МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2001

УДК 531.36

© 2001 г. А.П. ИВАНОВ, В.И. ПЕРЕВЕРЗЕВ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА, УПРУГО СОУДАРЯЮЩЕГОСЯ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

Рассматривается твердое тело, движущееся по инерции в промежутке между двумя параллельными гладкими стенками; возможные соударения предполагаются абсолютно упругими. Данная система изучалась в связи с проблемой "ускорения Ферми" для случая, когда стенки колеблются, а тело сферически симметрично [1]. В общем случае она также может служить базовой моделью для проверки различных гипотез в кинетической теории газов. В [2] получены условия устойчивости плоского периодического поступательного движения тела между неподвижными стенками. В [3, 4] исследована устойчивость периодических подскоков тяжелого вращающегося твердого тела на горизонтальном основании. Данная работа посвящена пространственным периодическим движениям тел вращения в случае неподвижных стенок.

1. Уравнения движения. Будем считать, что область возможного движения в некоторой инерциальной системе координат $OXYZ$ описывается двойным неравенством $0 \leqslant z \leqslant h$, где h – расстояние между стенками. Кинетическая энергия тела имеет вид

$$T = \tfrac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{v}$ – скорость центра масс G, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, m, $\mathbf{J}$ – масса и тензор инерции. Ввиду отсутствия внешних сил, величина T сохраняется при перелетах, а вследствие упругого характера ударов она остается неизменной во все время движения. Поведение тела при ударах зависит от его геометрической формы: лишь в случае, когда оно является шаром, центр которого совпадает с центром масс (шар Чаплыгина), соударения не влияют на относительное движение. В общем случае при ударах изменяется не только скорость центра масс, но и кинетический момент тела.

Будем описывать форму тела функцией $f(\theta, \varphi)$, зависящей от углов нутации и собственного вращения и равной аппликате точки G при касании телом плоскости $z = 0$. Тогда для данных значений координат $\mathbf{q} = (x, y, z, \theta, \psi, \varphi)$ наименьшая из аппликат точек тела равна $z - f(\theta, \varphi)$, а наибольшая – $z + f(\pi - \theta, \varphi)$.

Уравнения движения в лагранжевой форме выглядят так

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad f(\theta,\varphi) \leqslant z \leqslant h - f(\pi - \theta, \varphi) \tag{1.2}$$

$$T = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \tfrac{1}{2}(J_1 p^2 + J_2 q^2 + J_3 r^2)$$

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \quad q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \quad r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}$$

Здесь J_1, J_2, J_3 – главные центральные моменты инерции.

Для описания ударов о неудерживающую связь $s_1 = z - f(\theta, \varphi)$ учтем ее идеальность, вследствие чего [5]:

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \lambda \frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{q}} \tag{1.3}$$

где множитель λ определяется из условия сохранения кинетической энергии при ударе. Аналогично рассчитываются приращения скоростей при ударе о другую стенку.

Заметим, что переменные x, y в уравнениях (1.2) отделяются от остальных переменных; они линейно зависят от времени. В дальнейшем исключим эти переменные из рассмотрения. Кроме того, координата ψ является циклической. Следовательно, порядок системы можно понизить до шестого (три степени свободы).

2. Периодические движения симметричного тела. Будем считать, что рассматриваемое тело образовано вращением вокруг оси GZ'. Тогда $J_1 = J_2$ и функция f, описывающая форму тела, зависит от единственной переменной θ. В системе (1.2) координаты ψ, φ являются циклическими; им соответствуют первые интегралы уравнений движения

$$c_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_3(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = \text{const}$$

$$c_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = J_1\dot{\psi}\sin^2\theta + c_\varphi \cos\theta = \text{const} \tag{2.1}$$

представляющие собой проекции вектора $\mathbf{K}$ – кинетического момента относительно точки G – на оси GZ' и OZ соответственно.

Значения c_φ, c_φ остаются неизменными и при ударах о плоскости, так как в уравнениях (1.3) $\partial s_1/\partial\psi = \partial s_1/\partial\varphi = 0$. Ввиду этого можно понизить порядок системы (1.2), воспользовавшись методом Рауса игнорирования циклических координат. В результате получим систему с двумя степенями свободы и функцией Лагранжа (являющейся функцией Рауса исходной системы)

$$L = \tfrac{1}{2} m\dot{z}^2 + \tfrac{1}{2} J_1\dot{\theta}^2 - F(\theta), \quad f(\theta) \leqslant z \leqslant h - f(\pi - \theta) \tag{2.2}$$

$$F(\theta) = \begin{cases} \dfrac{(c_\psi - c_\varphi\cos\theta)^2}{2J_1\sin^2\theta}, & \text{если } |c_\varphi| \neq |c_\psi| \\ \dfrac{c_\varphi^2}{2J_1}\operatorname{tg}^2\left(\tfrac{1}{2}\theta - \dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{4}\right), & \text{если } c_\varphi = \pm c_\psi \end{cases}$$

В полете $\dot{z} = \text{const}$, а относительное движение вследствие симметрии представляет собой перманентное вращение (в случае $|c_\varphi| = |c_\psi|$) или регулярную прецессию. При ударах происходит перераспределение энергии между поступательным и вращательным движениями тела, которое можно рассчитать по формуле (1.3).

При соударении с левой стенкой $s_1 = z - f(\theta) = 0$, откуда $\partial s_1/\partial z = 1$, $\partial s_1/\partial\theta = -f'(\theta)$. Вычисляя множитель Лагранжа λ из условия сохранения кинетической энергии, придем окончательно к таким соотношениям

$$\dot{z}^+ = \dot{z}^- + 2J_1\frac{f'(\theta)\dot{\theta}^- - \dot{z}^-}{J_1 + m(f'(\theta))^2}, \quad \dot{\theta}^+ = \dot{\theta}^- + 2mf'(\theta)\frac{\dot{z}^- - f'(\theta)\dot{\theta}^-}{J_1 + m(f'(\theta))^2} \tag{2.3}$$

Аналогично, при ударе о правую стенку $s_2 = h - z - f(\pi - \theta) = 0$, откуда $\partial s_2/\partial z = -1$, $\partial s_2/\partial\theta = f'$. По сравнению с предыдущим случаем, для коэффициента λ получим то же выражение, но с противоположным знаком. Подставив его в (1.3), вновь придем к формуле (2.3), где теперь следует вычислять производную f' в точке $\pi - \theta$.

Как видно из формул (2.3), если в точке удара $f' = 0$, то $\dot z^+ = -\dot z^-$, $\dot\theta^+ = \dot\theta^-$, т.е. движение центра масс изменяется на противоположное, а относительное движение тела не изменится. Следовательно, возможны такие движения, для которых удары следуют через равные промежутки времени, а вектор кинетического момента **K** остается неизменным. Эти движения можно разделить на четыре вида:

(*1*) ось тела все время остается перпендикулярной стенке – перманентное вращение;

(*2*) тело совершает регулярную прецессию вокруг оси, параллельной OZ, при этом $\theta = \theta_0$, где $f'(\theta_0) = f'(\pi - \theta_0) = 0$;

(*3*) тело совершает перманентное вращение вокруг оси, составляющей угол θ_0 с осью OZ, причем $f'(\theta_0) = f'(\pi - \theta_0) = 0$;

(*4*) тело совершает регулярную прецессию вокруг оси, непараллельной OZ, соударясь со стенками в моменты, когда значения угла θ являются критическими для функций $f(\theta)$ и $f(\pi - \theta)$.

Заметим, что указанные виды периодических движений не являются равновозможными. В то время как движения первого типа существуют вне зависимости от формы тела, для реализации движений остальных типов требуется наличие у функции $f(\theta)$ критических точек вне оси симметрии. Кроме того, для движений четвертого типа необходима соизмеримость между периодами поступательного и вращательного движений тела. Таким образом, движения первого типа обладают наибольшей возможностью к реализации. Исследуем устойчивость этих движений по отношению к переменным $\theta, \dot\theta$, определяющим ориентацию тела.

Линеаризованное уравнение Лагранжа по переменной θ получим, выделяя в функции (2.2) квадратичную часть

$$\ddot\theta + \omega^2\theta = 0, \quad \omega = \frac{c_\varphi}{2J_1} = \frac{J_3}{2J_1}\Omega \tag{2.4}$$

где Ω – угловая скорость перманентного вращения (в невозмущенном движении).

Уравнения удара (2.3) в первом приближении имеют вид

$$\dot z^+ = -\dot z^-, \quad \dot\theta^+ = \dot\theta^- \pm 2\frac{m}{J_1}\dot z^- f''(\theta_{1,2})\theta^-, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi \tag{2.5}$$

Таким образом, в линейном приближении движение центра масс остается неизменным, и удары о стенки (попеременно) следуют через равные интервалы времени τ.

Определяющую матрицу построим, связывая в матричной форме соотношения (2.4) и (2.5):

$$\mathbf{X}(2\tau) = \mathbf{B}_2\mathbf{Y}(\tau)\mathbf{B}_1\mathbf{Y}(\tau), \quad \mathbf{B}_{1,2} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma f''(\theta_{1,2}) & 1 \end{Vmatrix} \tag{2.6}$$

$$\gamma = \frac{2mV}{J_1}, \quad V = |\dot z|, \quad \mathbf{Y}(t) = \begin{Vmatrix} \cos\omega t & \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{Vmatrix}$$

Заметим, что величина f'' в критических точках функции f представляет собой разность между расстоянием от центра масс до соответствующей точки поверхности тела и радиусом кривизны в этой точке.

Определитель произведения (2.6) равен произведению определителей сомножителей, т.е. единице, а след выражается такой формулой:

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{X}(2\tau)) = 2\cos 2\omega\tau - \frac{\gamma}{\omega}(f''(0) + f''(\pi))\sin 2\omega\tau + \frac{\gamma^2}{\omega^2} f''(0)f''(\pi)\sin^2\omega\tau \tag{2.7}$$

Необходимое условие устойчивости выражается формулой

$$|\operatorname{Tr}(\mathbf{X}(2\tau))| \leqslant 2 \tag{2.8}$$

В частном случае, когда тело симметрично относительно экваториальной плоскости, $f''(0) = f''(\pi)$ и неравенство (2.8) принимает вид

$$\left|\cos\omega t - \frac{2f''(0)mV}{\Omega J_3}\sin\omega t\right| \leqslant 1 \tag{2.9}$$

что совпадает с условием устойчивости ориентации "спящего" волчка, периодически подскакивающего над опорной плоскостью в поле тяжести [3, 4]. Основным свойством решений этого неравенства является их своеобразное "квантование": если $f''(0) \neq 0$, то с ростом скорости движения V интервалы устойчивости и устойчивости чередуются, бесконечно сменяя друг друга. Можно показать, что таким же свойством обладают и решения неравенства (2.8). Для этого перепишем формулу (2.7) в виде

$$\operatorname{Tr}(\mathbf{X}(2\tau)) = 2\cos 2\omega\tau(1-\alpha_1\alpha_2) - 2(\alpha_1+\alpha_2)\sin 2\omega\tau + 2\alpha_1\alpha_2 =$$

$$= 2\left(\alpha_1\alpha_2 + \sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)^2 + (1-\alpha_1\alpha_2)^2}\right)\sin(2\omega\tau+\xi), \quad \alpha_{1,2} = \tfrac{1}{2}\gamma f''(\theta_{1,2}) \tag{2.10}$$

где ξ – некоторая константа. Если $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, величина (2.10) будет больше двух, например, при $2\omega\tau + \xi = \pi/2$, в противном случае она меньше минус двух, например, при $2\omega\tau + \xi = -\pi/2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01440) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (99-01-00281).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
2. *Маркеев А.А.* Об устойчивости плоского периодического движения твердого тела между параллельными стенками // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 22–24.
3. *Маркеев А.П.* Об устойчивости вращений твердого тела вокруг вертикали при наличии соударений с горизонтальной плоскостью // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 363–369.
4. *Иванов А.П.* О периодических движениях тяжелого симметричного твердого тела с ударами о горизонтальную плоскость // Изв. РАН. МТТ. 1985. № 2. С. 30–35.
5. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.12.1998