

УДК 539.3

© 2001 г. И.А. БРИГАДНОВ

РАЗРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ИХ АППРОКСИМАЦИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассматриваются различные постановки краевой задачи нелинейной теории упругости для отображения: в форме вариационной проблемы глобальной минимизации и в форме вариационных уравнений – стационарного и эволюционного. Обсуждается взаимосвязь этих постановок, а также их физическая и математическая корректность. Постановка краевой задачи эластостатики в форме эволюционного вариационного уравнения позволяет математически исследовать процесс бифуркации равновесной деформированной конфигурации эластомера. Поэтому для нее формулируется общая теорема существования, допускающая ветвление решения.

Для высокоэластичных материалов с идеальным насыщением рассматриваемые вариационные проблемы нуждаются в расширении множества допустимых отображений с целью учета возможных разрывов. Например, соответствующие гиперупругие материалы описываются потенциалами линейного роста по модулю тензора дисторсии и для них характерно существование предельной нагрузки. Приводится наглядный пример существования отображений с разрывами типа проскальзывания для классического потенциала Бартенева–Хазановича.

С целью учета разрывных отображений используется частичная релаксация эволюционной вариационной задачи эластостатики, основанная на специальной пространственной конечно-элементной аппроксимации, допускающей поля с разрывами типа проскальзывания. В результате исходная континуальная проблема сводится к задаче Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений жесткого типа, для численного решения которой используется неявная схема Эйлера.

Приводятся результаты вычислительных экспериментов, показывающие качественное преимущество предлагаемого подхода по сравнению со стандартными методами, основанными на непрерывной пространственной конечно-элементной аппроксимации.

1. Постановка и математическая корректность краевой задачи эластостатики.

Пусть твердое тело в отсчетной (недеформированной) конфигурации занимает область $\Omega \subset R^3$. В актуальной (деформированной) конфигурации каждая точка $x = \{x_i\} \in \bar{\Omega}$ переходит в положение $u(x) = \{u^\alpha(x)\} \in R^3$. Здесь и далее используются материальные лагранжевые координаты, нижние латинские и верхние греческие индексы $i, \alpha = 1, 2, 3$ отвечают отсчетной и актуальной конфигурациям, соответственно. Рассматриваются обратимые и сохраняющие ориентацию отображения $u: \bar{\Omega} \rightarrow R^3$ с градиентом (тензором дисторсии) $Q(u) = \nabla u: \Omega \rightarrow M^3$ такие, что $\det(Q) > 0$ в Ω , где M^3 – пространство вещественных матриц 3×3 .

Конечная деформация твердого тела характеризуется энергетической парой (Q, Σ) , где $\Sigma = \{\Sigma_i^\alpha\}$ – первый (несимметричный) тензор номинальных напряжений Пию-

ла – Кирхгоффа [1–3]. Известно, что тензор истинных напряжений Коши $\sigma = \{\sigma^{\alpha\beta}\}$ имеет компоненты $\sigma^{\alpha\beta} = (\det(Q))^{-1} \Sigma_i^\alpha Q_i^\beta$. Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Упругий материал описывается функцией реакции $\Sigma = \Sigma(x, Q)$, для которой справедлива гипотеза натурального состояния $\Sigma(x, I) = O$, где I и O – единичная и нулевая матрицы, соответственно [1]. Гиперупругий материал описывается скалярной функцией запасенной энергии деформации – упругим потенциалом $W: \Omega \times M^3 \rightarrow [0, +\infty)$, который связан с функцией реакции простым соотношением $\Sigma_i^\alpha(x, Q) = \partial W(x, Q) / \partial Q_i^\alpha$ для любой $Q \in M^3$ и почти всех $x \in \Omega$. Для несжимаемых материалов $\det(Q) = 1$ и для сжимаемых $|\Sigma(x, Q)| \rightarrow \infty, W(x, Q) \rightarrow +\infty$, если $\det(Q) \rightarrow +0$ (т.е. для сжатия объема в точку необходимы бесконечное усилие и энергия) [1, 3]. Для однородного материала $\Sigma, W = \text{const}(x)$.

Рассматривается следующая краевая задача. К телу прикладываются внешние воздействия: в Ω – массовая сила с плотностью f , на части границы Γ^2 – поверхностная сила с плотностью F , а также задается отображение u_γ части границы Γ^1 , причем $\Gamma^1 \cup \Gamma^2 = \partial\Omega, \Gamma^1 \cap \Gamma^2 = \emptyset, \text{area}(\Gamma^1) > 0$. В исходном состоянии внешние силы равны нулю, граничное отображение – тождественное, тело находится в натуральном состоянии [1, 3].

В общем случае слабое решение краевой задачи эластостатики находится как решение следующего вариационного уравнения [1, 4]: для любого $u \in V$ искомое отображение $u^* \in V$ удовлетворяет принципу стационарности

$$\int_{\Omega} \Sigma_i^\alpha(x, Q(u^*)) Q_i^\alpha(u^* - u) dx = L(u^* - u) \quad (1.1)$$

$$L(u) = \int_{\Omega} f^\alpha v^\alpha dx + \int_{\Gamma^2} F^\alpha v^\alpha d\gamma$$

где $V = \{u: \bar{\Omega} \rightarrow R^3; u(x) = u_\gamma(x), x \in \Gamma^1\}$ – множество кинематически допустимых отображений.

Для гиперупругого материала под слабым решением краевой задачи эластостатики понимается отображение, сообщающее глобальный минимум полной энергии системы [3, 5]

$$u^* = \arg(\inf\{I(u): u \in V\}), \quad I(u) = \int_{\Omega} W(x, Q(u)) dx - A(u) \quad (1.2)$$

$$A(u) = \int_{\Omega} \langle f, u \rangle dx + \int_{\Gamma^2} \langle F, u \rangle d\gamma, \quad \langle g, u \rangle(x) = \int_x^{u(x)} g^\alpha(x, v) dv^\alpha$$

где $\langle *, u \rangle$ – удельная, а $A(u)$ – полная работа внешних сил на отображении u . Отметим, что даже для мертвых сил $f, F = \text{const}(u, \nabla u)$ [1, 3] удельная работа вычисляется по формуле $\langle g, u \rangle(x) = g^\alpha(x) u^\alpha(x)$ только в декартовых отсчетных координатах [9].

При эволюционном описании вводится безразмерный параметр внешнего нагружения $t \in [0, 1]$. Все величины рассматриваются как абстрактные функции, действующие из промежутка $[0, 1]$ в соответствующие банаховы пространства. Внешние воздействия полагаются абсолютно непрерывными по параметру нагружения, причем $\Gamma^1 = \text{const}(t)$ и $f = 0, F = 0, u = x$ при $t = 0$. Предполагается, что существует продолжение функции $u_\gamma(t)$ с Γ^1 в Ω , т.е. такая абстрактная функция $u^0(t)$, которая совпадает с $u_\gamma(t)$ на Γ^1 для любого $t \in [0, 1]$ и $u^0 \equiv x$ при $t = 0$.

Для гладкой функции реакции $Q \mapsto \Sigma(x, Q)$ слабое решение краевой задачи эластостатики ищется как решение следующего эволюционного вариационного уравнения [6]: искомое отображение представляется в виде $u^* = u(1) + u^0(1)$, где абстрактная

функция $u: [0, 1] \rightarrow V^0$ удовлетворяет нулевому начальному условию $u(0) = 0$ и дифференциальному уравнению для любой $v \in V^0$ и почти всех $t \in (0, 1)$:

$$\int_{\Omega} C_{ij}^{\alpha\beta}(x, Q(u+u^0)) Q_j^{\beta}(\dot{u}+\dot{u}^0) Q_i^{\alpha}(v) dx = \dot{L}(v) \quad (1.3)$$

$$\dot{L}(v) = \int_{\Omega} \dot{f}^{\alpha} v^{\alpha} dx + \int_{\Gamma^2} \dot{F}^{\alpha} v^{\alpha} d\gamma$$

Здесь $V^0 = \{v : \bar{\Omega} \rightarrow R^3; v(x) = 0, x \in \Gamma^1\}$ – множество кинематически допустимых вариаций отображения, $C_{ij}^{\alpha\beta}(x, Q) = \partial \Sigma_i^{\alpha}(x, Q) / \partial Q_j^{\beta}$ – компоненты акустического тензора (переменных касательных модулей упругости) [1, 3], точка сверху обозначает d/dt .

Замечание 1.1. Выбор банахова пространства, которому принадлежат множества V и V^0 , определяется условием роста функции реакции $\Sigma(x, Q)$, упругого потенциала $W(x, Q)$ или акустического тензора $C(x, Q)$ по модулю тензора дисторсии $|Q| = (Q_i^{\alpha} Q_i^{\alpha})^{1/2}$ [3, 7].

Постановка краевой задачи эластостатики в форме (1.1) является исходной [1, 3, 4]. Вопросы математической корректности вариационной проблемы (1.2) для мертвых сил и ее связь с проблемой (1.1) достаточно подробно исследованы в работах [3, 5]. Отображение, являющееся решением задачи (1.1), сообщает стационарное значение полной энергии системы $I(u)$. Физически всегда реализуется *устойчивая* деформированная конфигурация [1, 3]. Например, известное свойство неединственности равновесного состояния можно трактовать следующим образом. Отображение, сообщающее глобальный минимум полной энергии системы (если оно существует), является энергетически самым "выгодным", хотя может быть и неединственным. Отображения с большей энергией могут быть устойчивы по отношению к малым вариациям, однако неустойчивы к конечным возмущениям. Более того, при существовании локально устойчивых отображений полная энергия системы может не иметь глобального минимума, т.е. $\inf\{I(u); u \in V\} = -\infty$. Этот эффект известен под названием предельной нагрузки и достаточно подробно исследован в работах [8, 9].

В работе [6] доказано, что решение задачи (1.3) (если оно существует) при $t = 1$, т.е. в конце процесса нагружения, совпадает с одним из решений задачи (1.1). Поэтому решения задач (1.3) и (1.2) связаны между собой так же, как и решения задач (1.1) и (1.2).

Важнейшим преимуществом постановки краевой задачи эластостатики в форме эволюционного вариационного уравнения (1.3) является возможность математического исследования процесса бифуркации равновесной деформированной конфигурации. Поэтому проблема существования *ветвящегося* решения задачи (1.3) является весьма актуальной.

Относительно акустического тензора C , области Ω и внешних воздействий f, F, u_{γ} сделаем следующие предположения.

(Н1) Акустический тензор $C(x, Q)$ является каратеодориевым [7] и сильно эллиптическим по Лежандру – Адамару относительно тензора дисторсии, т.е. существует каратеодориевая положительная для любой ненулевой матрицы функция $m_0: \Omega \times M^{\mathbb{N}}\{0\} \rightarrow R_+$ такая, что для любых $Q \in M^3; a, b \in R^3$ и почти всех $x \in \Omega$ справедливо неравенство

$$C_{ij}^{\alpha\beta}(x, Q) a_i b_{\alpha} a_j b_{\beta} \geq m_0(x, Q) |a|^2 |b|^2$$

(Н2) Акустический тензор $C(x, Q)$ удовлетворяет условию степенного роста по модулю тензора дисторсии, т.е. существуют постоянные $c > 0, p > 1$ и функция

$a \in L^q(\Omega)$ с $q = p/(p-1)$ такие, что для любой $Q \in M^3$ и почти всех $x \in \Omega$ верна оценка

$$|C_{ij}^{\alpha\beta}(x, Q) Q_i^\alpha Q_j^\beta| \leq c |Q|^p + a(x)$$

(H3) Акустический тензор $C(x, Q)$ является липшиц-непрерывным по тензору дисторсии, т.е. существует положительная измеримая функция $M_0: \Omega \rightarrow R_+$ такая, что для любых $Q^1, Q^2 \in M^3$ и почти всех $x \in \Omega$ верна оценка

$$|C(x, Q^1) - C(x, Q^2)| \leq M_0(x) |Q^1 - Q^2|$$

(H4) Ω связная ограниченная область в R^3 с липшицевой границей.

(H5) $f \in C^{0,1}([0, 1], L^r(\Omega, R^3))$ с $r > 3p/(4p-3)$ для $1 < p < 3$ и $r \geq 1$ для $p \geq 3$.

(H6) $F \in C^{0,1}([0, 1], L^s(\Gamma^2, R^3))$ с $s \geq 2p/(3p-3)$ для $1 < p < 3$ и $s \geq 1$ для $p \geq 3$.

(H7) $u_\gamma \in C_s^{0,1}([0, 1], L^p(\Gamma^1, R^3))$

В силу гипотезы (H2) множество кинематически допустимых вариаций отображения определяется как подпространство рефлексивного соболевского пространства [3, 7]:

$$V^0 = \{v \in W^{1,p}(\Omega, R^3) : v(x) = 0, x \in \Gamma^1\}$$

Теорема 1.2. В предположениях (H1)–(H7) существует абстрактная функция $u: [0, 1] \rightarrow V^0$, удовлетворяющая начальному условию $u(0) = 0$ и уравнению (1.3) для почти всех $t \in (0, 1)$.

Доказательство сформулированной теоремы может опираться на теорию дифференциальных включений в банаховом пространстве [10], поскольку условие сильной эллиптичности по Лежандру – Адамару (H1) допускает ветвление, т.е. неединственность решения [5].

2. Пример отображений с разрывами типа проскальзывания. Для эластомеров с идеальным насыщением, которые характеризуются параметром $p = 1$ в условии (H2), вариационные задачи (1.1)–(1.3) являются математически некорректными. А именно, возможно либо отсутствие отображений, устойчивых к конечным вариациям, либо появление отображений с разрывами типа проскальзывания [6, 9, 8]. С математической точки зрения первый эффект связан с неограниченностью снизу функционала энергии $I(u)$ на множестве кинематически допустимых отображений V , второй эффект связан с нереклексивностью банахова пространства $W^{1,1}(\Omega, R^3)$ [7, 11], на котором задачи (1.1)–(1.3) рассматриваются в классической постановке [3, 5]. С физической точки зрения первый эффект связан с существованием предельной нагрузки, т.е. с ограниченностью множества силовых воздействий, которым способно сопротивляться данное тело. Физический смысл второго эффекта пока не выяснен [8, 9].

В действительности, искомое отображение в таких задачах принадлежит более широкому пространству функций, например, ограниченной вариации $BV(\Omega, R^3)$ [12, 13] или ограниченной деформации $BD(\Omega, R^3)$ [15]. Эти пространства наряду с непрерывными функциями содержат функции, имеющие разрывы первого рода типа проскальзывания как внутри области, так и на границе. Одним из способов корректного определения обобщенного решения таких вариационных проблем является построение расширенных (релаксированных) вариационных задач, явно описывающих разрывные решения [16]. С точки зрения численного анализа это дает возможность применять специальные вариационно-разностные методы, использующие разрывные аппроксимации [17]. Например, вариационные задачи глобальной минимизации с интегральным функционалом линейного роста достаточно подробно исследованы на примере задач о непараметрической минимальной поверхности [13, 14] и идеальной упругопластичности [15, 16, 18]. Проиллюстрируем общие рассуждения о существовании отображений с разрывами типа проскальзывания на простом примере.

Пример 2.1. Рассмотрим следующую краевую задачу. Пусть в абсолютно твердом теле имеется сквозное круглое отверстие радиуса b и длины $l \gg b$, в которое коаксиально вставлен абсолютно твердый стержень меньшего радиуса a . Свободное пространство отверстия заполнено деформируемым материалом, жестко прикрепленным по всей длине к стержню и внутренней поверхности отверстия. Задан жесткий поворот стержня вокруг оси на угол $\psi_0 \geq 0$.

Наполнитель является однородным, изотропным и описывается классическим потенциалом Баргенева – Хазановича [21]:

$$W(Q) = 2\mu(\lambda_1(Q) + \lambda_2(Q) + \lambda_3(Q) - 3), \quad \det(Q) = 1$$

где $\{\lambda_k(Q)\}$ – собственные числа симметричного тензора кратностей удлинений (левой меры искажения [1, 3]) $\sqrt{Q^T \cdot Q}$ (суть кратности главных удлинений [2, 21]). Легко видеть, что $0 \leq W(Q) \leq 2\sqrt{3\mu|Q|} - 6\mu$, т.е. потенциал имеет линейный рост.

В силу осевой симметрии задачи в рамках модели обобщенной плоской деформации [2] актуальная конфигурация наполнителя описывается следующим соотношением в отсчетных цилиндрических координатах (ρ, φ, z) :

$$u(\rho, \varphi, z) = x(\rho, \varphi + \psi(\rho), z), \quad \nabla u = Q(\psi) = \begin{vmatrix} 1 & \rho\psi' & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

В этом случае вариационная задача (1.2) принимает вид

$$\psi^* = \arg[\inf\{I(\psi) : \psi \in V\}] \quad (2.2)$$

$$I(\psi) = \int_a^b (4 + \rho^2\psi'^2)^{1/2} \rho d\rho,$$

$$V = \{\psi \in W^{1,1}(a, b) : \psi(a) = \psi_0, \psi(b) = 0\}$$

В силу выпуклости задачи как по функционалу, так и по множеству допустимых функций, локальная экстремаль (если она существует) совпадает с функцией, на которой полная энергия системы достигает глобальный минимум [11].

Из необходимого условия стационарности функционала $I(\psi)$ находим локальную экстремаль

$$\psi_*(\rho) = \arccos(D_\varphi a^2 / b^2) - \arccos(D_\varphi a^2 / \rho^2) \quad (2.3)$$

где постоянная D_φ определяется из краевого условия $\psi_*(a) = \psi_0$. Последнее разрешимо только для $\psi_0 \leq \psi_0^* = \arccos(a^2 / b^2)$. При $\psi_0 > \psi_0^*$ экстремаль не удовлетворяет краевым условиям. В этом случае вариационная задача (2.2) не имеет непрерывных решений, хотя функционал $I(\psi)$ очевидно ограничен снизу.

Оценим нижнюю грань функционала $I(\psi)$, используя аппарат выпуклого анализа и теории двойственности [11]. Для этого воспользуемся соотношением $\sup\{R \cdot S : |S| \leq 1\} = |R|$, которое справедливо для произвольных векторов $R, S \in R^n$. Обозначив через $R_1 = 2$ и $R_2 = \rho\psi'$, исходную минимизационную проблему (2.2) сформулируем как задачу поиска седловой точки в проблеме минимакса

$$(S^*, \psi^*) = \arg[\inf\{\sup\{L(S, \psi) : S \in V^*\} : \psi \in V\}] \quad (2.4)$$

$$L(S, \psi) = \int_a^b (2S_1 + \rho\psi'S_2) \rho d\rho$$

$$V^* = \{S \in W^{1,\infty}((a, b)R^2) : |S| \leq 1\}.$$

Из классического неравенства $\inf \sup L(S, \psi) \geq \sup \inf L(S, \psi)$ [11] следует оценка снизу для нижней грани функционала энергии

$$\inf\{I(\psi) : \psi \in V\} \geq \sup\{K(S) : S \in V^*\}$$

где двойственный функционал

$$K(S) = 2 \int_a^b S_1 \rho \, d\rho - a^2 \psi_0 S_2(a) - \sup \left\{ \int_a^b (\rho^2 S_2)' \psi \, d\rho : \psi \in V \right\}$$

является собственным (т.е. $K \neq -\infty$) [11], если двойственная функция $S_2^*(\rho) = Ca^2/\rho^2$ для $\rho \in [a, b]$ с неопределенной постоянной C . В результате получаем следующую оценку для нижней грани функционала энергии

$$\inf\{I(\psi) : \psi \in V\} \geq \sup\{K(S_1, C) : \rho^4 S_1^2 + a^4 C^2 - \rho^4 \leq 0, \rho \in [a, b]\}$$

$$K(S_1, C) = 2 \int_a^b S_1 \rho \, d\rho - a^2 C \psi_0$$

Функционал $K(S_1, C)$ является линейным по (S_1, C) на выпуклом ограниченном множестве. Поэтому, согласно классическим результатам выпуклого анализа [11], наибольшее значение функционал $K(S_1, C)$ достигает на границе допустимого множества, т.е. двойственная функция $S_1^*(\rho) = \rho^{-2}(\rho^4 - a^4 C^2)^{1/2}$ для $\rho \in [a, b]$, причем очевидно $|C| \leq 1$.

Нахождение наибольшего значения функционала $K(S_1, C)$ на допустимом множестве сводится к определению наибольшего значения функции

$$q(C) = K(S_1^*, C) = \sqrt{b^4 - a^4 C^2} - a^2 \sqrt{1 - C^2} + a^2 C (\arccos(Ca^2/b^2) - \arccos(C) - \psi_0)$$

на промежутке $[-1, 1]$.

Для $\psi_0 \leq \psi_0^*$ функция $q(C)$ достигает своего максимума при $C = D_\varphi \in (0, 1)$, где D_φ находится из краевого условия $\psi_*(a) = \psi_0$ по формуле

$$D_\varphi = \frac{\sin \psi_0}{\sqrt{\sin^2 \psi_0 + (\cos \psi_0 - \cos \psi_0^*)^2}}$$

В этом случае справедливо классическое равенство теории двойственности [11]:

$$\inf\{I(\psi) : \psi \in V\} = \sup\{K(S) : S \in V^*\} = \sqrt{b^4 - a^4 D_\varphi^2} - a^2 \sqrt{1 - D_\varphi^2}$$

Для $\psi_0 > \psi_0^*$ функция $q(C)$ достигает своего максимума при $C = 1$. В этом случае для нижней грани функционала энергии справедлива следующая оценка снизу

$$\inf\{I(\psi) : \psi \in V\} \geq \sqrt{b^4 - a^4} + a^2 \Delta \psi_0 \quad (2.5)$$

$$\Delta \psi_0 = \psi_0 - \psi_0^* > 0$$

Взяв последовательность допустимых функций, например, вида

$$\psi_m(\rho) = \psi_0^* - \arccos(a^2/\rho^2) + \Delta \psi_0 \left(\frac{b-\rho}{b-a} \right)^m \quad (2.6)$$

легко убедиться, что она минимизирует функционал энергии на V , поскольку $I(\psi_m)$

стремится к нижней грани (2.5) в силу следующей оценки сверху

$$I(\psi_m) \leq \sqrt{b^4 - a^4} + a^2 \Delta \psi_0 + R(m)$$

где $R(m) > 0$ и $R(m) \rightarrow +0$ при $m \rightarrow +\infty$.

Функционал $I(\psi)$ с точностью до замены переменных соответствует задаче о непараметрической минимальной поверхности. Известно, что решение этой задачи принадлежит пространству $BV(a, b)$ функций ограниченной вариации. Понятие обобщенного решения и обоснование его математической и физической корректности для задачи о непараметрической минимальной поверхности дано, например, в работах [13, 14]. Обобщенное решение задачи (2.2) совпадает с решением расширенной вариационной проблемы, известной как задача Де Джорджи [11]:

$$\hat{\psi}_* = \arg \left[\inf \left\{ \hat{I}(\psi) : \psi \in W^{1,1}(a, b) \right\} \right] \quad (2.7)$$

$$\hat{I}(\psi) = I(\psi) + a^2 |\psi(a) - \psi_0| + b^2 |\psi(b)|$$

Для $\psi_0 \leq \psi_0^*$ решение этой задачи является непрерывным и совпадает с классическим решением (2.3), тогда как для $\psi_0 > \psi_0^*$ оно является разрывным

$$\hat{\psi}_*(\rho) = \psi_0^* - \arccos(a^2 / \rho^2) \quad (2.8)$$

При этом для любого ψ_0 нижние грани исходного и релаксированного функционалов энергии совпадают.

Таким образом, для любого ψ_0 справедливо соотношение

$$\inf \{ I(\psi) : \psi \in V \} = \sup \{ K(S) : S \in V^* \} = \hat{I}(\hat{\psi}_*)$$

Легко видеть, что минимизирующая последовательность (2.6) сходится к разрывному решению (2.8) почти всюду на (a, b) . Последнее завершает обоснование математической корректности обобщенного разрывного решения.

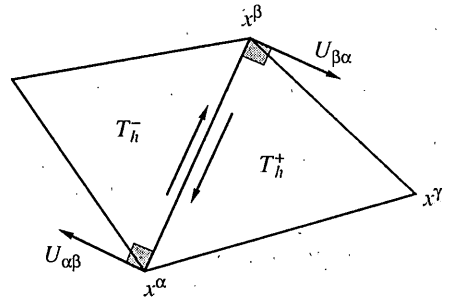
Появление разрывных отображений возможно во многих практических задачах нелинейной теории упругости, поскольку некоторые пористые резиноподобные материалы, работающие в жидкой среде, обладают свойством идеального насыщения [19, 20]. Например, для заглушки из материала Бартенева – Хазановича [21], закрывающей изнутри малое отверстие в баке с жидкостью, всегда существует уровень давления, выше которого заглушка начинает выдавливаться через отверстие наружу с ускорением, что естественно трактовать как утрату несущей способности [8]. При этом появляются поверхности, вдоль которых происходит необратимое проскальзывание одних частей заглушки относительно других.

3. Разрывная конечно-элементная аппроксимация эволюционной вариационной задачи эластостатики. Краевые задачи эластостатики для материалов с идеальным насыщением, т.е. для моделей с параметром $p = 1$ в условии степенного роста (H2), нуждаются в специальной релаксации, идея которой состоит в следующем [16, 17].

Пусть V является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|$ и $I : V \rightarrow R$ – коэрцивный на V функционал, т.е. $I(u) \rightarrow +\infty$ при $\|u\| \rightarrow \infty$. Рассматривается стандартная минимизационная проблема $\inf \{ I(u) : u \in V \}$. Решение этой проблемы может отсутствовать. Однако может существовать последовательность $\{u_k\} \subset V$ такая, что $u_k \rightarrow u_0$ почти всюду и $I(u_k) \rightarrow I_0 \in R$ при $k \rightarrow \infty$, где предельный элемент $u_0 \notin V$. В этом случае строится продолжение \hat{I} функционала I на более широкий класс функций $\hat{V} \supset V$, такой, что $\hat{I}(u_0) = I_0$ и $\hat{I}(u) = I(u)$ для любого $u \in V$.

Для вариационных проблем глобальной минимизации с интегральным функцио-

налом линейного роста соответствующее пространство \hat{V} совпадает с пространством BV функций ограниченной вариации или пространством BD функций ограниченной деформации, имеющих обобщенную производную как ограниченную меру Радона [13]. При численном решении по методу конечных элементов используется конечномерное подпространство исходного пространства [22]. Поэтому на практике применяется *частичная релаксация*, основанная на специальной разрывной конечно-элементной аппроксимации искомого поля [17, 19, 20].



Фиг. 1

Поскольку описанная релаксация достаточно подробно исследована для вариационных проблем глобальной минимизации с функционалом интегрального типа, эволюционное вариационное уравнение эластостатики (1.3) нуждается в следующей трансформации. Дело в том, что эволюционное описание процесса деформирования исключает динамические переходные процессы, поскольку внешние воздействия и отображение считаются статически уравновешенными для любого параметра нагружения $t \in [0, 1]$. Поэтому в силу линейности уравнения (1.3) относительно \dot{u} и гладкости функции реакции $Q \mapsto \Sigma(x, Q)$ скорость отображения, удовлетворяющая эволюционному вариационному уравнению (1.3), является решением следующей минимизационной вариационной проблемы для почти всех $t \in (0, 1)$:

$$\dot{u} = \arg\left(\inf\{J(v) : v \in V^0\}\right), \quad u(t) = \int_0^t \dot{u}(\tau) d\tau \quad (3.1)$$

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ij}^{\alpha\beta}(x, Q(u + u^0)) Q_j^{\beta}(v + \dot{u}^0) Q_i^{\alpha}(v + \dot{u}^0) dx - \dot{L}(v)$$

Для примера рассмотрим плоскую задачу. Пусть $\Omega \subset R^2$ и $\Omega_h = \cup T_h$, $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ такие, что $\text{area}(\Omega \setminus \Omega_h) \rightarrow 0$ и $\text{length}(\Gamma \setminus \Gamma_h) \rightarrow 0$ для $h \rightarrow +0$ регулярным образом, где T_h – треугольники, а h – характерный шаг аппроксимации [22]. Каждая конечно-элементная аппроксимация характеризуется множеством узлов $\{x^{\alpha}\}_{\alpha=1}^m$ и множеством внутренних ребер $G_h = \{r_{\alpha\beta} \equiv [x^{\alpha}, x^{\beta}]\}$, дополненным ребрами на границе Γ_h^1 .

Для отображения используется следующая кусочно-непрерывная аппроксимация (фиг. 1):

$$u_h(t, x) = U_{\alpha\beta}(t) \Phi_{\alpha\beta}(x) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m; r_{\alpha\beta} \in G_h)$$

где $U_{\alpha\beta} : [0, 1] \rightarrow R$ – компоненты отображения в узле x^{α} , ортогональные ребру $r_{\alpha\beta} \in G_h$; $\Phi_{\alpha\beta} : \Omega_h \rightarrow R$ – линейные на каждом треугольнике разрывные функции формы такие, что $\Phi_{\alpha\beta}(x^{\gamma}) = \delta_{\alpha\gamma}$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, m; r_{\alpha\beta} \in G_h$) и $\Phi_{\alpha\beta} \neq \Phi_{\beta\alpha}$. Носитель базисной функции $\Phi_{\alpha\beta}$ состоит из двух соседних треугольников, имеющих общее ребро $r_{\alpha\beta} \in G_h$. В этом случае подпространство $V^0 \subset W^{1,1}(\Omega, R^2)$ аппроксимируется подпространством

$$V_h^0 = \{U_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} : r_{\alpha\beta} \in G_h, U_{\alpha\beta} = 0 \text{ для } r_{\alpha\beta} \in \Gamma_h^1\} \subset BV(\Omega, R^2)$$

которое изоморфно R^{2M} , где M – число ребер в множестве $G_h \setminus \Gamma_h^1$.

Описанная конечно-элементная аппроксимация обладает следующими свойствами. Компоненты отображения, ортогональные соответствующему ребру, являются не-

прерывными, тогда как касательные проекции на это ребро могут иметь конечный разрыв первого рода. В результате имеем специальную конечно-элементную аппроксимацию, допускающую отображения с разрывами типа проскальзывания вдоль всех внутренних ребер сетки и вдоль ребер на границе Γ_h^1 .

В этом случае вместо задачи (3.1) рассматривается следующая релаксированная проблема [17, 19, 20]: для почти всех $t \in (0, 1)$:

$$\dot{u}_h = \arg\left(\min\{J_h(v) + R_h(v) : v \in V_h^0\}\right), \quad u_h(t) = \int_0^t \dot{u}_h(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

$$J_h(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} C_{ij}^{\alpha\beta} \left(Q(u_h + u_h^0) \right) Q_j^\beta(v + \dot{u}_h^0) Q_i^\alpha(v + \dot{u}_h^0) dx - \dot{L}_h(v)$$

$$\dot{L}_h(v) = \int_{\Omega_h} \dot{f}_h^\alpha v^\alpha dx + \int_{\Gamma_h^2} \dot{F}_h^\alpha v^\alpha d\gamma, \quad R_h(v) = c \sum_{r_{\alpha\beta} \in G_h} \int_{x^\alpha}^{x^\beta} |v_\tau^+ - v_\tau^-| d\gamma$$

где (u_h^0, f_h, F_h) – стандартные кусочно-линейные непрерывные конечно-элементные аппроксимации внешних воздействий, постоянная c из условия степенного роста акустического тензора (H2), v^+ и v^- – отображения на треугольниках T_h^+ и T_h^- , имеющих общее ребро $r_{\alpha\beta}$; индекс τ соответствует касательной проекции отображения на это ребро, причем на Γ_h^1 внешнее отображение отсутствует (т.е. $v_\tau^- \equiv 0$). Отметим, что задача Де Джорджи (2.7) является простейшим примером описанной частичной релаксации одномерной краевой задачи.

С вычислительной точки зрения задача (3.2) обладает сингулярной особенностью, поскольку штрафная функция R_h является негладкой. Поэтому, используя гладкую аппроксимацию модуля $|z| \approx (z^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$ с регуляризирующим параметром $\varepsilon \ll 1$ и результаты работы [17], на практике предлагается использовать штрафную функцию вида

$$R_h^\varepsilon(v) = \frac{c}{2} \sum_{r_{\alpha\beta} \in G_h} |r_{\alpha\beta}| \left(\sqrt{\Delta v_\tau^2(x^\alpha) + \varepsilon^2} + \sqrt{\Delta v_\tau^2(x^\beta) + \varepsilon^2} \right) \quad (3.3)$$

$$|r_{\alpha\beta}| = |x^\alpha - x^\beta|, \quad \Delta v_\tau(x) = v_\tau^+(x) - v_\tau^-(x)$$

Используя необходимое условие стационарности функционала $J_h(v)$, приходим к следующей задаче Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$A(U) \cdot \dot{U} = B, \quad t \in (0, 1), \quad U(0) = 0 \quad (3.4)$$

где $U \in R^{2M}$ – глобальный вектор свободных параметров аппроксимации в задаче (3.2), $B \in R^{2M}$ – глобальный вектор узловых скоростей внешних воздействий и A – глобальная матрица жесткости размерности $2M \times 2M$.

Хорошо известно, что для эластомеров с идеальным насыщением разрешающая система (3.4) может быть жесткой [6, 23]. После описанной частичной релаксации мы приходим к еще более сложной проблеме для малого параметра $\varepsilon \ll 1$ в (3.3). Основная причина жесткости системы (3.4) состоит в следующем: матрица A имеет строки с множителями существенного разного порядка (т.е. является плохо обусловленной), если отображение имеет большой градиент или разрывы типа проскальзывания.

Согласно стандартной методике [24, 25] для численного решения жесткой задачи

Коши (3.4) используется неявная схема Эйлера (здесь нет суммирования по k):

$$A(U^k + \tau V^k) \cdot V^k = B^k \quad (3.5)$$

$$U^{k+1} = U^k + \tau V^k, \quad U^0 = 0$$

где индекс k соответствует параметру $t_k = k\tau$ ($k = 0, 1, \dots, K-1$), $\tau = 1/K$ и $K \gg 1$ – число шагов по параметру нагружения.

Для численного решения последовательности нелинейных алгебраических систем (3.5) может быть использован любой метод, нечувствительный к числу обусловленности матрицы жесткости. Например, декомпозиционный метод адаптивной блочной релаксации [6, 26, 27].

4. Вычислительные эксперименты. Численно исследовалась краевая задача растяжения однородного круглого стержня на испытательной машине жесткого типа.

Осесимметричное растяжение круглого стержня описывается следующим соотношением в отсчетных цилиндрических координатах (ρ, φ, z) (для четверти осевого сечения):

$$u(a\rho, \varphi, lz) = x(a\rho + ar(\rho, z), \varphi, lz + lw(\rho, z))$$

$$Q = Q(r, w) = \begin{pmatrix} 1 + \partial r / \partial \rho & 0 & \eta^{-1} \partial w / \partial \rho \\ 0 & 1 + r / \rho & 0 \\ \eta \partial r / \partial z & 0 & 1 + \partial w / \partial z \end{pmatrix}$$

где $\rho \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 1]$, a и l – радиус сечения и полудлина стержня, соответственно; $\eta = a/l$.

В этом случае задача (3.1) принимает следующий вид: для почти всех $t \in (0, 1)$:

$$(\dot{r}, \dot{w}) = \arg(\inf\{J(R, W) : (R, W) \in V\}) \quad (4.1)$$

$$(r(t), w(t)) = \int_0^t (\dot{r}(\tau), \dot{w}(\tau)) d\tau + (r, 0)$$

$$J(R, W) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 \int_0^1 C_{ij}^{\alpha\beta}(Q(r, w)) Q_j^\beta(R, W) Q_i^\alpha(R, W) \rho \, d\rho \, dz + D_z W(0, 1)$$

$$V = \left\{ (R, W) \in (W^{1,1}((0, 1) \times (0, 1)))^2 : R(0, z) \equiv 0, \right.$$

$$\left. W(\rho, 0) \equiv 0, R(\rho, 1) \equiv 0, W(\rho, 1) \equiv W(0, 1) \right\}$$

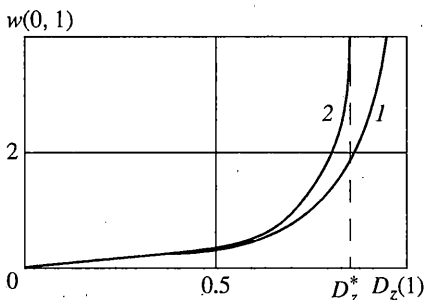
где $D_z(t) = P_z(t)/(2\mu\alpha^2)$, а $P_z(t)$ – переменная растягивающая сила.

Использовался обобщенный потенциал Трелоара [6, 9, 23] линейного роста ($p = 1$) с учетом сжимаемости [2]:

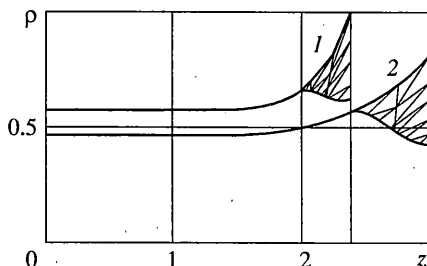
$$W(Q) = \sqrt{3}\mu(|Q| - |I|) + \frac{1}{2}k_0(\det(Q) + \det^{-1}(Q) - 2)$$

где $\mu > 0$ и $k_0 > 0$ – модули сдвига и объемного деформирования, соответственно.

В вычислительных экспериментах использовались следующие значения: $a = 10$, $l = 20$ (мм); $\mu = 10^2$, $k_0 = 10^5$ (МПа); регуляризирующий параметр $\varepsilon = 10^{-2}$ в (3.3). Единичный квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ разбивался на 200 одинаковых прямоугольных треугольников с 121 узлами и 320 ребрами посредством равномерной дискретизации 10×10 . Внешняя сила изменялась по линейному закону $D_z(t) = tD_z(1)$, использовалось $K = 100$ шагов по параметру нагружения в схеме (3.5). Все расчеты выполнялись



Фиг. 2



Фиг. 3

с одинарной точностью. Сравнивались стандартная непрерывная и предлагаемая разрывная аппроксимационные схемы дискретизации задачи (4.1).

В силу выпуклости расчетной области, а также из соображений симметрии задачи и непрерывности нормальных компонент искомого отображения следует, что разрыв первого рода типа проскальзывания возможен только за счет разрыва функции $r(\rho, z)$ при $z = 1$ (т.е. $r(\rho, 1) \neq 0$) [19, 20].

На фиг. 2 приведены экспериментальные зависимости $D_z(1) \mapsto w(0, 1)$ для непрерывного (кривая 1) и разрывного (кривая 2) решений. Легко видеть, что при $D_z(1) > 0.5$ непрерывное решение является более "жестким" по сравнению с разрывным. На фиг. 3 для $D_z(1) = 0.8$ показаны отображения в конце процесса нагружения. Непрерывное решение (r_h^1, w_h^1) имеет большой градиент в окрестности точки $(z = 1, \rho = 1)$, разрывное решение (r_h^2, w_h^2) имеет разрыв типа проскальзывания вдоль вертикальной линии при $z = 1$.

Для верификации полученных решений использовался энергетический метод. После частичной релаксации вариационной задачи (1.2) соответствующий функционал энергии имеет вид

$$\hat{I}(r, w) = \mu^{-1} \int_0^1 \int_0^1 W(Q(r, w)) \rho \, dp \, dz - D_z(1) w(0, 1) + \sqrt{3} \eta \int_0^1 |r(\rho, 1)| \rho \, dp.$$

Установлено, что на разрывном решении релаксированный функционал энергии принимает меньшее значение, т.е. $\hat{I}(r_h^2, w_h^2) < \hat{I}(r_h^1, w_h^1)$. Отметим, что при уменьшении параметра регуляризации ε штрафной функции (3.3) до значения 10^{-3} существенного уточнения разрывного решения не зафиксировано.

В рассматриваемой задаче существует предельная нагрузка¹. Аналитически доказано, что растягивающая сила ограничена сверху значением $D_z^* = \sqrt{3}/2$. При $D_z(1) \rightarrow D_z^*$ справедливо соотношение $w(0, 1) \rightarrow +\infty$, которому удовлетворяет именно разрывное решение (см. фиг. 2).

Полученные аналитические и численные результаты имеют практический интерес и нуждаются в натурном исследовании.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 00-15-99273-М) и Центра фундаментального естествознания при Санкт-Петербургском государственном университете по гранту 8-4.3-66.

¹ См. Бригаднов И.А. Математические методы исследования краевых задач теорий пластичности и нелинейной упругости. Диссертация на соискание ... доктора физ.-мат. наук. СПб: СПбГУ, 1997. 224 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. Черных К.Ф., Литвиненкова Э.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 256 с.
3. Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 472 с.
4. Зубов Л.М. Вариационные принципы нелинейной теории упругости // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 406–410.
5. Ball J.M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration Mech. Anal. 1977. V. 63. № 4. P. 337–403.
6. Brigadnov I.A. Numerical methods in non-linear elasticity // Numerical Methods in Engineering'96. Chichester: Wiley, 1996. P. 158–163.
7. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
8. Бригаднов И.А. О существовании предельной нагрузки в некоторых задачах гиперупругости // Изв. АН. МТТ. 1993. № 5. С. 46–51.
9. Бригаднов И.А. О математической корректности краевых задач эластостатики для гиперупругих материалов // Изв. АН. МТТ. 1996. № 6. С. 37–46.
10. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986. 295 с.
11. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
13. Джусту Э. Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации. М.: Мир, 1989. 240 с.
14. Giaquinta M. On the Dirichlet problem for surfaces of prescribed mean curvature // Manuscripta Math. 1974. V. 12. № 1. P. 73–86.
15. Темам Р. Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991. 288 с.
16. Серегин Г.А. О корректности вариационных проблем механики идеальнопластических сред // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 71–75.
17. Репин С.И. Вариационно-разностный метод решения задач с функционалами линейного роста // Ж. вычисл. математики и матем. физики. 1989. Т. 29. № 5. С. 693–708.
18. Репин С.И. О решениях задач математической теории пластичности, содержащих разрывы полей перемещений // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 142–152.
19. Brigadnov I.A. Discontinuous solutions and their finite element approximation in non-linear elasticity // Advanced Computational Methods in Engineering'98. Maastricht: Shaker Publishing B.V., 1998. P. 141–148.
20. Brigadnov I.A. The limited static load in finite elasticity // Constitutive Models for Rubber. Rotterdam: A.A. Balkema, 1999. P. 37–43.
21. Бартенев Г.М., Хазанович Т.Н. О законе высокоэластических деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. 1960. Т. 2. № 1. С. 20–28.
22. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
23. Бригаднов И.А. О численном решении краевых задач упругопластического течения // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 157–162.
24. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Чернолуцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
25. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving ordinary differential equations. Pt. 2. Stiff differential-algebraic problems. Berlin etc.: Springer, 1991. 601 p.
26. Бригаднов И.А. Численное решение краевой задачи гиперупругости в приращениях // Изв. АН. МТТ. 1994. № 6. С. 42–50.
27. Бригаднов И.А. Математическая корректность и численные методы решения начально-краевых задач пластичности // Изв. АН. МТТ. 1996. № 4. С. 62–74.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
12.03.1998