}} = \frac{3\tilde{Q}^{*j}}{(a^{*j})^3} \frac{\mathbf{B}(e_j)}{1-e_j^2} \tag{6.7}$$

Составляя из равенств (6.7) пропорцию, приходим к уравнению (2.1) для вычисления e_j. После этого из (6.7) выражаем a^{*j} через $\tilde{Q}^{*j}$ в виде

$$a^{*j} = \left(\tilde{Q}^{*j} R^{*j} \frac{3\mathbf{E}(e_j)}{2(1-e_j^2)} \right)^{1/3}, \qquad R^{*j} = \frac{2R_1^{*j} R_2^{*j}}{R_1^{*j} + R_2^{*j}} \tag{6.8}$$

где R^{*j} – среднее гармоническое радиусов R_1^{*j}, R_2^{*j}. Подставляя теперь (6.8) в (6.6), для отыскания $\tilde{Q}^{*1},\ldots,\tilde{Q}^{*J}$ находим систему уравнений

$$\delta_0^{*j} = (\tilde{Q}^{*j})^{2/3} (R^{*j})^{-1/3} \mathbf{c}(e_j)^{2/3} + \varepsilon \sum_{k\neq j} \tilde{Q}^{*k} A_{jk} \qquad (j=1,\ldots,J) \tag{6.9}$$

Значение $\mathbf{c}(e_j)$ определено в (2.4). Наконец, для контактного давления, отвечающего полю перемещений (5.1), имеем зависимость

$$p^j(\eta_1^j, \eta_2^j) = \frac{3Q^{*j}}{2\pi (a^{*j})^2 \sqrt{1-e_j^2}} \sqrt{1 - \frac{(\eta_1^j - \eta_1^{\circ j})^2}{(a^{*j})^2} - \frac{(\eta_2^j - \eta_2^{\circ j})^2}{(a^{*j})^2 (1-e_j^2)}} \tag{6.10}$$

7. Асимптотика контактной жесткости системы штампов. Найдем зависимость между перемещением δ_0 и силой

$$Q = Q^1 + \ldots + Q^J \tag{7.1}$$

С точностью, с которой была выписана система (6.9), положим

$$\tilde{Q}^{*j} = \tilde{Q}_0^{*j} + \varepsilon \tilde{Q}_1^{*j} + \varepsilon^2 \tilde{Q}_2^{*j} \qquad (j=1,\ldots,J) \tag{7.2}$$

Подставим (7.2) в (6.9) и воспользуемся разложением

$$Q^{2/3} = Q_0^{2/3} + \varepsilon \tfrac{2}{3} Q_0^{-1/3} Q_1 + \varepsilon^2 (\tfrac{2}{3} Q_0^{-1/3} Q_2 - \tfrac{1}{9} Q_0^{-4/3} Q_1^2) + O(\varepsilon^3)$$

Приравняв члены при одинаковых степенях параметра ε, найдем

$$\tilde{Q}_0^{*j} = (\delta_0^*)^{3/2} \sqrt{R^{*j}}\, \mathbf{c}(e_j)^{-1} \tag{7.3}$$

$$\tilde{Q}_1^{*j} = -\tfrac{3}{2} (\delta_0^*)^2 \sqrt{R^{*j}}\, \mathbf{c}(e_j)^{-1} \sum_{k\neq j} \sqrt{R^{*k}}\, \mathbf{c}(e_k)^{-1} A_{jk} \tag{7.4}$$

Соотношение (7.3) при учете (1.2), (2.7) и (6.2) совпадает с (2.3). Ограничиваясь в (7.2) только первой поправкой, соберем формулы (7.1) – (7.4) в одну и с помощью (1.2), (3.2) "уберем звездочки". Согласно (5.6), (6.2) имеем

$$Q = \frac{\pi E}{1-\nu^2}\delta_0^{3/2}\sum_{j=1}^{J}\frac{\sqrt{R^j}}{c(e_j)}\left[1 - {}^3\!/_2\,\delta_0^{1/2}\sum_{k\neq j}\frac{\sqrt{R^k}}{c(e_k)d_{jk}}\right] \tag{7.5}$$

Формула (7.5) не содержит угол θ_j, т.е. не зависит от ориентации штампов.

8. Уточнение внешнего асимптотического представления. Решение модельной задачи представим в виде обобщенного потенциала простого слоя

$$\mathbf{W}^{*j}(\varepsilon;\xi^j) = \iint p^j(\boldsymbol{\eta})\mathbf{T}(\xi_1^j - \eta_1\cos\theta_j + \eta_2\sin\theta_j, \xi_2^j - \eta_1\sin\theta_j - \eta_2\cos\theta_j, \xi_3^j)d\boldsymbol{\eta}$$

где интегрирование распространяется на область контакта. Отсюда находим

$$\mathbf{W}^{*j}(\varepsilon;\xi) = Q^{*j}\mathbf{T}(\xi) + \sum_{i=1}^{2}M_i^{*j}\mathbf{S}^{(i)}(\xi) + \sum_{n=0}^{2}M_{2,n}^{*j}\mathbf{S}^{(2,n)}(\xi) + O(|\xi|^{-4}), \quad |\xi|\to\infty$$

$$\mathbf{S}^{(1)}(\xi) = -\frac{\partial\mathbf{T}(\xi)}{\partial\xi_2}, \quad \mathbf{S}^{(2)}(\xi) = \frac{\partial\mathbf{T}(\xi)}{\partial\xi_1}, \quad \mathbf{S}^{(2,n)}(\xi) = \frac{\partial^2\mathbf{T}(\xi)}{\partial\xi_1^{2-n}\partial\xi_2^{n}} \tag{8.1}$$

Для интегральных характеристик давления (6.10) введены обозначения

$$M_1^{*j} = \hat{M}_1^{*j}\cos\theta_j - \hat{M}_2^{*j}\sin\theta_j, \qquad M_2^{*j} = \hat{M}_1^{*j}\sin\theta_j + \hat{M}_2^{*j}\cos\theta_j \tag{8.2}$$

$$M_{2,0}^{*j} = \hat{M}_{2,0}^{*j}\cos^2\theta_j - \hat{M}_{2,1}^{*j}\cos\theta_j\sin\theta_j + \hat{M}_{2,2}^{*j}\sin^2\theta_j$$

$$M_{2,1}^{*j} = \hat{M}_{2,0}^{*j}\sin 2\theta_j + \hat{M}_{2,1}^{*j}\cos 2\theta_j - \hat{M}_{2,2}^{*j}\sin 2\theta_j \tag{8.3}$$

$$\hat{M}_{2,2}^{*j} = \hat{M}_{2,0}^{*j}\sin^2\theta_j + \hat{M}_{2,1}^{*j}\sin\theta_j\cos\theta_j + \hat{M}_{2,2}^{*j}\cos^2\theta_j$$

$$\begin{Bmatrix}\hat{M}_1^{*j}\\ \hat{M}_2^{*j}\end{Bmatrix} = \iint\begin{Bmatrix}\eta_2\\ -\eta_1\end{Bmatrix}p^j(\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta}, \qquad \hat{M}_{2,n}^{*j} = \frac{(-1)^2}{2!}C_2^n\iint\eta_1^{2-n}\eta_2^n p^j(\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta}$$

Непосредственные вычисления приводят к таким значениям:

$$\hat{M}_1^{*j} = Q^{*j}\eta_2^{\circ j}, \qquad \hat{M}_2^{*j} = -Q^{*j}\eta_1^{\circ j} \tag{8.4}$$

$$\hat{M}_{2,0}^{*j} = 2^{-1}Q^{*j}[5^{-1}(a^{*j})^2 + (\eta_1^{\circ j})^2], \qquad \hat{M}_{2,1}^{*j} = \eta_1^{\circ j}\eta_2^{\circ j}Q^{*j} \tag{8.5}$$

$$\hat{M}_{2,2}^{*j} = 2^{-1}Q^{*j}[5^{-1}(a^{*j})^2(1-e_j^2) + (\eta_2^{\circ j})^2]$$

Подставив (4.1) в (8.1), получим (множитель ε слева поставлен ввиду (5.1)):

$$\varepsilon\mathbf{W}^{*j}(\varepsilon;\varepsilon^{-1}(\mathbf{x}-P^j)) \sim \varepsilon^2 Q^{*j}\mathbf{T}(\mathbf{x}-P^j) + \varepsilon^3\sum_{i=1}^{2}M_i^{*j}\mathbf{S}^{(i)}(\mathbf{x}-P^j) +$$

$$+\varepsilon^4\sum_{n=0}^{2}M_{2,n}^{*j}\mathbf{S}^{(2,n)}(\mathbf{x}-P^j) + \ldots \tag{8.6}$$

По методу сращиваемых разложений выписанные в (8.6) слагаемые определяют характер сингулярности внешнего асимптотического представления в точке P^j. При уточнении формулы (3.1) вдобавок учтем, что моменты M_1^{*j} и M_2^{*j} оказались порядка ε^2 (см. (6.4), (8.2), (8.4)).

Решая исходную задачу с большей точностью, в качестве внешнего асимптотического представления назначим выражение

$$\mathbf{v}(\varepsilon;\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{J}[Q^j\mathbf{T}(\mathbf{x}-P^j) + \sum_{n=0}^{2}M_{2,n}^j\mathbf{S}^{(2,n)}(\mathbf{x}-P^j)] \tag{9.1}$$

где в дополнении к (3.2) принята нормировка

$$M_{2,n}^{j}=\varepsilon^{4}M_{2,n}^{*j},\qquad n=0,1,2\quad (j=1,\dots,J)\tag{9.2}$$

Представление (9.1) диктует обновление формулы (3.8) членами $O(|\mathbf{x}-P^j|^2)$. Соответствующие коррективы следует внести и в соотношения (4.6) – (4.8).

9. Асимптотика контактного давления. Пограничные слои по-прежнему ищем в виде (5.1). На этот раз в качестве $\mathbf{V}^{*j}(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}^j)$ выступает векторный полином второй степени (удовлетворяющий системе Ламе и краевым условиям отсутствия напряжений), для которого вместо (5.2) выполняется

$$\frac{\pi E}{1-\nu^2}V_3^{*j}(\varepsilon;\boldsymbol{\xi}',0)=\sum_{k\neq j}Q^{*k}d_{jk}^{-1}+\varepsilon\sum_{k\neq j}Q^{*k}d_{jk}^{-2}(\xi_1\cos\gamma_{jk}+\xi_2\sin\gamma_{jk})+$$

$$+\varepsilon^2\sum_{k\neq j}[2^{-1}Q^{*k}d_{jk}^{-3}(3(\xi_1\cos\gamma_{jk}+\xi_2\sin\gamma_{jk})-\xi_1^2-\xi_2^2)+\sum_{n=0}^{2}M_{2,n}^{*k}A_{jk}^{(2,n)}]\tag{9.3}$$

$$A_{jk}^{(2,n)}=\pi E(1-\nu^2)^{-1}S_3^{(2,n)}(P^j-P^k),\qquad A_{jk}^{(2,0)}=d_{jk}^{-3}(3\cos^2\gamma_{jk}-1)$$

$$A_{jk}^{(2,1)}=d_{jk}^{-3}3\cos\gamma_{jk}\sin\gamma_{jk},\qquad A_{jk}^{(2,2)}=d_{jk}^{-3}(3\sin^2\gamma_{jk}-1)\tag{9.4}$$

В краевом условии одностороннего контакта выражение (5.5) заменяем таким:

$$F^{*j}(\varepsilon;\eta_1^j,\eta_2^j)=\Phi^{*j}(\eta_1^j,\eta_2^j)+\sum_{k\neq j}\frac{1-\nu^2}{\pi E}Q^{*k}[\varepsilon A_{jk}+\varepsilon^2(B_1^{jk}\eta_1^j+B_2^{jk}\eta_2^j)]+$$

$$+\varepsilon^3\sum_{k\neq j}\frac{1-\nu^2}{\pi E}\{Q^{*k}[C_{11}^{jk}(\eta_1^j)^2+2C_{12}^{jk}\eta_1^j\eta_2^j+C_{22}^{jk}(\eta_2^j)^2]+\sum_{n=0}^{2}M_{2,n}^{*k}A_{jk}^{(2,n)}\}\tag{9.5}$$

$$C_{11}^{jk}=\frac{3\cos^2(\gamma_{jk}-\theta_j)-1}{2d_{jk}^3},\qquad C_{12}^{jk}=\frac{3\sin 2(\gamma_{jk}-\theta_j)}{4d_{jk}^3},\qquad C_{22}^{jk}=\frac{3\sin^2(\gamma_{jk}-\theta_j)-1}{2d_{jk}^3}\tag{9.6}$$

В схеме решения модельной задачи появляется новый момент. Так как, вообще говоря, коэффициент $\Sigma_{k\neq j}Q^{*k}C_{12}^{jk}$ при $\eta_1^j\eta_2^j$ в (9.5) отличен от нуля, то площадка контакта оказывается повернутой относительно координатных осей $P^j\eta_1^j$ и $P^j\eta_2^j$ на некоторый угол φ_j. Если $R_1^{*j}=R_2^{*j}$, то φ_j определяется квадратичной формой $\Sigma_{\alpha,\beta}(\Sigma_{k\neq j}Q^{*k}C_{\alpha\beta}^{jk})\eta_\alpha\eta_\beta$. Если $R_1^{*j}>R_2^{*j}$, то в главном

$$\varphi_j=-\varepsilon^3\frac{2R_1^{*j}R_2^{*j}}{R_1^{*j}-R_2^{*j}}\sum_{k\neq j}\tilde{Q}_0^{*k}C_{12}^{jk}$$

При этом контактное давление распределено по формуле

$$p^j(\hat{\eta}_1^j,\hat{\eta}_2^j)=\frac{3Q^{*j}}{2\pi(a^{*j})^2\sqrt{1-e_j^2}}\sqrt{1-\frac{(\hat{\eta}_1^j)^2}{(a^{*j})^2}-\frac{(\hat{\eta}_2^j)^2}{(a^{*j})^2(1-e_j^2)}}\tag{9.7}$$

$$\hat{\eta}_1^j=(\eta_1^j-\eta_1^{\circ j})\cos\varphi_j+(\eta_2^j-\eta_2^{\circ j})\sin\varphi_j,\qquad \hat{\eta}_2^j=-(\eta_1^j-\eta_1^{\circ j})\sin\varphi_j+(\eta_2^j-\eta_2^{\circ j})\cos\varphi_j$$

Для отыскания величин Q^{*j}, a^{*j}, e_j находим уравнения ($j=1,\dots,J$):

$$\delta_0^*-\varepsilon\sum_{k\neq j}\tilde{Q}^{*k}A_{jk}-\varepsilon^3\sum_{k\neq j}\sum_{n=0}^{2}\tilde{M}_{2,n}^{*0k}A_{jk}^{(2,n)}=\frac{3\tilde{Q}^{*j}}{2a^{*j}}\mathbf{K}(e_j)\tag{9.8}$$

$$\frac{1}{R_1^{*j}}+\varepsilon^3\sum_{k\neq j}2\tilde{Q}_0^{*k}C_{11}^{jk}=\frac{3\tilde{Q}^{*j}}{(a^{*j})^3}\mathbf{D}(e_j) \tag{9.9}$$

$$\frac{1}{R_2^{*j}}+\varepsilon^3\sum_{k\neq j}2\tilde{Q}_0^{*k}C_{22}^{jk}=\frac{3\tilde{Q}^{*j}}{(a^{*j})^3}\frac{\mathbf{B}(e_j)}{1-e_j^2} \tag{9.10}$$

Здесь использованы обозначение (6.2) и следующее

$$\tilde{M}_{2,n}^{*0j}=(1-\nu^2)(\pi E)^{-1}M_{2,n}^{*0j} \qquad (n=0,1,2 \;\; j=1,\ldots,J)$$

Предполагается, что левая часть равенства (9.9) меньше левой части (9.10). В случае $R_1^{*j}=R_2^{*j}$, $\theta_j=0$ величины $\Sigma_{k\neq j}\tilde{Q}_0^{*k}C_{11}^{jk}$ и $\Sigma_{k\neq j}\tilde{Q}_0^{*k}C_{22}^{jk}$ надо заменить меньшим и большим собственными значениями матрицы $\|\Sigma_{k\neq j}\tilde{Q}_0^{*k}C_{\alpha\beta}^{jk}\|$. Наконец, выполним условие сращивания внешнего и внутренних асимптотических представлений. Так, величины $M_{2,n}^{*0j}$, пересчитанные из одной системы координат в другую, должны совпасть с полимоментами второго порядка давления (9.7). Последние (в рамках точности, с которой были выписаны соотношения (9.8) – (9.10)) вычисляются по формулам (8.3), где $\hat{M}_{2,0}^{*j}=10^{-1}Q_0^{*j}(a_0^{*j})^2$, $\hat{M}_{2,1}^{*j}=0$, $\hat{M}_{2,2}^{*j}=\hat{M}_{2,0}^{*j}(1-e_{0j}^2)$ (см. (8.5)), причем набор Q_0^{*j},a_0^{*j},e_{0j} служит решением системы (9.8) – (9.10) для $\varepsilon=0$. Используя (6.8), (7.3), найдем

$$\tilde{M}_{2,0}^{*0j}=\tilde{M}_0^{*j}(1-e_{0j}^2\sin^2\theta_j),\quad \tilde{M}_{2,1}^{*0j}=\tilde{M}_0^{*j}e_{0j}^2\sin 2\theta_j,\quad \tilde{M}_{2,2}^{*0j}=\tilde{M}_0^{*j}(1-e_{0j}^2\cos^2\theta_j)$$

$$\tilde{M}_0^{*j}=15^{-1}(\delta_0^*)^{5/2}(R^{*j})^{3/2}\mathbf{K}(e_{0j})^{-5/2}\mathbf{E}(e_{0j})^{3/2}(1-e_{0j}^2)^{-3/2}$$

Уравнения (9.8) – (9.10) (благодаря присутствию малого параметра ε) допускают асимптотическое решение. Так, из (9.9), (9.10) выводим

$$\frac{R_2^{*j}}{R_1^{*j}}(1+\varepsilon^3\sum_{k\neq j}2\tilde{Q}^{*k}[C_{11}^{jk}R_1^{*j}-C_{22}^{jk}R_2^{*j}])=\frac{(1-e_j^2)\mathbf{D}(e_j)}{\mathbf{B}(e_j)} \tag{9.11}$$

Следовательно, эксцентриситет пятна контакта зависит от действующей на штамп силы и расположения штампов в системе.

10. Примеры. *1*. Сопоставим полученное решение с результатами работы [10]. Пусть система состоит из двух одинаковых ($R_1^j=R_1$ и $R_2^j=R_2$) штампов, с одним из которых связаны оси координат ($x_1^1=x_2^1=0$ и $\theta_1=0$), а другой получается параллельным переносом ($x_1^2=2h, x_2^2=2g$ и $\theta_2=0$). В силу симметрии можно ограничиться изучением результирующей задачи только для первого штампа. Избавляясь от присутствия параметра ε (см. (1.2), (2.6), (2.7), (3.2) и (9.2)), уравнения (9.8) – (9.10) перепишем в виде ($j=1$, $k=2$):

$$\delta_0-\tilde{Q}A_{jk}-\sum_{n=0}^{2}\tilde{M}_{2,n}^0A_{jk}^{(2,n)}=\frac{3\tilde{Q}}{2a}\mathbf{K}(e) \tag{10.1}$$

$$\frac{1}{R_1}+2\tilde{Q}_0C_{11}^{jk}=\frac{3\tilde{Q}}{a^3}\mathbf{D}(e) \tag{10.2}$$

$$\frac{1}{R_2}+2\tilde{Q}_0C_{22}^{jk}=\frac{3\tilde{Q}}{a^3}\frac{\mathbf{B}(e)}{1-e^2} \tag{10.3}$$

$$\tilde{M}_{2,0}^0=10^{-1}\tilde{Q}_0a_0^2,\quad \tilde{M}_{2,1}^0=0,\quad \tilde{M}_{2,2}^0=\tilde{M}_{2,0}^0(1-e_0^2)$$

Предположим дополнительно, что отношение h/g велико (см. [10], разд. 4). Тогда можно пренебречь поворотами площадок контакта ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$). При этом следует считать, что

$$A_{jk} = \frac{1}{2h}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{g^2}{h^2}\right); \qquad C_{11}^{jk} = \frac{1}{8h^3}, \qquad C_{12}^{jk} = 0, \qquad C_{22}^{jk} = -\frac{1}{16h^3} \tag{10.4}$$

$$A_{jk}^{(2,0)} = (4h^3)^{-1}, \qquad A_{jk}^{(2,1)} = 0, \qquad A_{jk}^{(2,2)} = -(8h^3)^{-1} \tag{10.5}$$

Из (10.2), (10.3), используя (10.4), выводим уравнение

$$\frac{\mathbf{B}(e)}{(1-e^2)\mathbf{D}(e)} = \frac{R_1}{2R_2}\frac{8h^3 - \tilde{Q}_0 R_2}{4h^3 + \tilde{Q}_0 R_1} \tag{10.6}$$

Из (10.2) находим

$$a^3 = \frac{12\tilde{Q}h^3 R_1}{4h^2 + \tilde{Q}_0 R_1} \tag{10.7}$$

Привлекая равенства (10.5) и первое в (10.4), перепишем уравнение (10.1) так:

$$\delta_0 = \frac{3\tilde{Q}}{2a}\left[\mathbf{K}(e) + \frac{a}{h}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{g^2}{h^2}\right) + \frac{aa_0^2}{120h^3}(1+e_0^2)\frac{\tilde{Q}_0}{\tilde{Q}}\right] \tag{10.8}$$

Таким образом, в рамках принятой точности уравнения (10.8), (10.7) и (10.6), по существу, совпадают с уравнениями (4.3) – (4.5) работы [10].

2. Исследуем теперь задачу для двух одинаковых шарообразных штампов ($R_1^j = R_2^j = R$), вершины которых удалены друг от друга на расстояние d и лежат на оси абсцисс (см. [9]). В рассматриваемом случае ($j = 1$, $k = 2$) имеем: $A_{jk} = d^{-1}$; $B_1^{jk} = d^{-2}$, $B_2^{jk} = 0$; $C_{11}^{jk} = d^{-3}$, $C_{12}^{jk} = 0$, $C_{22}^{jk} = -2^{-1}d^{-3}$; $A_{jk}^{(2,0)} = 2d^{-3}$, $A_{jk}^{(2,1)} = 0$, $A_{jk}^{(2,2)} =$ $= -d^{-3}$; $\tilde{M}_{2,0}^{*0j} = \tilde{M}_{2,2}^{*0j} = 2(15\pi)^{-1}(\delta_0^*)^{5/2}(R^*)^{3/2}$, $\tilde{M}_{2,1}^{*0j} = 0$. Результирующая система выглядит следующим образом:

$$\delta_0^* - \frac{\varepsilon}{d}\tilde{Q}^* - \frac{\varepsilon^3}{d^3}\frac{2}{15\pi}(\delta_0^*)^{5/2}(R^*)^{3/2} = \frac{3\tilde{Q}^*}{2a^*}\mathbf{K}(e) \tag{10.9}$$

$$\frac{1}{R^*} + \frac{\varepsilon^3}{d^3}2\tilde{Q}_0^* = \frac{3\tilde{Q}^*}{(a^*)^3}\frac{\mathbf{B}(e)}{1-e^2} \tag{10.10}$$

$$\frac{1}{R^*} - \frac{\varepsilon^3}{d^3}\tilde{Q}_0^* = \frac{3\tilde{Q}^*}{(a^*)^3}\mathbf{D}(e) \tag{10.11}$$

Уравнения (10.10) и (10.11) отражают тот факт, что площадки контакта оказываются вытянутыми в направлении, перпендикулярном оси, соединяющей центры штампов. Для определения эксцентриситета e возникает уравнение

$$\frac{(1-e^2)\mathbf{D}(e)}{\mathbf{B}(e)} = 1 - \frac{3\varepsilon^3}{d^3}\tilde{Q}_0^* R^* \tag{10.12}$$

Используя разложения для полных эллиптических интегралов при малых значениях модуля (см., например, [18]), находим

$$\frac{(1-e^2)\mathbf{D}(e)}{\mathbf{B}(e)} = 1 - \frac{3}{4}e^2 + O(e^4) \tag{10.13}$$

Подставляя (10.13) в (10.12), получаем

$$e^2 = \frac{4\varepsilon^3}{d^3}\tilde{Q}_0^* R^* \tag{10.14}$$

Из (10.10), (10.11) при учете (10.4) можно получить зависимость

$$a^* = \left(\frac{3\pi}{4}\tilde{Q}^* R^*\right)^{1/3}\left(1 + \frac{5\varepsilon^3}{6d^3}\tilde{Q}_0^* R^*\right) \tag{10.15}$$

Подставляя (10.15) в (10.9), выводим уравнение для определения

$$\tilde{Q}^* = \tilde{Q}_0^*(1 + \varepsilon q_1^* + \varepsilon^2 q_2^* + \varepsilon^3 q_3^*) \tag{10.16}$$

Несложные вычисления приводят к следующим значениям

$$q_1^* = -\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{\delta_0^* R^*}}{d}, \quad q_2^* = \frac{14}{3\pi^2}\frac{\delta_0^* R^*}{d^2}, \quad q_3^* = -\left(\frac{8}{15\pi} + \frac{320}{27\pi^3}\right)\frac{(\delta_0^* R^*)^{3/2}}{d^3} \tag{10.17}$$

Соберем формулы (10.16), (10.17) в одну

$$Q = Q_0\left[1 - \varepsilon\frac{2}{\pi} + \varepsilon^2\frac{14}{3\pi^2} - \varepsilon^3\left(\frac{8}{15\pi} + \frac{320}{27\pi^3}\right)\right], \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{\delta_0 R}}{d} \tag{10.18}$$

Значит, эксцентриситет и большая полуось площадки контакта таковы:

$$e^2 = \varepsilon^3\frac{16}{3\pi} \tag{10.19}$$

$$a = \sqrt{\delta_0 R}\left[1 - \varepsilon\frac{2}{3\pi} + \varepsilon^2\frac{10}{9\pi^2} + \varepsilon^3\left(\frac{14}{15\pi} - \frac{64}{27\pi^3}\right)\right] \tag{10.20}$$

Наконец, абсцисса центра пятна контакта (см. (6.4)) вычисляется по формуле

$$x_1^{\circ 1} = -\tilde{Q}Rd^{-2} \tag{10.21}$$

Чтобы сравнить решение с результатами работы [9], выпишем уравнение границы пятна контакта в полярных координатах (r, θ). Подставим соотношения (10.8) – (10.21) в уравнение

$$\frac{r^2\sin^2\theta}{a^2} + \frac{(r\cos\theta - x_1^{\circ 1})^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

Как и прежде, удерживая только величины до порядка ε^3, получим

$$r(\theta) = \sqrt{\delta_0 R}\left[\underline{1 - \varepsilon\frac{2}{3\pi} + \varepsilon^2\left(\frac{10}{9\pi^2} - \frac{4}{3\pi}\cos\theta\right)} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^3\left(-\frac{2}{5\pi} - \frac{64}{27\pi^3} + \frac{8}{3\pi^2}\cos\theta - \frac{4}{3\pi}\cos 2\theta\right)\right] \tag{10.22}$$

Формула (10.22), по существу, только подчеркнутыми членами совпадает с формулой (2.8) работы [9]. Заметим, что развитый в [9] метод весьма трудоемок. Поэтому значительная часть выкладок осталась вне статьи, тем самым не предоставлено возможности для непосредственной проверки вычислений.

11. Заключение. Асимптотические формулы, аналогичные (10.18) – (10.20), (10.22), нетрудно выписать и в общем случае. Заметим также, что для решения системы (9.8) – (9.10) можно прибегнуть к численным методам (см. [10]). Предлагаемый способ построения асимптотического решения исходной задачи существенно опирается на умение (по теории Герца) решать модельную задачу для пограничного слоя. Попытка повысить точность вычислений приводит к утрате эллиптичности пятен контакта (см. [17, 19, 20]). Наконец, замена упругого полупространства на слой не вносит усложнений в конструкцию асимптотики: вместо решения Буссинеска используется решение задачи о действии сосредоточенной силы на границу упругого слоя (см. [21, 22] и др.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
4. *Демкин Н.Б.* Контактирование шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 227 с.
5. *Михин Н.М.* Контакт волнистых и шероховатых тел // Справочник по триботехнике / Под общ. ред. М. Хебды, А.В. Чичинадзе. Т. 1. Теоретические основы. М.: Машиностроение, 1989. С. 106–116.
6. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
7. *Gladwell G.M.L., Fabrikant V.I.* The interaction between a system of circular punches on an elastic half space // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1982. V. 49. № 2. P. 341–344.
8. *Горячева И.Г., Добычин М.Н.* Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
9. *Андрейкив А.Е.* Вдавливание в упругое полупространство системы штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 2. С. 125–131.
10. *Александров В.М., Шматкова А.А.* Вдавливание параболического штампа в упругий слой и двух параболических штампов в упругое полупространство // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 149–155.
11. *Горячева И.Г., Торская Е.В.* Периодическая контактная задача для системы штампов и упругого слоя, сцепленного с упругим основанием // Трение и износ. 1995. Т. 16. № 4. С. 642–652.
12. *Ван-Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
13. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
14. *Аргатов И.И., Назаров С.А.* Асимптотическое решение задачи Синьорини с препятствием на тонком продолговатом множестве // Мат. сб. 1996. Т. 187. № 10. С. 3–32.
15. *Аргатов И.И., Назаров С.А.* Асимптотическое решение задачи об упругом теле, лежащем на нескольких малых опорах // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 110–118.
16. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
17. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
18. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
19. *Довнорович В.И.* Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск: Изд-во БГУ, 1959. 107 с.
20. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
21. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
22. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
25.12.1998