МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2001

УДК 531.383

© 2001 г. Ю.В. КУЛЕШОВ, А.В. МЕДВЕДЕВ

ДВИЖЕНИЕ БЫСТРО ЗАКРУЧЕННОГО ГИРОСКОПА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ В СЛАБО СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Рассматривается задача о движении динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки под действием малого нелинейного диссипативного момента. С помощью метода осреднения получены эволюционные уравнения, позволяющие оценить характер движения. Угловое движение тела в сопротивляющейся среде изучалось в [1–10].

1. Вывод уравнений движения. Для описания углового движения тела используем переменные K, ρ, σ, ψ, ϑ, φ, определяющие величину модуля вектора кинетического момента $\mathbf{K}$, его положение (ρ, σ) относительно неподвижного трехгранника $O\xi_1\xi_2\xi_3$ и углы Эйлера ψ, ϑ, φ, задающие положение главных центральных осей инерции тела $Ox_1x_2x_3$ относительно трехгранника $O\xi_1\xi_2\xi_3$, связанного с вектором кинетического момента. Ось $O\zeta_3$ направлена вдоль $\mathbf{K}$; ρ – угол между $O\zeta_3$ и $O\xi_3$, σ – угол между плоскостями $O\xi_1\xi_3$ и $O\zeta_1\xi_3$.

Систему дифференциальных уравнений для динамически симметричного твердого тела запишем в виде [11]:

$$
\begin{aligned}
&K\,d\rho/dt = M_1, \quad K\sin\rho\, d\sigma/dt = M_2, \quad dK/dt = M_3\\
&d\psi/dt = K/I_1 - K^{-1}\operatorname{ctg}\vartheta(M_2\sin\psi + M_1\cos\psi) - M_2K^{-1}\operatorname{ctg}\rho \qquad (1.1)\\
&d\vartheta/dt = K^{-1}(M_2\cos\psi - M_1\sin\psi)\\
&d\varphi/dt = (K/I_3 - K/I_1)\cos\vartheta + (K\sin\vartheta)^{-1}(M_2\sin\psi + M_1\cos\psi)
\end{aligned}
$$

где I_1, I_3 – главные экваториальный и полярный моменты инерции тела, M_i – проекции моментов внешних сил на оси $O\zeta_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Считаем, что момент внешних сил $\mathbf{M}$ в осях $Ox_1x_2x_3$ имеет вид

$$
\mathbf{M} = \mathbf{A} - B\boldsymbol{\Omega} - S|\boldsymbol{\Omega}|\boldsymbol{\Omega}
$$

$$
\boldsymbol{\Omega} = \| P, Q, R \|^{(*)}, \quad |\boldsymbol{\Omega}| = (P^2 + Q^2 + R^2)^{1/2} \tag{1.2}
$$

где P, Q, R – проекции вектора абсолютной угловой скорости тела на оси $Ox_1x_2x_3$.

$$
\mathbf{A} = \| A_1, A_2, A_3 \|^{(*)}, \quad |B| = \| B_{ij} \|, \quad S = \| S_{ij} \|
$$

A, B, S $(i, j = 1, 2, 3)$ – постоянные величины, которые могут рассматриваться как коэффициенты аэродинамического момента сопротивления вращению шарового тела, $(*)$ означает операцию транспонирования.

Нормализуем уравнения (1.1), вводя безразмерные переменные:

$$
\mathbf{K} = K_0\mathbf{k}, \quad t = T_0\tau, \quad T_0 = I_1K_0^{-1}, \quad I_3 = I_1(1+\chi)
$$

$$
P = T_0^{-1}p, \quad Q = T_0^{-1}q, \quad R = T_0^{-1}r, \quad \mathbf{M} = M_0\mathbf{m}
$$

где K_0, T_0, M_0 – характерные значения соответствующих величин, выбираемые таким образом, чтобы в рассматриваемом движении $|\mathbf{k}|$, r, $|\mathbf{m}|$ были порядка единицы. Обозначая

$$A_i M_0^{-1} = a_i, \quad B_{i_j} M_0^{-1} T_0^{-1} = b_{i_j}, \quad S_{i_j} M_0^{-1} T_0^{-2} = s_{i_j}, \quad M_0 I_1 K_0^2 = \varepsilon$$

перепишем (1.1) в виде

$$\begin{aligned}
&k\, d\rho/d\tau = \varepsilon m_1, \quad k \sin\rho\, d\sigma/d\tau = \varepsilon m_2, \quad dk/d\tau = \varepsilon m_3\\
&d\psi/d\tau = k - \varepsilon k^{-1} \operatorname{ctg}\vartheta (m_2 \sin\psi + m_1 \cos\psi) - \varepsilon m_2 k^{-1} \operatorname{ctg}\rho\\
&d\vartheta/d\tau = \varepsilon k^{-1} (m_2 \cos\psi - m_1 \sin\psi)\\
&d\varphi/d\tau = -k\chi(1+\chi)^{-1} \cos\vartheta + \varepsilon (k \sin\vartheta)^{-1} (m_2 \sin\psi + m_1 \cos\psi)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Сделаем допущение о малости возмущающего момента по сравнению с кинетической энергией вращательного движения тела. В этом случае будем иметь $\varepsilon \ll 1$ и, таким образом, систему (1.3) можно рассматривать как систему уравнений в стандартной форме [12], в которой K, ρ, σ, ϑ являются медленными, а ψ и φ – быстрыми переменными.

Поставим вопрос об исследовании поведения (1.3) на асимптотически большом интервале времени $\tau \sim \varepsilon^{-1}$.

Отличие данной работы от цитируемых [1–10] состоит в структуре возмущающего момента (1.2).

2. Исследование уравнений движения. Применим метод осреднения в форме [12]. Невозмущенное движение, когда $\varepsilon = 0$ является регулярной прецессией в случае Эйлера – Пуансо:

$$k = k_0, \quad \rho = \rho_0, \quad \sigma = \sigma_0, \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad \psi = k\tau + \psi_0, \quad \varphi = -\frac{k\chi}{1+\chi}\tau\cos\vartheta + \varphi_0 \tag{2.1}$$

где k_0, ρ_0, σ_0, ϑ_0, ψ_0, φ_0 – постоянные величины.

Осреднение уравнений для медленных переменных проведем по быстрым переменным ψ и φ вдоль траекторий невозмущенного движения (2.1).

Используя процедуру общей схемы осреднения и сохраняя для медленных осредненных переменных их прежние обозначения, после соответствующих вычислений получим систему уравнений первого приближения:

$$\begin{aligned}
&K\, d\rho/d\tau = 0, \quad K \sin\rho\, d\sigma/d\tau = 0\\
&dK/d\tau = \varepsilon\{a_3 \cos\vartheta - k[\alpha \sin^2\vartheta + \beta\cos^2\vartheta + k(\gamma_1 \sin^2\vartheta + \delta_1 \cos^2\vartheta)(1-\chi_1^2\cos^2\vartheta)^{1/2}]\}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
&d\vartheta/d\tau = -\varepsilon[a_3 (K\cos\vartheta)^{-1} + \alpha - \beta + k(\gamma_1 - \delta_1)(1-\chi_1^2\cos^2\vartheta)^{1/2}]\cos\vartheta\sin\vartheta\\
&\alpha = (b_{11} + b_{22})/2, \quad \beta = b_{33}(1+\chi)\\
&\gamma_1 = (S_{11} + S_{22})/2, \quad \delta_1 = S_{33}(1+\chi)^{-1}, \quad \chi_1^2 = \chi(2+\chi)(1+\chi)^{-2}
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что направление вектора кинетического момента остается неизменным по отношению к инерциальной системе отсчета.

Вводя новые переменные W и V соотношениями

$$W = k\cos\vartheta, \quad V = k\sin\vartheta \tag{2.3}$$

получим систему уравнений относительно этих переменных

$$\begin{aligned}
&dW/d\tau = \varepsilon\{a_3 - \beta W - \delta W[W^2 + (1+\chi)^2 V^2]^{1/2}\}\\
&dV/d\tau = -\varepsilon\{\alpha V + \gamma V[W^2 + (1+\chi)^2 V^2]^{1/2}\}\\
&\delta = S_{33}(1+\chi)^{-2}, \quad \gamma = (S_{11} + S_{22})(2+2\chi)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

В общем случае (2.4) представляет, по-видимому, неинтегрируемую систему уравнений.

Рассмотрим случай $a_3 = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Из (2.4) получаем интеграл

$$(W/W_0)^\gamma = (V/V_0)^\delta; \qquad W_0 = W(0), \qquad V_0 = V(0) \tag{2.5}$$

Подставив (2.5) в (2.4) приходим к соотношениям

$$\int_{V_0}^{V} V^{-2}(1+\mu_1 V^{n_1})^{-1/2} dV = -\varepsilon\gamma(1+\chi)\tau$$

$$\int_{W_0}^{W} W^{-2}(1+\mu_2 W^{n_2})^{-1/2} dW = -\varepsilon\delta\tau \tag{2.6}$$

$$n_1 = 2(\delta/\gamma - 1), \qquad n_2 = 2(\gamma/\delta - 1)$$

$$\mu_1 = W_0^2 V_0^{-2\delta/\gamma}(1+\chi)^2; \quad \mu_2 = V_0^2 W_0^{-2\gamma/\delta}(1+\chi)^2$$

Разрешимость интегралов (2.6) в элементарных функциях возможна в случаях, определяемых известными формулами Чебышева.

В одном из интегрируемых случаев ($\gamma = 2\delta$) из (2.6) находим:

$$K = [V(V + W_0^2 / V_0)]^{1/2}, \quad \operatorname{tg}\vartheta = (VV_0)^{1/2} / W_0 \tag{2.7}$$

$$V = \mu_1 \{[\varepsilon\mu_1\gamma(1+\chi)\tau/2 + (\mu_1/V_0 + 1)^{1/2}]^2 - 1\}^{-1}$$

Отсюда заключаем, что при $\tau \to +\infty$ $K \to 0$, $\vartheta \to 0$, если $0 < \vartheta_0 < \pi/2$ или $\vartheta \to \pi$, если $\pi/2 < \vartheta_0 < \pi$, то есть, ось динамической симметрии тела стремится занять положение, совпадающее с направлением вектора кинетического момента или ему противоположное.

Перейдем в системе (2.4) к новым переменным H и λ:

$$W = H\cos\lambda, \qquad V = H(1+\chi)^{-1}\sin\lambda \tag{2.8}$$

В результате получим систему уравнений относительно переменных H, λ:

$$dH/d\tau = \varepsilon\{a_3\cos\lambda - H[(\beta + \delta H)\cos^2\lambda + (\alpha + \gamma H)\sin^2\lambda]\}$$

$$d\lambda/d\tau = -\varepsilon[a_3(H\cos\lambda)^{-1} + (\alpha - \beta) + (\gamma - \delta)H]\cos\lambda\sin\lambda \tag{2.9}$$

Пусть $a_3 \neq 0$, $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = \delta \neq 0$.

Система (2.9) редуцируется к дифференциальному уравнению 2-го порядка относительно переменной λ:

$$d^2\lambda/d\tau^2 - 2(d\lambda/d\tau)^2\operatorname{ctg}\lambda = -\varepsilon^2\delta a_3\sin\lambda \tag{2.10}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} P_1^{-1}(\lambda)d\lambda = \tau \tag{2.11}$$

$$P_1(\lambda) = (\sin\lambda/\sin\lambda_0)^2\{P_0^2 - \varepsilon^2\delta a_3\sin^4\lambda_0[\ln|\operatorname{tg}(\lambda/2)\operatorname{ctg}(\lambda_0/2)| -$$

$$-\cos\lambda/\sin^2\lambda + \cos\lambda_0/\sin^2\lambda_0]\}^{1/2}, \quad \lambda_0 = \lambda(0)$$

$$P_0 = (1+\chi)(d\vartheta/d\tau)[\cos^2\vartheta + (1+\chi)^2\sin^2\vartheta] \quad \text{при} \quad \tau = 0$$

Пусть $a_3 = 0$, $\alpha = \beta \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Система (2.9) приводится к уравнению

$$d^2\lambda/d\tau^2 + f(\lambda)(d\lambda/d\tau)^2 = -\varepsilon\alpha(d\lambda/d\tau) \tag{2.12}$$

$$f(\lambda) = \operatorname{tg}\lambda + 2\gamma/[(\delta - \gamma)\sin 2\lambda]$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} P_2^{-1}(\lambda)d\lambda = \tau \tag{2.13}$$

$$P_2(\lambda) = |\sin\lambda_0 / \sin\lambda|^{\gamma/(\delta-\gamma)} |\cos\lambda / \cos\lambda_0|^{\delta/(\delta-\gamma)} \times$$

$$\times\left[P_0 - \varepsilon\alpha \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} |\sin\lambda / \sin\lambda_0|^{\gamma/(\delta-\gamma)} |\cos\lambda_0 / \cos\lambda|^{\delta/(\delta-\gamma)}\, d\lambda\right]$$

где P_0 определяется как и в (2.11).

Возьмем для определенности $\delta = 2\gamma$. Тогда из (2.13) получаем:

$$\cos\lambda = \varepsilon\alpha\cos\lambda_0 \operatorname{ctg}\lambda_0 / \{P_0[1 - \exp(-\varepsilon\alpha\tau)] + \varepsilon\alpha \operatorname{ctg}\lambda_0\} \tag{2.14}$$

При $\tau \to +\infty \quad \cos\lambda \to \varepsilon\alpha\cos\lambda_0 \operatorname{ctg}\lambda_0 / (P_0 + \varepsilon\alpha \operatorname{ctg}\lambda_0)$ (2.15)

Учитывая, что λ и ϑ связаны соотношением $(1+\chi)\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}\lambda$ можно сделать вывод: при $P_0 \neq 0$ ось динамической симметрии тела стремится занять новое положение отличное от $\vartheta = 0, \pi/2, \pi$. Если $P_0 = 0$ (что возможно при $\vartheta_0 = 0, \pi/2, \pi$ или $\delta_1 = \gamma_1$ при любом $\vartheta \in [0, \pi]$), то тогда $\lambda = \lambda_0$, вместе с этим и $\vartheta = \vartheta_0$ во все время движения.

Еще рассмотрим случай $a_3 \neq 0$, $\alpha = \beta \neq 0$, $\delta = \gamma \neq 0$. Здесь система (2.9) сводится к уравнению

$$d^2\lambda / d\tau^2 = 2(d\lambda / d\tau)^2 \operatorname{ctg}\lambda + \varepsilon\alpha(d\lambda / d\tau) - \varepsilon^2 a_3 \delta \sin\lambda \tag{2.16}$$

Подстановка

$$Z = (d\lambda/d\tau)\sin^{-2}\lambda + \varepsilon\alpha \operatorname{ctg}\lambda \tag{2.17}$$

приводит уравнение (2.16) к

$$(Z - \varepsilon\alpha \operatorname{ctg}\lambda)(dZ/d\lambda) = -\varepsilon^2\delta a_3 \sin^{-3}\lambda \tag{2.18}$$

Уравнение (2.18) может быть проинтегрировано численными методами.

3. Рассмотрим движение быстро закрученного гироскопа вокруг неподвижной точки в случае, когда момент сопротивления в связанных с телом осях задается в виде [13]:

$$\mathbf{M} = -cF(|\mathbf{\Omega}|^2)\mathbf{\Omega} \tag{3.1}$$

где $c = \mathrm{const}$ $(c > 0)$, а скалярная функция $F = F(|\mathbf{\Omega}|^2)$ удовлетворяет условию:

$$F(|\mathbf{\Omega}|^2) > 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{\Omega}| \neq 0 \tag{3.2}$$

Предполагая, что $|\mathbf{M}|$ много меньше кинетической энергии вращательного движения тела и проводя осреднение соответствующих уравнений (1.1) по движению (2.1), получим следующую систему уравнений первого приближения в исходных ненормализованных переменных:

$$\begin{gathered} d\rho/dt = 0, \quad d\sigma/dt = 0 \\ dK/dt = -cF(|\mathbf{\Omega}|^2)K[\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta(1+\chi)^{-1}]\, I_1^{-1} \\ d\vartheta/dt = -cF(|\mathbf{\Omega}|^2)\sin\vartheta\cos\vartheta\chi(1+\chi)^{-1} I_1^{-1} \\ |\mathbf{\Omega}|^2 = K^2(I_1^{-2}\sin^2\vartheta + I_3^{-2}\cos^2\vartheta) \end{gathered} \tag{3.3}$$

Из (3.3) заключаем, что $K \to 0$ при $t \to \infty$, а $\vartheta \to 0$ (если $0 < \vartheta_0 < \pi/2$), $\vartheta \to \pi$ (если $\pi/2 < \vartheta_0 < \pi$) при $\chi > 0$, то есть, ось динамической симметрии тела стремится занять положение перпендикулярное к направлению вектора кинетического момента при

$I_3 < I_1$, слиться с ним или занять противоположное направление в случае $I_3 > I_1$. Система (3.3) допускает первый интеграл

$$K\,|\cos\vartheta\,\mathrm{tg}^{-1/\chi}\,\vartheta\,| = K_0\,|\cos\vartheta_0\,\mathrm{tg}^{-1/\chi}\,\vartheta_0\,| \tag{3.4}$$

Рассмотрим важный с практической точки зрения случай, когда

$$F(|\,\mathbf{\Omega}\,|^2) = |\,\mathbf{\Omega}\,|^{\nu} \tag{3.5}$$

При $\nu = 1/2$ выражение (3.1) соответствует режиму ламинарного обтекания сферического тела воздушным потоком, а при $\nu = 4/5$ турбулентному режиму [13].

Из (3.3), с учетом (3.5), получаем

$$dK/dt = -cK^{\nu+1}[\sin^2\vartheta(1+\chi)^2 + \cos^2\vartheta]^{\nu/2}(1+\chi\sin^2\vartheta)I_1^{-\nu}(1+\chi)^{-(\nu+1)}$$

$$d\vartheta/dt = -cK^{\nu}[\sin^2\vartheta(1+\chi)^2 + \cos^2\vartheta]^{\nu/2}\chi\sin\vartheta\cos\vartheta I_1^{-\nu}(1+\chi)^{-(\nu+1)} \tag{3.6}$$

Используя интеграл (3.4) из (3.6) получаем для переменной ϑ уравнение

$$d\vartheta/dt = -c_3\cos\vartheta\sin\vartheta[\sin^2\vartheta + (1+\chi)^{-2}\cos^2\vartheta]^{\nu/2}\,|\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,|^{\nu/\chi}|\cos\vartheta\,|^{-\nu} \tag{3.7}$$

$$c_3 = c\chi(1+\chi)^{-1}I_1^{-\nu}(K_0\,|\cos\vartheta_0\,|)^{\nu}\,|\,\mathrm{ctg}\,\vartheta_0\,|^{\nu/\chi}$$

Уравнение (3.7) приводится к соотношению:

$$\int\limits_{y_0}^{y} y^{-(1+\nu/\chi)}[y^2 + (1+\chi)^{-2}]^{-\nu/2}dy = -c_3(t-t_0), \quad \mathrm{tg}\,\vartheta = y \tag{3.8}$$

Здесь, для определенности, $0 < \vartheta < \pi/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 5–13.
2. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 3–10.
3. *Булгаков Б.В.* Прикладная теория гироскопов. М.: Гостехиздат, 1955. 355 с.
4. *Кудин С.Ф. Мартыненко Ю.Г.* Раскрутка неконтактного гироскопа в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 14–22.
5. *Куряков В.А.* О вращении вокруг неподвижной точки симметричного твердого тела в среде с квадратичным законом сопротивления // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 1. С. 123–126.
6. *Лещенко Д.Д.* О движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в слабо сопротивляющейся среде // Прикл. механика. 1975. Т. 11. № 3. С. 89–94.
7. *Медведев А.В.* О движении твердого тела с неподвижной точкой в сопротивляющейся среде // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 6. С. 117–120.
8. *Медведев А.В.* Движение быстро закрученного гироскопа под действием постоянного момента в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 21–24.
9. *Нейштадт А.И.* Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов. // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 30–36.
10. *Пивоваров М.Л.* О движении гироскопа с малым самовозбуждением // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 23–27.
11. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
12. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
13. *H. Schlichting.* Boundary Layer Theory. N.J.: Mc Graw-Hill, 1960. 647 p.

Тамбов

Поступила в редакцию
22.12.1998