МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2001

УДК 539.3

© 2001 г. А.И. АЛЕКСАНДРОВИЧ, П.А. КУВШИНОВ, Д.Ф. ТИТОРЕНКО

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГОЛОМОРФНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПО СТЕПЕННЫМ ФУНКЦИЯМ И ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ

Впервые методы одномерного комплексного анализа к исследованию плоских задач теории упругости были предложены в работе [1]. В дальнейшем они развивались в многочисленных работах, например, [2, 3]. Методы многомерного комплексного анализа для решения трехмерных задач теории упругости были предложены в работах [4, 5], и, в дальнейшем, развивались в [6–8]. Возможность применения теории функции двух комплексных переменных к исследованию пространственных задач основывается на рассмотрении трехмерных тел, как сечений четырехмерных тел гиперплоскостью $x_4 = 0$, что позволяет ввести двумерную комплексную структуру в пространстве четырех действительных переменных и искать решение уравнений в виде голоморфных разложений, получая систему зацепляющихся дифференциальных уравнений. Получаемая система уравнений имеет общее решение, выражаемое через конечное число голоморфных функций двух комплексных переменных, которые могут быть найдены после подстановки краевых условий.

1. Постановка задачи и комплексификация исходных уравнений. Уравнение Ламе трехмерной теории упругости имеют вид

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\Delta u_i=0 \quad (i=1,2,3), \quad (x_1,x_2,x_3)\in V \tag{1.1}$$

$$\theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Рассматривая V как сечение четырехмерной области Ω гиперплоскостью $x_4 = 0$ в четырехмерном евклидовом пространстве с координатами x_1, x_2, x_3, x_4, запишем уравнения Ламе в четырехмерной области Ω в виде:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\Delta u_i=0 \quad (i=1-4), \quad (x_1,x_2,x_3,x_4)\in\Omega \tag{1.2}$$

$$\theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_4}{\partial x_4}, \quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

Относительно области Ω соответствующей трехмерному упругому телу V будем предполагать, что любое сечение Ω гиперплоскостями $x_4 = \mathrm{const}$ проецируется в $V'\subset V=\Omega|_{x_4=0}$.

Теперь имеется возможность ввести комплексную структуру в построенной области четырехмерного пространства и пространства перемещений u_1, u_2, u_3, u_4:

$$z_1 = x_1 + ix_2, \quad z_2 = x_3 + ix_4 \tag{1.3}$$

$$W_1 = u_1 + iu_2, \quad W_2 = u_3 + iu_4 \tag{1.4}$$

С помощью операторов дифференцирования Коши

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3} - i\frac{\partial}{\partial x_4}\right) \tag{1.5}$$

уравнения Ламе в четырехмерной области Ω запишутся в следующей форме:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}_i} + 2\mu\frac{\partial^2 W_i}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + 2\mu\frac{\partial^2 W_i}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (z_1, z_2) \in \Omega \tag{1.6}$$

Рассмотрим частный случай решений уравнений (1.6), вводя дополнительное условие независимости искомых функций u_1, u_2, u_3, u_4 и, как следствие, комплекснозначных функций W_1, W_2 от x_4:

$$\partial W_i / \partial z_2 - \partial W_i / \partial \bar{z}_2 = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{1.7}$$

Добавление условия (1.7) к уравнениям (1.6) расщепляет уравнения (1.6) или соответствующие им уравнения (1.2) на три уравнения Ламе (1.1) и уравнение Лапласа для искомой функции u_4:

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_3^2} = 0 \tag{1.8}$$

Таким образом, получив решение уравнений (1.6), (1.7), получим решение исходной системы уравнений Ламе и дополнительное решение для уравнений Лапласа (1.8). Разумеется, введение дополнительных условий (1.7) накладывает некоторые ограничения, при формулировке краевых условий на $\partial\Omega$, которые, естественно, должны быть согласованы с краевыми условиями для трехмерной задачи теории упругости в области V. Поскольку дальнейшее исследование будет связано с изучением общего решения уравнений (1.6), (1.7), то конкретизация краевых условий, обеспечивающая выделение одного решения из многообразия всех решений уравнения (1.6), (1.7) в данной работе рассматриваться не будет.

2. Получение общего решения уравнений голоморфным разложением искомых функций по степенным функциям. Будем искать решение комплексифицированных уравнений теории упругости в классе функций, представимых степенными рядами с коэффициентами в виде некоторых голоморфных и антиголоморфных функций. Эти функции требуется найти исходя из дифференциальных уравнений и граничных условий. Рассматриваемый класс функций достаточно широк и включает в себя, в частности, множество всех комплекснозначных полиномов четырех переменных x_1, x_2, x_3, x_4:

$$W_1 = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}(f1_{i_1,i_2}(z_1, z_2)\bar{z}_1^{i_1}\bar{z}_2^{i_2} + \overline{g1_{i_1,i_2}(z_1, z_2)}z_1^{i_1}z_2^{i_2}) \tag{2.1}$$

$$W_2 = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}(f2_{i_1,i_2}(z_1, z_2)\bar{z}_1^{i_1}\bar{z}_2^{i_2} + \overline{g2_{i_1,i_2}(z_1, z_2)}z_1^{i_1}z_2^{i_2}) \tag{2.2}$$

где W_1, W_2 – искомые комплексные перемещения.

Видно, что, применив операторы Коши к рядам (2.1) и (2.2) и подставляя полученные ряды в комплексифицированные уравнения теории упругости (1.6), (1.7), получим систему зацепляющихся уравнений, которая после преобразования получает вид рекуррентных соотношений:

$$f2^*_{i_1+1,i_2} = -\frac{1}{(A+B)(i_1+1)}\left[Af1_{i_1,i_2} + (2A+B)I_{z_1}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}f2^*_{i_1,i_2}\right] \tag{2.3}$$

$$f1_{i_1+1,i_2} = -\frac{(A+B)}{(2A+B)(i_1+1)}I_{z_1}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\left[-\frac{A}{A+B}(i_1+1)f2^*_{i_1+1,i_2} - f1_{i_1,i_2}\right] \tag{2.4}$$

$$f1_{i_1,i_2+1}(z_1,z_2) = \frac{1}{(i_2+1)}\frac{\partial}{\partial z_2}f1_{i_1,i_2}(z_1,z_2) \tag{2.5}$$

$$f2^*_{i_1,i_2+1}(z_1,z_2) = \frac{1}{(i_2+1)}\frac{\partial}{\partial z_2}f2^*_{i_1,i_2}(z_1,z_2) \tag{2.6}$$

где A и B – константы, выражающиеся через упругие модули Ламе по формулам

$$A = 2(\lambda+\mu), \quad B = 4\mu \tag{2.7}$$

Функции $g1_{i_1,i_2}, g2_{i_1,i_2}, f2_{i_1,i_2}$, входящие в формулы (2.1), (2.2), определяются через функции $f2^*_{i_1,i_2}$, были заменены следующим образом:

$$f2_{i_1,i_2} = g2_{i_1,i_2} = \frac{\partial}{\partial z_2}f2^*_{i_1,i_2}, \quad g1_{i_1,i_2} = \frac{\partial}{\partial z_1}g1^*_{i_1,i_2}, \quad g1^*_{i_1,i_2} = f2^*_{i_1,i_2} \tag{2.8}$$

$$I_{z_1}\varphi = \int_0^{z_1}\varphi dz_1 \tag{2.9}$$

где $I_{z_1}\varphi$ – оператор интегрирования по переменной z_1, обратный к оператору дифференцирования Коши (1.5).

Будем также предполагать, что точка $z_1 = 0$ принадлежит области определения голоморфных функций при всех значениях z_2.

Видно, что построенные рекуррентные соотношения позволяют получить любую голоморфную функцию $f1_{i_1,i_2}(z_1,z_2)$ и $f2^*_{i_1,i_2}(z_1,z_2)$, а следовательно, и все коэффициенты представлений (2.1), (2.2), если известны две голоморфные функции $f1_{0,0}(z_1,z_2)$ и $f2^*_{0,0}(z_1,z_2)$, которые должны определяться граничными условиями трехмерной задачи теории упругости.

3. Исследование частного решения, соответствующего голоморфным функциям с особенностью. Если функции $f1_{0,0}(z_1,z_2)$ и $f2^*_{0,0}(z_1,z_2)$ являются полиномами переменных z_1, z_2, то ряды (2.1), (2.2) становятся конечными суммами, т.е. такие голоморфные функции порождают полиномиальные решения теории упругости.

Этот результат согласуется с ранними работами [4–7] по применению многомерного комплексного анализа в теории упругости. В данной работе рассмотрим случай, когда порождающие голоморфные функции имеют особенность. Пусть, например, $f1_{0,0} = (z_2 - z_0)^{-\alpha}$, и $f2^*_{0,0} \equiv 0$, где z_0 – некоторое действительное число, меньшее нуля, α – натуральное число.

При таких начальных функциях все остальные голоморфные функции будут иметь вид

$$f1_{i_1,i_2} = C1_{i_1,i_2}z_1^{i_1}(z_2 - z_0)^{-\alpha-2i_1-i_2} \tag{3.1}$$

$$f2^*_{i_1,i_2} = C2_{i_1,i_2}z_1^{i_1-1}(z_2 - z_0)^{-\alpha-2i_1-i_2+2} \tag{3.2}$$

где $C1_{i_1,i_2}, C2_{i_1,i_2}$ – набор коэффициентов, независящих от z_1, z_2.

Подставляя выражения (3.1) и (3.2) в рекуррентные соотношения (2.3) – (2.6), получим

$$C1_{0,0}=1,\quad C2_{0,0}=0,\quad C1_{1,0}=-\frac{A}{A+B} \tag{3.3}$$

$$C1_{i_1,i_2}=\frac{(-1)^{i_1+i_2}}{(i_1!)^2 i_2!}\frac{B-(i_1-1)A}{A+B}\prod_{k=0}^{2i_1+i_2-1}(\alpha+k)\quad (2i_1+i_2\geqslant 1) \tag{3.4}$$

$$C2_{i_1,i_2}=\frac{(-1)^{i_1+i_2}i_1^2}{(i_1!)^2 i_2!}\frac{A}{A+B}\prod_{k=0}^{2i_1+i_2-3}(\alpha+k)\quad (2i_1+i_2\geqslant 3) \tag{3.5}$$

Полученное решение имеет вид формальных рядов

$$W_1=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}W1_{i_1,i_2}(z_1,z_2) \tag{3.6}$$

$$W_2=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}W2_{i_1,i_2}(z_1,z_2) \tag{3.7}$$

Члены рядов (3.6), (3.7) при $z_2=\bar{z}_2=z$ (т.е. при $x_4=0$) имеют вид

$$W1_{i_1,i_2}(z_1,z_2)=C1_{i_1,i_2}z_1^{i_1}\bar{z}_1^{i_1}(z-z_0)^{-\alpha-2i_1-i_2}z^{i_2}+$$
$$+C2_{i_1,i_2}(i_1-1)z_1^{i_1}\bar{z}_1^{i_1-2}(z-z_0)^{-\alpha-2i_1-i_2+2}z^{i_2} \tag{3.8}$$

$$W2_{i_1,i_2}(z_1,z_2)=C2_{i_1,i_2}(-\alpha-2i_1-i_2+2)z^{i_2}(z-z_0)^{-\alpha-2i_1-i_2+1}\left\lfloor z_1^{i_1-1}\bar{z}_1^{i_1}+z_1^{i_1}\bar{z}_1^{i_1-1}\right\rfloor \tag{3.9}$$

Для оценки сходимости этих рядов выразим $C1_{i_1,i_2}$ через $C2_{i_1,i_2}$ при $i_1>1$, $i_2>1$:

$$C1_{i_1,i_2}=C2_{i_1,i_2}(\alpha+2i_1+i_2-2)(\alpha+2i_1+i_2-1)\frac{B-(i_1-1)A}{Ai_1^2} \tag{3.10}$$

Тогда

$$W1_{i_1,i_2}(z_1,z_2)=C2_{i_1,i_2}\left[(\alpha+2i_1+i_2-2)(\alpha+2i_1+i_2-1)\frac{B-(i_1-1)A}{Ai_1^2}(z-z_0)^{-\alpha}+\right.$$
$$\left.+(i_1-1)\bar{z}_1^{-2}(z-z_0)^{-\alpha+2}\right]z^{i_2}z_1^{i_1}\bar{z}_1^{i_1}(z-z_0)^{-2i_1-i_2} \tag{3.11}$$

$$W2_{i_1,i_2}(z_1,z_2)=C2_{i_1,i_2}(-\alpha-2i_1-i_2+2)(z-z_0)^{-\alpha-2i_1-i_2+1}z^{i_2}z_1^{i_1}\bar{z}_1^{i_1}\left\lfloor z_1^{-1}+\bar{z}_1^{-1}\right\rfloor \tag{3.12}$$

Заметим, что

$$\frac{C2_{i_1+1,i_2}}{C2_{i_1,i_2}}=-\frac{(\alpha+2i_1+i_2-2)(\alpha+2i_1+i_2-1)}{i_1^2}\to -4 \tag{3.13}$$

при $i_1\to\infty$, $i_2=\mathrm{const}$

$$\frac{C2_{i_1,i_2+1}}{C2_{i_1,i_2}}=-\frac{(\alpha+2i_1+i_2-2)}{i_2+1}\to -1 \tag{3.14}$$

при $i_1=\mathrm{const}$, $i_2\to\infty$.

Рассмотрим сходимость ряда для $W1_{i_1,i_2}$ по i_1 при произвольном постоянном i_2:

$$\frac{W1_{i_1+1,i_2}}{W1_{i_1,i_2}}=\frac{C2_{i_1+1,i_2}}{C2_{i_1,i_2}}\frac{i_1^2}{(i_1+1)^2}\frac{V1_{i_1,i_2}}{N_{i_1,i_2}}z_1\bar{z}_1(z-z_0)^{-2} \tag{3.15}$$

$$V1_{i_1,i_2} = (\alpha+2i_1+i_2)(\alpha+2i_1+i_2+1)(B-i_1A)(z-z_0)^{-\alpha}+i_1\bar{z}_1^{-2}(z-z_0)^{-\alpha+2}A(i_1+1)^2 \quad (3.16)$$

$$N_{i_1,i_2} = (\alpha+2i_1+i_2-2)(\alpha+2i_1+i_2-1)(B-(i_1-1)A)(z-z_0)^{-\alpha}+$$
$$+(i_1-1)\bar{z}_1^{-2}(z-z_0)^{-\alpha+2}Ai_1^2 \quad (3.17)$$

Очевидно, что

$$\frac{V1_{i_1,i_2}}{N_{i_1,i_2}}\frac{i_1^2}{(i_1+1)^2}\to 1 \quad \text{при} \quad i_1\to\infty, \quad i_2=\text{const}$$

Следовательно

$$\lim_{i_1\to\infty;\, i_2=\text{const}} \frac{W1_{i_1+1,i_2}}{W1_{i_1,i_2}} = -4\frac{r^2}{(z-z_0)^2} \qquad r=|z_1| \quad (3.18)$$

и ряд для $W1_{i_1,i_2}$ абсолютно сходится в конусе $(z-z_0)>2r$ при любом фиксированном i_2.

Рассмотрим сходимость этого ряда по i_2 при любом фиксированном i_1:

$$\frac{W1_{i_1,i_2+1}}{W1_{i_1,i_2}} = \frac{C2_{i_1,i_2+1}}{C2_{i_1,i_2}}\frac{V2_{i_1,i_2}}{N_{i_1,i_2}}\frac{z}{(z-z_0)} \quad (3.19)$$

$$V2_{i_1,i_2} = (\alpha+2i_1+i_2-1)(\alpha+2i_1+i_2)(B-(i_1-1)A)(z-z_0)^{-\alpha}+$$
$$+(i_1-1)\bar{z}_1^{-2}(z-z_0)^{-\alpha+2}Ai_1^2 \quad (3.20)$$

Очевидно, что

$$\frac{V2_{i_1,i_2}}{N_{i_1,i_2}}\to 1 \quad \text{при} \quad i_2\to\infty, \quad i_1=\text{const} \quad (3.21)$$

Следовательно

$$\lim_{i_2\to\infty;\, i_1=\text{const}} \frac{W1_{i_1,i_2+1}}{W1_{i_1,i_2}} = \frac{z}{z-z_0}<1 \quad \text{при любом} \quad z>z_0 \quad (3.22)$$

Следовательно, ряд для $W1$ абсолютно сходится по i_2 при любом фиксированном i_1. Это означает, что двойной ряд для $W1$ мажорируется абсолютно сходящимся числовым рядом в любой точке конуса $(z-z_0)>2r$, и, следовательно, является абсолютно сходящимся в этом конусе.

Рассмотрим сходимость ряда для $W2_{i_1,i_2}$ по i_1 при произвольном постоянном i_2:

$$\frac{W2_{i_1+1,i_2}}{W2_{i_1,i_2}} = \frac{C2_{i_1+1,i_2}}{C2_{i_1,i_2}}\frac{(-\alpha-2i_1-i_2)}{(-\alpha-2i_1-i_2+2)}z_1\bar{z}_1(z-z_0)^{-2} \quad (3.23)$$

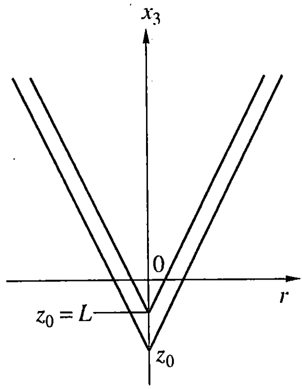
Следовательно

$$\lim_{i_1\to\infty;\, i_2=\text{const}} \frac{W2_{i_1+1,i_2}}{W2_{i_1,i_2}} = -4\frac{r^2}{(z-z_0)^2}, \qquad r=|z_1| \quad (3.24)$$

и ряд для $W2_{i_1,i_2}$ абсолютно сходится в конусе $(z-z_0)>2r$ при любом фиксированном i_2.

Рассмотрим сходимость этого ряда по i_2 при любом фиксированном i_1:

$$\frac{W2_{i_1,i_2+1}}{W2_{i_1,i_2}} = \frac{C2_{i_1,i_2+1}}{C2_{i_1,i_2}}\frac{(-\alpha-2i_1-i_2+1)}{(-\alpha-2i_1-i_2+2)}\frac{z}{(z-z_0)} \quad (3.25)$$



Фиг. 1

Следовательно

$$\lim_{i_2 \to \infty;\, i_1 = \text{const}} \frac{W2_{i_1, i_2+1}}{W2_{i_1, i_2}} = \frac{z}{z - z_0} < 1 \text{ при любом } z > z_0 \tag{3.26}$$

Следовательно, ряд для $W2$ абсолютно сходится по i_2 при любом фиксированном i_1. Это означает, что двойной ряд для $W2$ мажорируется абсолютно сходящимся числовым рядом в любой точке конуса $(z - z_0) > 2r$, и, следовательно, является абсолютно сходящимся в этом конусе.

4. Восстановление граничных условий на конусе, соответствующих рассмотренному частному решению. Рассмотрим случай, когда $f1_{0,0}(z_1, z_2) = (z_2 - z_0)^{-\alpha}$, $f2^*_{0,0}(z_1, z_2) \equiv 0$, где $\alpha = 3$, $z_0 = -0.1$.

По формулам (3.1) – (3.5) находим $f1_{i_1,i_2}(z_1, z_2)$ и $f2^*_{i_1,i_2}(z_1, z_2)$, где $i_1 = 0, 1, \ldots, 20$; $i_2 = 0, 1, \ldots, 20$, так как при увеличении количества членов рядов W_1 и W_2 в два раза результаты в расчетных точках изменились на 0.1%.

По формулам (3.6) – (3.9) получаем значения W_1 и W_2. Искомые компоненты вектора перемещений u_i $(i = 1, 2, 3)$ вычисляются по формулам (1.4).

Вычислим вектор перемещений на поверхности конуса $((x_3 - L) - z_0)/2 = r$, где r – расстояние точек поверхности конуса до оси x_3, а ось конуса совпадает с осью x_3, лежащего в области абсолютной сходимости полученных рядов. На фиг. 1 показаны сечения: конуса сходимости с вершиной в точке z_0, и расчетного конуса, лежащего внутри области сходимости, с вершиной в точке $z_0 - L$; $L = 0.01$ – расстояние от точки z_0 до начала рассчитываемой области по оси x_3, $z \in [-0.09, -0.03]$.

В качестве рассчитываемых точек была выбрана следующая сетка с шагом: по углу – $\pi/10$, по оси x_3 – 0.003.

При вычислении принимались модули Юнга $E = 1$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

На фиг. 2 изображены линии уровня проекций вектора перемещения на единичные векторы: a – нормаль к поверхности конуса в данной точке, b – вектор вдоль образующей конуса, c – ортогональный им вектор. Для определения в расчетных точках векторов напряжения использовались комплексифицированные соотношения Коши

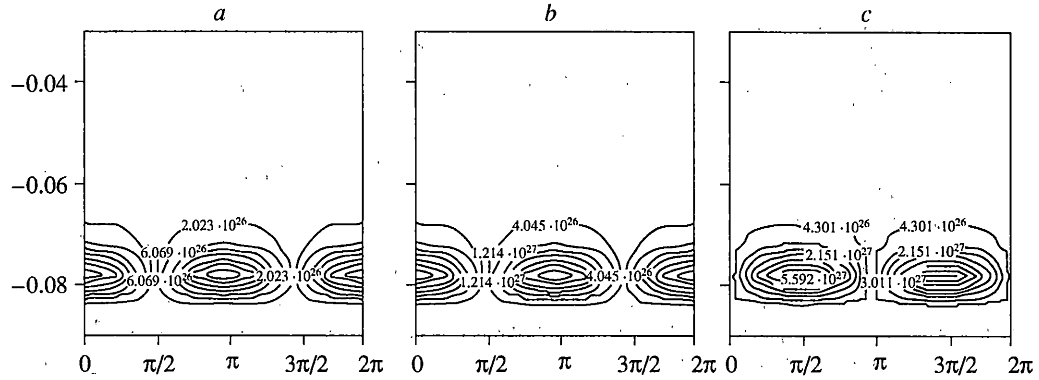
$$\varepsilon_{1,1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \overline{W}_1}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial \overline{W}_1}{\partial z_1} + \frac{\partial W_1}{\partial \bar{z}_1}\right)$$

$$\varepsilon_{2,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \overline{W}_1}{\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial \overline{W}_1}{\partial z_1} - \frac{\partial W_1}{\partial \bar{z}_1}\right)$$

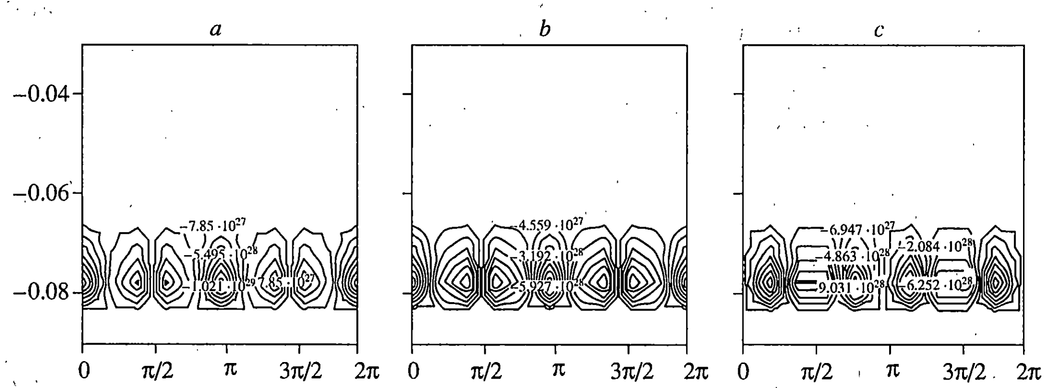
$$\varepsilon_{3,3} = \frac{\partial W_2}{\partial z_2} + \frac{\partial \overline{W}_2}{\partial \bar{z}_2}, \qquad \varepsilon_{2,1} = \varepsilon_{1,2} = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial \overline{W}_1}{\partial z_1} + \frac{\partial W_1}{\partial \bar{z}_1}\right) \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_{3,1} = \varepsilon_{1,3} = \frac{1}{4}\left(2\left(\frac{\partial \overline{W}_1}{\partial \bar{z}_2} + \frac{\partial W_1}{\partial z_2}\right) + \frac{\partial W_2}{\partial z_1} + \frac{\partial \overline{W}_2}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial \overline{W}_2}{\partial z_1} + \frac{\partial W_2}{\partial \bar{z}_1}\right).$$

$$\varepsilon_{3,2} = \varepsilon_{2,3} = \frac{i}{4}\left(2\left(\frac{\partial \overline{W}_1}{\partial \bar{z}_2} - \frac{\partial W_1}{\partial z_2}\right) + \frac{\partial W_2}{\partial z_1} - \frac{\partial \overline{W}_2}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial \overline{W}_2}{\partial z_1} - \frac{\partial W_2}{\partial \bar{z}_1}\right)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Подставляя тензор деформаций в закон Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{4.2}$$

получаем значения тензора перемещений.

Вектор напряжений в декартовой системе координат находим по формуле

$$P_i = \sigma_{ij} n_j \tag{4.3}$$

где n_j – компоненты вектора нормали к поверхности конуса.

На фиг. 3 изображены линии уровня проекций вектора напряжений на те же направления в точках боковой поверхности конуса.

5. Получение общего решения уравнений голоморфным разложением искомых функций по функциям Бесселя. Рассмотрим теперь другой способ получения не полиномиальных решений, основанный на замене степенных функций в голоморфном разложении искомых комплексных перемещений на другую систему голоморфных функций, обладающих тем же свойством инвариантности линейного пространства, натянутого на эти функции относительно операторов дифференцирования Коши.

Будем искать решение комплексифицированных уравнений теории упругости в классе голоморфных разложений по бесселевым функциям с коэффициентами в виде некоторых голоморфных функций. Эти функции требуется найти исходя из дифференциальных уравнений и граничных условий.

$$W_1 = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\left[f1_{i_1,i_2}(z_1,z_2)\overline{J_{i_1}(z_1)J_{i_2}(z_2)} + \overline{g1_{i_1,i_2}(z_1,z_2)}J_{i_1}(z_1)J_{i_2}(z_2)\right] \tag{5.1}$$

$$W_2 = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\left[f2_{i_1,i_2}(z_1,z_2)\overline{J_{i_1}(z_1)J_{i_2}(z_2)} + \overline{g2_{i_1,i_2}(z_1,z_2)}J_{i_1}(z_1)J_{i_2}(z_2)\right] \tag{5.2}$$

В этих формулах (и далее) предполагается, что функции с хотя бы одним отрицательным индексом тождественно равны нулю и $\delta_{i,j}$ – символ (дельта) Кронекера.

Подставляя результат применения операторов Коши в комплексифицированные уравнения теории упругости (1.6), (1.7) и приравнивая коэффициенты при всевозможных произведениях функций Бесселя всех порядков нулю, получим систему зацепляющихся дифференциальных уравнений относительно голоморфных функций. Аналогично п. 2 эту систему запишем в форме рекуррентных соотношений

$$f2^*_{i_1+1,i_2} = f2^*_{i_1-1,i_2} - \frac{2A}{A+B}f1_{i_1,i_2} - \frac{2(2A+B)}{A+B}I_{z_1}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}f2^*_{i_1,i_2} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} f1_{i_1+1,i_2} = \frac{2(A+B)}{B(2A+B)}\Bigg[&\frac{A+B}{2}(1+\delta_{1,i_1})f1_{i_1-1,i_2} - BI_{z_1}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}f1_{i_1,i_2} - \\ &-\frac{A}{4}(1+\delta_{1,i_1}+\delta_{1,i_1+1})f2^*_{i_1,i_2} - \frac{AB}{2(A+B)}I_{z_1}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}f2^*_{i_1+1,i_2} - \\ &-\frac{A}{4}(1+\delta_{1,i_1-1})f2^*_{i_1-2,i_2} + A(1+\delta_{1,i_1})I_{z_1}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}f2^*_{i_1-2,i_2}\Bigg] \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$f2^*_{i_1,i_2+1} = 2\frac{\partial}{\partial z_2}f2^*_{i_1,i_2} + (1+\delta_{1,i_2})f2^*_{i_1,i_2-1} \tag{5.5}$$

$$f1_{i_1,i_2+1} = 2\frac{\partial}{\partial z_2}f1_{i_1,i_2} + (1+\delta_{1,i_2})f1_{i_1,i_2-1} \tag{5.6}$$

где константы A и B выражаются через упругие модули Ламе по формулам:

$$A = 2(\lambda+\mu), \quad B = 4\mu \tag{5.7}$$

$$I_{z_1}\varphi = \int_0^{z_1}\varphi dz_1$$

Построенные рекуррентные соотношения позволяют получить любую голоморфную функцию $f1_{i_1,i_2}(z_1,z_2)$ и $f2^*_{i_1,i_2}(z_1,z_2)$, а следовательно, и все коэффициенты представлений (5.1), (5.2), если известны две голоморфные функции $f1_{0,0}(z_1,z_2)$ и $f2^*_{0,0}(z_1,z_2)$, которые должны определяться граничными условиями трехмерной задачи теории упругости.

6. Пример восстановления граничных условий трехмерной задачи теории упругости с помощью разложения по функциям Бесселя на плоскости. Применение разложения по функциям Бесселя приводит к получению нового класса функций, в котором в отличие от разложения по степенным функциям, если начальные функции заданы в виде полиномов, то ряды (5.1), (5.2) не становятся конечными суммами, т.е. получается не обрывающийся ряд.

Рассмотрим случай, когда $f1_{0,0}(z_1,z_2) = z_1^n z_2^m$, $f2^*_{0,0}(z_1,z_2) = 0$, где n, m – целые неотрицательные числа.

Легко показать, что при таких начальных функциях все остальные голоморфные функции будут иметь вид:

$$f1_{i_1,i_2}(z_1,z_2)=(1-\delta_{0,i_2})\sum_{k=0}^{i_1}\sum_{q=0}^{i_2} C1_{i_1,i_2}^{k,q}\, I_{z_1}^k(z_1^n)D_{z_2}^{2k+q}(z_2^m) \tag{6.1}$$

$$f2^*_{i_1,i_2}(z_1,z_2)=(1-\delta_{0,i_2})\sum_{k=0}^{i_1-1}\sum_{q=0}^{i_2} C2_{i_1,i_2}^{k,q}\, I_{z_1}^k(z_1^n)D_{z_2}^{2k+q}(z_2^m) \tag{6.2}$$

$$I_{z_1}^k(z_1^n)=\begin{cases} z_1^n, \text{ если } k=0 \\ z_1^{n+k}/\prod_{\alpha=1}^{k}(n+\alpha), \text{ если } k>0 \\ 0, \text{ если } k<0 \end{cases}$$

$$D_{z_2}^q(z_2^m)=\begin{cases} z_2^m, \text{ если } q=0 \\ z_2^{m-q}\prod_{\beta=0}^{q-1}(n-\beta), \text{ если } q>0 \text{ и } q<m \\ 0, \text{ если } q<0 \text{ или } k>m \end{cases}$$

Здесь $I_{z_1}^k$ – оператор интегрирования, $D_{z_2}^q$ – оператор дифференцирования, $C1_{i_1,i_2}^{k,q}$, $C2_{i_1,i_2}^{k,q}$ – набор коэффициентов, вычисляемых по следующим рекуррентным соотношениям:

$$C1_{i_1,i_2}^{k,q}=D1_{i_1}^k E1_{i_2}^q,\quad C2_{i_1,i_2}^{k,q}=D2_{i_1}^k E2_{i_2}^q$$

$$D1_{i_1=0}^{k=0}=E1_{i_2=0}^{q=0}=D2_{i_2=0}^{q=0}=1,\quad E2_{i_1=0}^{k=0}=0$$

$$D2_{i_1}^k=D2_{i_1-2}^k-\frac{2A}{A+B}D1_{i_1-1}^k-\frac{2(2A+B)}{A+B}D2_{i_1-1}^{k-1}$$

$$\begin{aligned} D1_{i_1}^k&=\frac{A+B}{B(2A+B)}\Big[(A+B)(1+\delta_{1,i_1})D1_{i_1-2}^k-2BD1_{i_1-1}^{k-1}-\\ &-\frac{A}{2}(1+\delta_{1,i_1}+\delta_{1,i_1+1})D2_{i_1-1}^k-\frac{AB}{A+B}D2_{i_1}^{k-1}-\\ &-\frac{A}{2}(1+\delta_{1,i_1-1})D2_{i_1-3}^k+2A(1+\delta_{1,i_1-1})D2_{i_1-3}^{k-1}\Big] \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$E1_{i_2}^q=2E1_{i_2-1}^{q-1}+(1+\delta_{1,i_2})E1_{i_2-2}^q,\quad E2_{i_2}^q=2E2_{i_2-1}^{q-1}+(1+\delta_{1,i_2})E2_{i_2-2}^q$$

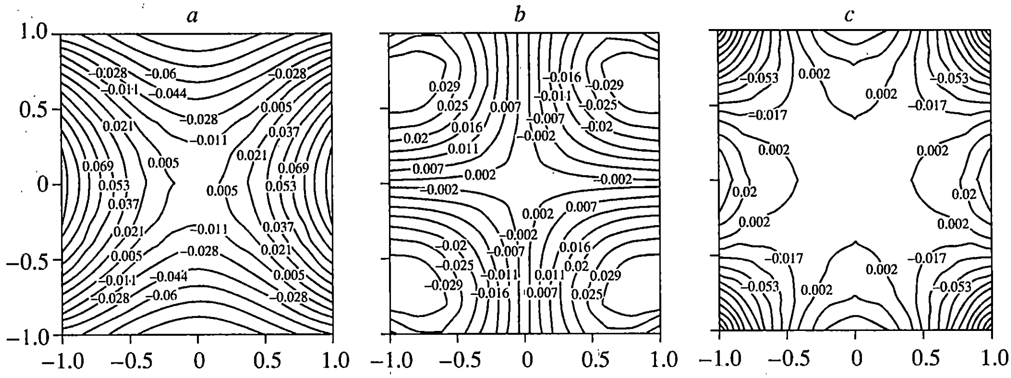
Полученное решение имеет вид формальных рядов

$$W_1=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}W1_{i_1,i_2}(z_1,z_2),\quad W_2=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}W2_{i_1,i_2}(z_1,z_2) \tag{6.4}$$

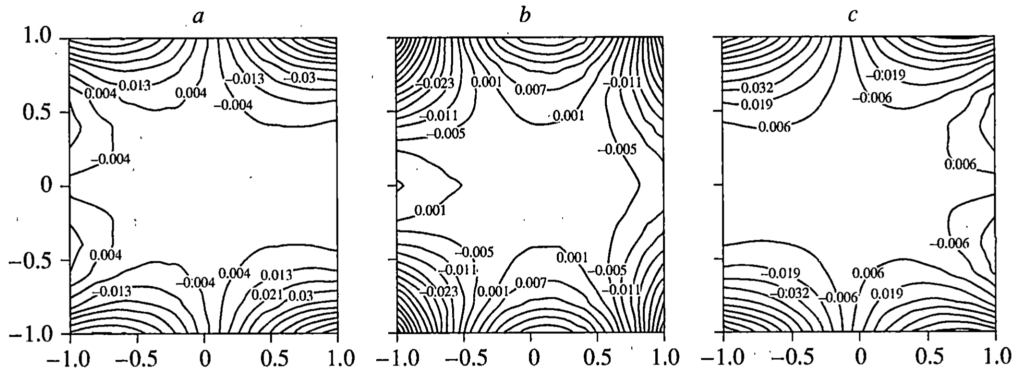
Члены этих рядов при $z_2=\bar{z}_2=z$ (т.е. при $x_4=0$) имеют вид:

$$\begin{aligned} W_1&=(1-\delta_{0,i_2})\sum_{k=0}^{i_1}\sum_{q=0}^{i_2}C1_{i_1,i_2}^{k,q}\, I_{z_1}^k(z_1^n)D_z^{2k+q}(z^m)\overline{J_{i_1}(z_1)}J_{i_2}(z)+\\ &+(1-\delta_{0,i_2})\sum_{k=0}^{i_1-1}\sum_{q=0}^{i_2}C1_{i_1,i_2}^{k,q}\overline{\frac{\partial}{\partial z_1}\left(I_{z_1}^k(z_1^n)\right)}D_z^{2k+q}(z^m)J_{i_1}(z_1)J_{i_2}(z) \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$W_2=(1-\delta_{0,i_2})\sum_{k=0}^{i_1-1}\sum_{q=0}^{i_2}C1_{i_1,i_2}^{k,q}\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z^{2k+q}(z^m)\right)J_{i_2}(z)\left[I_{z_1}^k(z_1^n)\overline{J_{i_1}(z_1)}+\overline{I_{z_1}^k(z_1^n)}J_{i_1}(z_1)\right]$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Рассмотрим пример, в котором положим $f1_{0,0}(z_1, z_2) = z_1^2$, $f2^*_{0,0}(z_1, z_2) \equiv 0$.

Вычисляем значения функций $f1_{i_1,i_2}(z_1, z_2)$, $f2^*_{i_1,i_2}(z_1, z_2)$ ($i_1 = 0, 1, \ldots, 10$; $i_2 = 0, 1, \ldots, 10$), так как при увеличении количества членов рядов W_1 и W_2 в два раза результаты в расчетных точках, изменились на 0.15%.

По формулам (6.4), (6.5) получаем значения W_1 и W_2. Искомые компоненты вектора перемещений u_i ($i = 1, 2, 3$) вычисляются по формулам (1.4).

На фиг. 4 изображены линии уровня проекций вектора перемещений на единичные векторы декартовой системы координат в точках плоскости $x_3 = 1$, ограниченной единичным квадратом с центром в начале координат: a – ось x_1, b – ось x_2, c – ось x_3.

При вычислении принимались модули Юнга $E = 1$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

В качестве расчетных точек была выбрана сетка с шагом 0.2 по оси x_1 и 0.2 по оси x_2.

Применив комплексифицированные соотношения Коши (4.1) к рядам (6.4), вычисляем значения тензора деформаций.

Подставляя значения полученных компонент тензора деформаций в закон Гука (4.1), получаем значения тензора перемещений, с помощью которого по формуле (4.3) находим значения вектора напряжений.

На фиг. 5 изображены линии уровня проекций вектора напряжений на той же плоскости, на те же направления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колосов Г.В.* Применение комплексной диаграммы и теории функции комплексной переменной к теории упругости. Л.; М.: ОНТИ, 1935. 224 с.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. *Александров А.Я., Соловьев Ю.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука, 1978 г. 462 с.
4. *Александрович А.И.* Применение теории функций двух комплексных переменных к теории упругости // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232. № 3. С. 542–544.
5. *Александрович А.И.* Применение теории функций двух комплексных переменных к решению пространственных задач теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 2. С. 164–168.
6. *Александрович А.И., Семов А.М.* Применение теории функций двух комплексных переменных к решению некоторых краевых задач пространственной теории упругости // Избранные вопросы динамики: Материалы совещ. секц. физики по механике за 1977–78 гг. М.: Наука, 1979. С. 54–62.
7. *Александрович А.И., Родионов А.Ю.* Исследование анизотропных и термоупругих задач методами комплексного анализа // Вопросы механики твердого и деформируемого тела. М. 1987. С. 74–84.
8. *Александрович А.И., Кувшинов П.А., Титоренко Д.Ф.* Решение уравнений трехмерной теории упругости методами комплексного анализа. М.: Изд-во ВЦ РАН, 1998. 22 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.12.1998