

УДК 534.112

© 2001 г. А.И. МУНИЦЫН

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НИТИ С НАТЯЖНЫМ УСТРОЙСТВОМ

Исследуются пространственные нелинейные колебания нити, проходящей через натяжное устройство, в котором фиксируется сила натяжения нити. Нить считается нерастяжимой, нелинейность системы обусловлена изменением длины нити, участвующей в движении. В задаче о собственных колебаниях обнаружено два решения в окрестности первой частоты, одно из которых соответствует плоской форме движения нити, второе – вращению точек нити по окружности. Изучены вынужденные колебания нити при кинематическом возбуждении в одной и в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Диссипация учитывалась по модели внешнего трения. Проведено исследование устойчивости полученных решений. Результаты численного моделирования, полученные с учетом трех мод в разложении решения по координате, представлены в виде амплитудно-частотных характеристик.

1. Постановка задачи. В научной литературе достаточно полно исследована задача о пространственных колебаниях струны с учетом геометрической нелинейности, обусловленной изменением длины при отсутствии осевых смещений на опорах. Для такой модели существует взаимосвязь между колебаниями струны в различных направлениях. Так, в случае свободных колебаний, точки струны движутся по эллипсу, оси которого совершают вращательное движение [1, 2]. Теоретические и экспериментальные исследования вынужденных колебаний под действием силы фиксированного направления показывают, что на определенных частотах в плоскости, ортогональной направлению силы, также возникают колебания и результирующее движение точек струны происходит по эллипсу [2–4]. При приближении к области резонанса с увеличением частоты наблюдается увеличение амплитуды плоских колебаний, затем довольно резко возникают пространственные колебания, которые при дальнейшем росте частоты становятся поляризованными практически по кругу. Затем происходит срыв колебаний, характерный для нелинейных систем с жесткой упругой характеристикой и в дальнейшем наблюдаются только плоские колебания малой амплитуды.

В практических приложениях, в частности для большого числа текстильных машин, представляет интерес задача о вынужденных колебаниях нити в процессе ее перемотки по следующей схеме. В точке $x = 0$ нить проходит через натяжное устройство, допускающее продольные перемещения нити и фиксирующее постоянное значение силы натяжения. В простейшем случае натяжное устройство представляет собой фрикционную пару, в которой натяжение нити обеспечивается силой сухого трения. В точке $x = L$ нить совершает движение в плоскости Oyz по некоторому закону $y = H_1(t)$, $z = H_2(t)$. Кроме этого, точки нити движутся со скоростью V , которую будем считать постоянной вдоль деформированной оси S . Силу натяжения нити T считаем постоянной и равной ее значению в натяжном устройстве, то есть вводим гипотезу о нерастяжимости нити.

В рассматриваемой схеме происходит кинематическое возбуждение колебаний нити в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Увеличение амплитуды колеба-

ний происходит за счет продольного перемещения нити в натяжном устройстве и изменения длины нити, участвующей в движении.

Обозначим через $y(x, t)$ и $z(x, t)$ перемещения точки нити с эйлеровой координатой x в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Уравнения движения нити имеют вид [5, 6]:

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(T \frac{\partial y}{\partial S} \right) = \rho a_y + \rho b v_y, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(T \frac{\partial z}{\partial S} \right) = \rho a_z + \rho b v_z$$

где ρ – линейная плотность, v, a – скорость и ускорение элемента нити, b – коэффициент диссипации в модели внешнего трения.

Вектор скорости в эйлеровых координатах определяется как полная производная вектора перемещений, соответственно ускорение элемента нити есть полная производная от скорости

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} + V \frac{\partial y}{\partial S}, \quad v_z = \frac{\partial z}{\partial t} + V \frac{\partial z}{\partial S} \quad (1.2)$$

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial S} + V^2 \frac{\partial^2 y}{\partial S^2}, \quad a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial S} + V^2 \frac{\partial^2 z}{\partial S^2}$$

С учетом геометрического соотношения

$$dS = dx(1 + y'^2 + z'^2)^{1/2} \quad (1.3)$$

можно перейти к двум независимым аргументам x и t . В результате подстановки (1.2) и (1.3) в (1.1) и ограничиваясь наиболее существенными нелинейными слагаемыми третьего порядка малости относительно y' и z' , получаем нелинейные уравнения движения нерастяжимой нити:

$$[(1 - V^2) - (2 - V^2)y'^2 - (1 - V^2)z'^2]y'' - y'z'z'' - 2V(1 - \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{2}z'^2)y' - \ddot{y} - \epsilon \dot{y} - \epsilon V(1 - \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{2}z'^2)y' = 0, \quad y \leftrightarrow z \quad (1.4)$$

Второе уравнение получается из первого взаимной перестановкой неизвестных y и z . Здесь и далее точкой обозначаем производную по безразмерному времени t^* , штрихом – производную по безразмерной координате x^* :

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{t}{L} \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/2}$$

Перемещения y и z отнесены к длине L и введены безразмерные скорость перемотки и коэффициент диссипации $V^* = V(\rho/T)^{1/2}$, $\epsilon = bL(\rho/T)^{1/2}$. Для сокращения записи звездочки опускаем.

Полученная система дифференциальных уравнений в частных производных должна быть дополнена граничными условиями, которые для рассматриваемой схемы движения нити имеют вид

$$y(x, t) = 0, \quad z(x, t) = 0 \quad \text{при } x = 0$$

$$y(x, t) = H_1(t), \quad z(x, t) = H_2(t) \quad \text{при } x = 1 \quad (1.5)$$

где безразмерные H_1 и H_2 также отнесены к длине L . Система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (1.4) совместно с граничными условиями

(1.5) образуют несамосопряженную краевую задачу. Заменой переменных

$$u(x, t) = H_1(t)x + u(x, t), \quad z(x, t) = H_2(t)x + w(x, t) \quad (1.6)$$

сформулированные граничные условия сводятся к однородным относительно u и w , при этом система уравнений становится достаточно громоздкой:

$$\begin{aligned} & [(1 - V^2) - (2 - V^2)(H_1 + u')^2 - (1 - V^2)(H_2 + w')^2]u'' - (H_1 + u')(H_2 + w')w'' - \\ & - 2V[1 - \frac{1}{2}(H_1 + u')^2 - \frac{1}{2}(H_2 + w')^2](\dot{H}_1 + \dot{u}') - \ddot{H}_1 x - \ddot{u} - \varepsilon(\dot{H}_1 + \dot{u}) - \\ & - \varepsilon V[1 - \frac{1}{2}(H_1 + u')^2 - \frac{1}{2}(H_2 + w')^2](H_1 + u') = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$(u \leftrightarrow w; H_1 \leftrightarrow H_2)$$

Функции u и w представляют собой перемещения нити относительно прямой, соединяющей крайние точки нити.

2. Метод решения. Функции перемещений по координате x ($0 < x < 1$) приближенно могут быть заданы в виде

$$u(x, t) = \sum_{s=1}^N \varphi_{1s}(t) \sin(s\pi x), \quad w(x, t) = \sum_{s=1}^N \varphi_{2s}(t) \sin(s\pi x) \quad (2.1)$$

удовлетворяющем (1.5). Применение процедуры Бубнова – Галеркина к уравнениям (1.7) с учетом (2.1) приводит к системе $2N$ уравнений относительно функций $\varphi_{1s}(t)$ и $\varphi_{2s}(t)$.

Записать полученные уравнения в явном виде удастся только для случая одно-модового приближения. При удержании достаточно большого числа членов ряда в разложении (2.1) аналитические выкладки становятся слишком громоздкими. Данная проблема решается на программном уровне, для чего операторы уравнений (1.7) записываются в виде:

$$L_i(u, w) = \frac{d^{n0}}{dx^{n0}} h_k(x) \frac{d^{m0}}{dt^{m0}} g_k(t) \prod_{j=1}^{jk} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial t^m} R_j = 0 \quad (2.2)$$

где $i = 1, 2$ – номер уравнения, $k = 1, 2, \dots, K$ – номер, присваиваемый каждому слагаемому в системе уравнений, $h_k(x)$, $g_k(t)$ – заданные функции, $n0$, $m0$ – порядок их производных, R_j ($j = 1, 2$) – компоненты вектора перемещений, $R = (u, w)$, n , m – порядок производных по координате и времени для каждого j -го сомножителя. Все перечисленные параметры определяются видом исходных уравнений движения.

С учетом принятых обозначений, система уравнений относительно $\varphi_{js}(t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d^{m0}}{dt^{m0}} g_k(t) D_{k,p,s} \frac{d^m}{dt^m} \varphi_{js} + \frac{d^{m0}}{dt^{m0}} g_k(t) D_{k,p,s1,s2} \frac{d^{m1}}{dt^{m1}} \varphi_{j1,s1} \frac{d^{m2}}{dt^{m2}} \varphi_{j2,s2} + \\ & + \frac{d^{m0}}{dt^{m0}} g_k(t) D_{k,p,s1,s2,s3} \frac{d^{m1}}{dt^{m1}} \varphi_{j1,s1} \frac{d^{m2}}{dt^{m2}} \varphi_{j2,s2} \frac{d^{m3}}{dt^{m3}} \varphi_{j3,s3} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь сгруппированы слагаемые первого, второго и третьего порядков малости. Элементы многомерных массивов D представляют собой определенные интегралы, значения которых могут быть получены численно с заданной точностью.

Для решения полученной системы использовался метод продолжения решения по параметру [7]. Представим искомые q -периодические решения в виде отрезка ряда Фурье и из условия ортогональности к базисным функциям по времени получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно частоты ω и амплитуд A_{jsn} . Первый индекс амплитуды соответствует номеру переменной (u или w), второй – базисной функции по координате, третий – базисной функции по времени. В полу-

ченную систему уравнений входят многомерные массивы S , элементы которых представляют собой определенные интегралы по времени на периоде q :

$$D_{k,p,s} S_{k,i,n} A_{j,s,n} \omega^m + D_{k,p,s1,s2} S_{k,i,n1,n2} A_{j1,s1,n1} A_{j2,s2,n2} \omega^{m1} + \\ + D_{k,p,s1,s2,s3} S_{k,i,n1,n2,n3} A_{j1,s1,n1} A_{j2,s2,n2} A_{j3,s3,n3} \omega^{m2} = 0 \quad (2.4)$$

При построении амплитудно-частотных характеристик вычислительный процесс начинается с некоторой точки, являющейся решением задачи. При решении задачи о собственных колебаниях в качестве начального приближения можно принять собственную частоту и соответствующую моду, определенную с точностью до константы. Величину этой константы всегда можно выбрать достаточно малой, чтобы система уравнений выполнялась с заведомо заданной точностью. При исследовании вынужденных колебаний процесс вычислений можно начинать с нулевой частоты и нулевых амплитуд. Варьируя входящие в систему (2.4) переменные и линеаризуя полученные уравнения, определяем приращения неизвестных. Таким образом решение системы нелинейных уравнений сводится к решению последовательности систем линейных уравнений. На каждом шаге вычислений контролируется величина невязки и если относительная погрешность превышает заданную точность, то шаг варьiruемой переменной уменьшается.

Изложенный метод не работает в особых точках, где определитель системы линейных уравнений равен нулю. В этих точках возможно ветвление решений рассматриваемой системы, что приводит к неоднозначности получаемых АЧХ. В этих случаях за независимый параметр принимается одна из остальных переменных, что позволяет найти все существующие решения.

Метод продолжения решения по параметру позволяет также исследовать устойчивость полученных решений на основе второго метода Ляпунова.

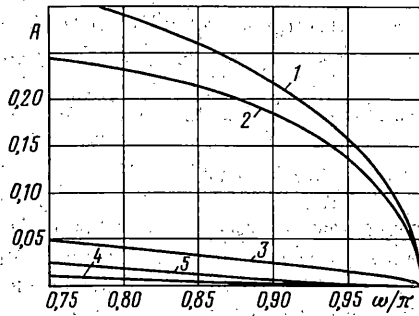
Описанный алгоритм реализован в пакете прикладных программ, исходными данными для которого является описание системы уравнений (2.2) и выбор системы базисных функций по координате и времени.

3. Результаты численного моделирования. Все вычисления проводились для нулевого значения безразмерного параметра скорости V , что соответствует пренебрежимо малым скоростям перемотки нити по сравнению со скоростью распространения поперечных волн. В лабораторных условиях аналогичную задачу для неподвижной в продольном направлении нити можно смоделировать, пропустив нить в точке $x = 0$ через пару вращающихся поджимных роликов.

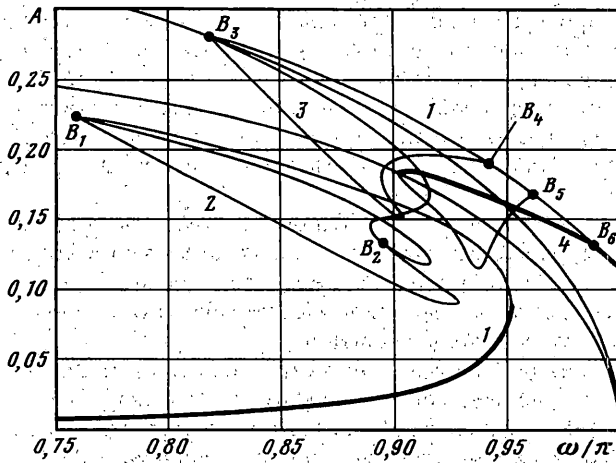
Ниже проводятся результаты, полученные с учетом трех членов ряда в разложении (2.1) и первых трех гармоник в отрезке ряда Фурье.

Рассмотрим сначала случай свободных колебаний нити, для чего в уравнениях (1.7) достаточно положить $H_1(t) = H_2(t) = 0$ и $\varepsilon = 0$. Начиная процесс вычислений с первой собственной частоты $\omega = \pi$ и варьируя амплитуду A_{111} перемещения $u(x, t)$ при первой моде и функции $\sin(\omega t)$, описанный алгоритм позволяет построить амплитудно-частотные зависимости, приведенные на фиг. 1. То, что при заданных граничных условиях струна или нить имеют мягкую нелинейность, видно уже из исходных уравнений. Гораздо интереснее тот факт, что из одной точки на оси абсцисс $\omega = \pi$ выходят два решения.

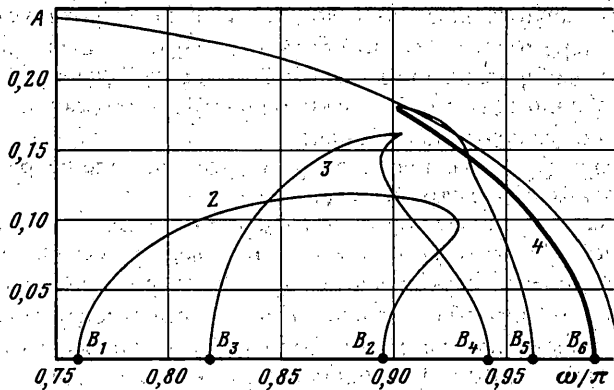
Кривые 1, 3, 4 соответствуют плоской форме колебаний, для которой все амплитуды переменной $w(x, t)$ равны нулю. Кривая 1 есть зависимость амплитуды первой гармоники при $\sin(x)$ от частоты, 3 и 4 – амплитуды третьих гармоник при $\sin(x)$ и $\sin(3x)$ переменной u . Кривые 2, 5 соответствуют форме движения точек нити по окружности и являются амплитудами первой гармоники при $\sin(x)$ и $\sin(3x)$ функции $u(x, t)$, для $w(x, t)$ отличны от нуля амплитуды при $\cos(p\omega t)$, которые совпадают с амплитудами для $u(x, t)$ при $\sin(p\omega t)$. Значения остальных учитываемых в решении



Фиг. 1



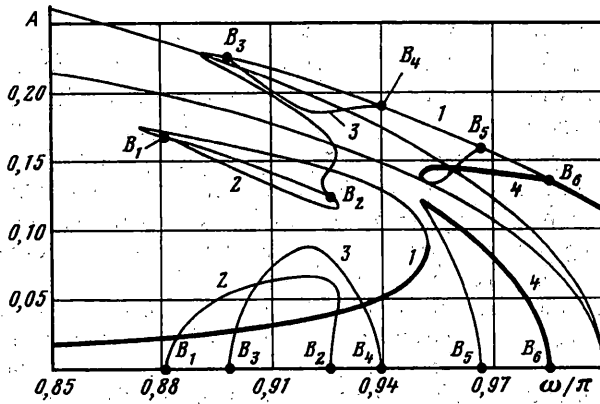
Фиг. 2



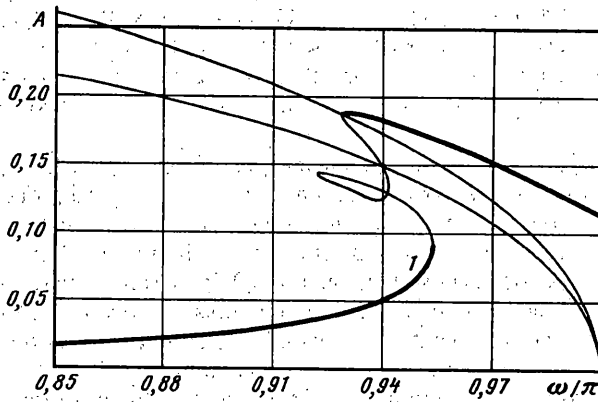
Фиг. 3

членов ряда становятся заметными только при очень больших амплитудах движения нити.

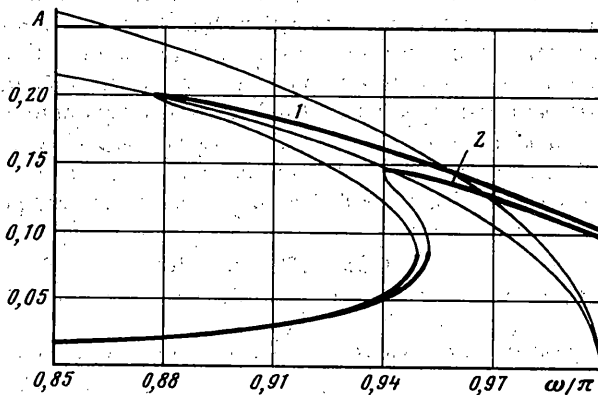
Построение программой того или иного решения зависит от выбранного соотношения амплитуд в начальном приближении, при этом плоские формы движения могут быть получены вдоль любой оси, а вращательные движения отличаются вращением в различных направлениях. Таким образом свободные колебания нити условно можно представить в виде суммы вращательных движений и двух плоских вдоль осей y и z .



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Результирующее движение точек нити по эллипсу, расположение осей которого зависит от начальных условий, наблюдается в лабораторных экспериментах.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания нити в предположении, что точка $x = 1$ движется вдоль фиксированной оси. Для определенности рассмотрим практически важный случай гармонического движения $H_1(t) = h \sin(\omega t)$, $H_2(t) = 0$. На фиг. 2 и 3 представлены АЧХ для амплитуд первой гармоники при $\sin(x)$ функций u и w

соответственно. Амплитуда кинематического возбуждения $h = 0,01$ и коэффициент диссипации $\varepsilon = 0,05$. Кривая 1 соответствует плоским колебаниям, ее построение начиналось с достаточно малой частоты и в процессе продолжения решения по различным параметрам обнаружены шесть точек ветвления решений $B_1 - B_6$. Принимая одну из этих точек в качестве начального приближения построены кривые 2, 3 и 4. Эти решения соответствуют пространственным колебаниям, при которых точки нити движутся по эллипсу. Для каждой из этих кривых существует еще одно решение, соответствующее вращению нити в противоположном направлении. Решения 1 и 4 огибают соответствующую скелетную кривую.

Жирной линией обведены участки, соответствующие устойчивым решениям. При увеличении частоты кинематического возбуждения колебаний нити происходит 'срыв' от плоской формы к пространственным колебаниям, которые в дальнейшем плавно переходят к плоским. Существует некоторый диапазон частот, в котором возможно существование как плоских колебаний с 'малой' амплитудой, так и пространственных колебаний с 'большой' амплитудой. Такая качественная картина вынужденных колебаний нити наблюдается в лабораторных экспериментах. Решение, соответствующее кривой 1, может быть получено из решения плоской задачи, однако исследование устойчивости полученного решения приведет в этом случае к ошибочным результатам, а именно, участок АЧХ между точками B_3 и B_6 будет соответствовать устойчивому решению.

Аналогичные результаты приведены на фиг. 4 для $\varepsilon = 0,07$, где сведены вместе амплитуды колебаний в двух ортогональных плоскостях. Качественно вид АЧХ не меняется, уменьшается участок, соответствующий устойчивым пространственным колебаниям. При дальнейшем увеличении диссипации пространственные формы движения нити вообще исчезают. Так для $\varepsilon = 0,09$ решение, представленное на фиг. 5, состоит из одной кривой и соответствует плоскому движению нити. В этом случае максимальная амплитуда плоских колебаний даже несколько больше, чем в случае пространственных колебаний при меньшей диссипации.

Еще одним часто встречающимся в практике случаем кинематического возбуждения колебаний нити является движение точки $x = 1$ по окружности: $H_1(t) = h \sin(\omega t)$, $H_2(t) = h \cos(\omega t)$. При этом нить образует так называемый баллон вращения, в котором все точки нити движутся по окружности. Результаты численного моделирования по описанному выше алгоритму представлены на фиг. 6 в виде зависимости амплитуды первой гармоники при первой координатной базисной функции в разложении (2.1) от частоты ω . Кривые 1 и 2, соответствующие $h = 0,01$ и $\varepsilon = 0,09$; 0,13, огибают скелетную кривую вращательной формы движения нити. Точки ветвления решений на АЧХ отсутствуют. Для данной задачи характерна типичная мягкая нелинейность с возможными 'скачками' с одной устойчивой ветви решения на другую, что и наблюдается в экспериментах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Нелинейные колебания струны // Изв. АН. МТТ. 1993. № 4. С. 87–92.
2. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Вынужденные нелинейные колебания струны // Изв. АН. МТТ. 1996. № 1. С. 17–24.
3. Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В. Влияние диссипации на пространственные нелинейные колебания струны // Изв. АН. МТТ. 1997. № 1. С. 19–28.
4. Anand G.V. Stability of nonlinear oscillation of stretched strings // J. Acous. Soc. America. 1969. V. 46. № 3. P. 667–677.
5. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240 с.
6. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.
7. Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л. Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем. М.: Высш. шк., 1989. 382 с.

Иваново

Поступила в редакцию
14.10.1998