

УДК 624.07 : 534.1

© 2001 г. А.И. ПОЛУНИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОЛЬЦА С ОПОРАМИ ПРИ УЧЕТЕ РАСТЯЖИМОСТИ СРЕДНЕЙ ЛИНИИ

Представлены зависимости для определения собственных частот колебаний вращающегося на двух опорах кольца с учетом растяжимости средней линии. Результаты получены с помощью уравнений Лагранжа второго рода с неопределенными множителями. Проводится сравнение результатов расчета с частотами, полученными при использовании гипотезы нерастяжимой средней линии и с результатами эксперимента.

При вращении свободного упругого кольца в нем возникает эффект прецессии стоячих волн [1, 2]. При вращении кольца, базирующегося на двух опорах (фигура), появляются связи, влияющие на его динамику. В статье [3] получены зависимости для определения собственных частот колебаний кольца с опорами при использовании гипотезы нерастяжимости средней линии.

Рассмотрим поведение кольца при учете растяжимости средней линии. Введем неподвижную систему координат OX_H , начало которой находится в центре недеформированного кольца, и подвижную OX_C , жестко связанную с кольцом. Положение оси OX_C относительно OX_H равно Ωt , где t – время, Ω – угловая скорость вращения кольца. Положение точек средней линии деформированного кольца в локальной системе координат определяем координатами u, v , положение которой задаем углом θ относительно оси OX_C . Угол между опорами обозначим 2α (фигура).

Величины перемещений точек средней линии кольца зададим в виде

$$u = a_0 + \sum_{i=1}^N [a_i \cos(i\theta) + b_i \sin(i\theta)] \quad (1)$$

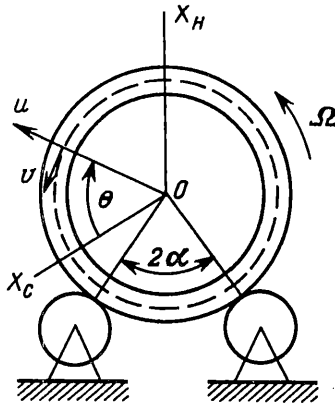
$$v = \sum_{i=1}^N [z_i \cos(i\theta) + y_i \sin(i\theta)] \quad (2)$$

где a_0, a_i, b_i, z_i, y_i – неизвестные функции времени, N – число учитываемых гармоник.

Учет прецессии гармоник во вращающемся кольце будем осуществлять введением дополнительной неизвестной функции $\varphi_i(t)$. Тогда уравнения (1), (2) примут вид

$$u = a_0 + \sum_{i=1}^N [a_i \cos(i(\theta + \varphi_i)) + b_i \sin(i(\theta + \varphi_i))]$$

$$v = \sum_{i=1}^N [z_i \cos(i(\theta + \varphi_i)) + y_i \sin(i(\theta + \varphi_i))]$$



Для получения зависимостей, описывающих поведение кольца, используем уравнение Лагранжа второго рода с неопределенными множителями. В данном случае общий вид этих уравнений будет

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^2 \lambda_i e_{ij}$$

где, T , Π – соответственно кинетическая и потенциальная энергии кольца, точка означает дифференцирование по времени, q_j – компонента вектора обобщенных координат $q_0^T = [a_0 a_1 a_2 \dots a_N b_1 b_2 \dots b_N z_1 z_2 \dots z_N y_1 y_2 \dots y_N]$; $\lambda_1 \lambda_2$ – неопределенные множители Лагранжа, e_{ij} – производная i -го уравнения связи по координате q_j .

Вычисляя производные кинетической

$$T = \frac{\gamma}{2} \int_0^{2\pi} [(\dot{v} + \Omega r + \Omega u)^2 + (\dot{u} - \Omega v)^2] d\theta$$

и потенциальной

$$\Pi = \frac{\mu}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)^2 d\theta + \frac{Q}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right)^2 d\theta$$

энергий, а также производные уравнений связи в точках опор

$$a_0 + \sum_{i=1}^N [a_i \cos(i(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_i)) + b_i \sin(i(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_i))] = 0 \quad (3)$$

$$a_0 + \sum_{i=1}^N [a_i \cos(i(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_i)) + b_i \sin(i(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_i))] = 0 \quad (4)$$

получим дифференциальные уравнения поведения кольца

$$\begin{aligned} 2\pi\gamma\ddot{a}_0 + 2\pi(Q - \gamma\Omega^2)a_0 - 2\pi\gamma\Omega^2 r &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \pi\gamma\ddot{a}_j + 2\pi\gamma b_j \dot{\varphi}_j - 2\pi\gamma\Omega Z_j + \pi[\mu j^4 + Q - \gamma(\Omega^2 + j^2 \dot{\varphi}_j^2)]a_j + \pi\gamma\ddot{\varphi}_j b_j + \\ + \pi(\mu j^3 + Qj - 2\gamma\Omega\dot{\varphi}_j)y_j &= \lambda_1 \cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_j)) + \lambda_2 \cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_j)) \\ \pi\gamma\ddot{b}_j - 2\pi\gamma a_j \dot{\varphi}_j - 2\pi\gamma\Omega y_j - \pi\gamma\ddot{\varphi}_j a_j + \pi[\mu j^4 + Q - \gamma(\Omega^2 + j^2 \dot{\varphi}_j^2)]b_j + \\ + \pi(2\gamma\Omega\dot{\varphi}_j - \mu j^3 - Qj)Z_j &= \lambda_1 \sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_j)) + \lambda_2 \sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_j)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma \ddot{z}_j + 2\gamma\Omega \dot{a}_j + 2\gamma\dot{\phi}_j \dot{y}_j + (2\gamma\Omega j \dot{\phi}_j - \mu j^3 - Qj) b_j + [\mu j^2 + Qj^2 - \gamma(j^2 \dot{\phi}_j^2 + \Omega^2)] Z_j + j \ddot{\phi}_j y_j = 0 \\ \gamma \ddot{y}_j + 2\gamma\Omega \dot{b}_j - 2\gamma\dot{\phi}_j \dot{z}_j + (\mu j^3 + Qj - 2\gamma\Omega \dot{\phi}_j) a_j - \gamma \ddot{\phi}_j Z_j + \\ + [\mu j^2 + Qj^2 - \gamma(j^2 \dot{\phi}_j^2 + \Omega^2)] y_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

Здесь $\gamma = r\rho F$, r – радиус средней линии кольца, ρ – удельная плотность материала кольца, F – площадь поперечного сечения, $\mu = EJ/r^3$, $Q = EF/r$, E – модуль Юнга материала кольца, J – осевой момент инерции сечения кольца. Прецессия стоячих волн во вращающемся кольце может происходить в интервале между опорами и иметь постоянную или переменную угловую скорость. Рассмотрим первый случай. Тогда угловая скорость прецессии равна угловой скорости вращения кольца, т.е. $\phi_j = \Omega t$, $\dot{\phi}_j = \Omega$, $\ddot{\phi}_j = 0$. Предыдущая система уравнений примет вид

$$2\pi\gamma\ddot{a}_0 + 2\pi(Q - \gamma\Omega^2)a_0 - 2\pi\gamma\Omega^2 r = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \pi\gamma\ddot{a}_j + 2\pi\gamma\Omega \dot{b}_j - 2\pi\gamma\Omega \dot{z}_j + \pi[\mu j^4 + Q - \gamma\Omega^2(1 + j^2)]a_j + \pi[\mu j^3 + Qj - 2\gamma\Omega^2]y_j = \\ = \lambda_1 \cos(j(\pi - \alpha)) + \lambda_2 \cos(j(\pi + \alpha)) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \pi\gamma\ddot{b}_j - 2\pi\gamma\Omega \dot{a}_j - 2\pi\gamma\Omega \dot{y}_j + \pi[\mu j^4 + Q - \gamma\Omega^2(1 + j^2)]b_j + \pi[2\gamma\Omega^2 - \mu j^3 - Qj]z_j = \\ = \lambda_1 \sin(j(\pi - \alpha)) + \lambda_2 \sin(j(\pi + \alpha)) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\ddot{z}_j + 2\Omega \dot{a}_j + 2j\Omega \dot{y}_j + \left[2j\Omega^2 - \frac{\mu j^3 + Qj}{\gamma} \right] b_j + \left[\frac{(\mu + Q)j^2}{\gamma} - (1 + j^2)\Omega^2 \right] z_j = 0 \quad (8)$$

$$\ddot{y}_j + 2\Omega \dot{b}_j - 2j\Omega \dot{z}_j + \left[\frac{\mu j^3 + Qj}{\gamma} - 2j\Omega^2 \right] a_j + \left[\frac{(\mu + Q)j^2}{\gamma} - (1 + j^2)\Omega^2 \right] y_j = 0 \quad (9)$$

$$(j = 1, 2, \dots, N)$$

Исключим неизвестные λ_1 и λ_2 . Для этого зададим в уравнениях (6), (7) $j = 1$. Получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cos(\pi - \alpha) + \lambda_2 \cos(\pi + \alpha) = \pi\gamma\ddot{a}_1 + 2\pi\gamma\Omega \dot{b}_1 - 2\pi\gamma\Omega \dot{z}_1 + \pi[\mu + Q - 2\gamma\Omega^2]a_1 + \\ + \pi[\mu + Q - 2\gamma\Omega^2]y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \sin(\pi - \alpha) + \lambda_2 \sin(\pi + \alpha) = \pi\gamma\ddot{b}_1 - 2\pi\gamma\Omega \dot{a}_1 - 2\pi\gamma\Omega \dot{y}_1 + \pi[\mu + Q - 2\gamma\Omega^2]b_1 + \\ + \pi[2\gamma\Omega^2 - \mu - Q]z_1 \end{aligned}$$

Так как $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha)$, $\sin(\pi - \alpha) = -\sin(\pi + \alpha)$, то из предыдущих двух уравнений получим

$$[\lambda_1 \quad \lambda_2]^T = \pi\gamma Tq \quad (10)$$

где элементы матрицы T определяем зависимостями

$$T_{11} = \frac{0.5}{\cos(\pi - \alpha)}, \quad T_{12} = \frac{0.5}{\sin(\pi - \alpha)}, \quad T_{13} = -\frac{\Omega}{\sin(\pi - \alpha)}, \quad T_{14} = \frac{\Omega}{\cos(\pi - \alpha)}$$

$$T_{15} = -\frac{\Omega}{\cos(\pi - \alpha)}, \quad T_{16} = -\frac{\Omega}{\sin(\pi - \alpha)}, \quad T_{17} = \frac{0.5[k - 2\Omega^2]}{\cos(\pi - \alpha)}$$

$$T_{18} = \frac{0.5[k - 2\Omega^2]}{\sin(\pi - \alpha)}, \quad T_{19} = \frac{0.5[2\Omega^2 - k]}{\sin(\pi - \alpha)}, \quad T_{1,10} = \frac{0.5[k - 2\Omega^2]}{\cos(\pi - \alpha)}$$

$$T_{21} = \frac{0.5}{\cos(\pi - \alpha)}, \quad T_{22} = -\frac{0.5}{\sin(\pi - \alpha)}, \quad T_{23} = \frac{\Omega}{\sin(\pi - \alpha)}, \quad T_{24} = \frac{\Omega}{\cos(\pi - \alpha)}$$

$$T_{25} = -\frac{\Omega}{\cos(\pi - \alpha)}, \quad T_{26} = \frac{\Omega}{\sin(\pi - \alpha)}, \quad T_{27} = \frac{0.5[k - 2\Omega^2]}{\cos(\pi - \alpha)}$$

$$T_{28} = \frac{0.5[2\Omega^2 - k]}{\sin(\pi - \alpha)}, \quad T_{29} = \frac{0.5[k - 2\Omega^2]}{\sin(\pi - \alpha)}, \quad T_{2,10} = \frac{0.5[k - 2\Omega^2]}{\cos(\pi - \alpha)}$$

$$k = \frac{\mu + Q}{\gamma}, \quad q^T = [\ddot{a}_1 \ddot{b}_1 \dot{a}_1 \dot{b}_1 \dot{z}_1 \dot{y}_1 a_1 b_1 z_1 y_1]$$

Используя зависимость (10) получим для уравнений (6), (7):

$$\ddot{a}_j + 2j\Omega\dot{b}_j - 2\Omega\dot{z}_j + \left[\frac{\mu j^4 + Q}{\gamma} - (1 + j^2)\Omega^2 \right] a_j + \left[\frac{\mu j^3 + Qj}{\gamma} - 2j\Omega^2 \right] y_j = C_j T q$$

$$\ddot{b}_j - 2j\Omega\dot{a}_j - 2\Omega\dot{y}_j + \left[\frac{\mu j^4 + Q}{\gamma} - (1 + j^2)\Omega^2 \right] b_j + \left[2j\Omega^2 - \frac{\mu j^3 + Qj}{\gamma} \right] z_j = S_j T q$$

где векторы $C_j = [\cos(j(\pi - \alpha)) \cos(j(\pi + \alpha))]$, $S_j = [\sin(j(\pi - \alpha)) \sin(j(\pi + \alpha))]$ ($j = 2, 3, \dots, N$).

Воспользуемся условиями связи (3), (4) для исключения неизвестных a_N , b_N и их производных. Так как $\varphi_i = \Omega t$, то эти условия примут вид

$$a_0 + \sum_{i=1}^N [a_i \cos(i(\pi - \alpha)) + b_i \sin(i(\pi - \alpha))] = 0$$

$$a_0 + \sum_{i=1}^N [a_i \cos(i(\pi + \alpha)) + b_i \sin(i(\pi + \alpha))] = 0$$

Преобразуем их

$$a_N \cos(N(\pi - \alpha)) + b_N \sin(N(\pi - \alpha)) = -a_0 - \sum_{i=1}^{N-1} [a_i \cos(i(\pi - \alpha)) + b_i \sin(i(\pi - \alpha))]$$

$$a_N \cos(N(\pi + \alpha)) + b_N \sin(N(\pi + \alpha)) = -a_0 - \sum_{i=1}^{N-1} [a_i \cos(i(\pi + \alpha)) + b_i \sin(i(\pi + \alpha))]$$

Обозначим матрицы

$$R = \begin{bmatrix} \cos(N(\pi - \alpha)) \sin(N(\pi - \alpha)) \\ \cos(N(\pi + \alpha)) \sin(N(\pi + \alpha)) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$M = \begin{bmatrix} -1 - \cos(\pi - \alpha) \dots - \cos((N-1)(\pi - \alpha)) - \sin(\pi - \alpha) \dots - \sin((N-1)(\pi - \alpha)) \\ -1 - \cos(\pi + \alpha) \dots - \cos((N-1)(\pi + \alpha)) - \sin(\pi + \alpha) \dots - \sin((N-1)(\pi + \alpha)) \end{bmatrix}$$

вектор переменных $p^T = [a_0 \ a_1 \ a_2 \dots \ a_{N-1} \ b_1 \ b_2 \dots \ b_{N-1}]$.

Тогда $a_N = w_1 p$, $b_N = w_2 p$, $\dot{a}_N = w_1 \dot{p}$, $\dot{b}_N = w_2 \dot{p}$, $\ddot{a}_N = w_1 \ddot{p}$, $\ddot{b}_N = w_2 \ddot{p}$, где w_1, w_2 — соответственно первая и вторая строки матрицы $W = RM$. Обозначим вектор $E_1 = [1 \ 1]$. Тогда $\lambda_1 + \lambda_2 = -\pi \gamma D q$, где $D = -E_1 T$.

Обозначим $F_j = -C_j T$, $L_j = -S_j T$.

Используя полученные зависимости дифференциальные уравнения (5), (6), (7), (8), (9) можно записать в окончательной форме для определения собственных частот

колебаний вращающегося на двух опорах кольца

$$2\ddot{a}_0 + D_1\dot{a}_1 + D_2\dot{b}_1 + D_3\dot{a}_1 + D_4\dot{b}_1 + D_5\dot{z}_1 + D_6\dot{y}_1 + 2(Q/\gamma - \Omega^2)a_0 + D_7a_1 + D_8b_1 + D_9z_1 + D_{10}y_1 = 2\Omega^2r$$

$$F_{j1}\ddot{a}_1 + \ddot{a}_j + F_{j2}\dot{b}_1 + F_{j3}\dot{a}_1 + F_{j4}\dot{b}_1 + 2j\Omega\dot{b}_j + F_{j5}\dot{z}_1 - 2\Omega\dot{z}_j + F_{j6}\dot{y}_1 + F_{j7}a_1 + \left[\frac{\mu j^4 + Q}{\gamma} - \Omega^2(1 + j^2) \right] a_j + F_{j8}b_1 + F_{j9}z_1 + F_{j10}y_1 + \left[\frac{\mu j^3 + Qj}{\gamma} - 2j\Omega^2 \right] y_j = 0$$

($j = 2, 3, \dots, N-1$)

$$w_1\ddot{p} + 2N\Omega w_2\dot{p} - 2\Omega\dot{z}_N + \left[\frac{\mu N^4 + Q}{\gamma} - \Omega^2(1 + N^2) \right] w_1p + \left[\frac{\mu N^3 + QN}{\gamma} - 2N\Omega^2 \right] y_N + F_Nq = 0$$

$$L_{j1}\ddot{a}_1 + L_{j2}\dot{b}_1 + \dot{b}_j + L_{j3}\dot{a}_1 + L_{j4}\dot{b}_1 - 2j\Omega\dot{a}_j + L_{j5}\dot{z}_1 - 2\Omega\dot{y}_j + L_{j6}\dot{y}_1 + L_{j7}a_1 + L_{j8}b_1 + \left[\frac{\mu j^4 + Q}{\gamma} - \Omega^2(1 + j^2) \right] b_j + L_{j9}z_1 + L_{j10}y_1 + \left[2j\Omega^2 - \frac{\mu j^3 + Qj}{\gamma} \right] z_j = 0$$

($j = 2, 3, \dots, N-1$)

$$w_2\ddot{p} - 2N\Omega w_1\dot{p} - 2\Omega\dot{y}_N + \left[\frac{\mu N^4 + Q}{\gamma} - \Omega^2(1 + N^2) \right] w_2p + \left[2N\Omega^2 - \frac{\mu N^3 + QN}{\gamma} \right] z_N + L_Nq = 0$$

$$\ddot{z}_j + 2\Omega\dot{a}_j + 2j\Omega\dot{y}_j + \left[2j\Omega^2 - \frac{\mu j^3 + Qj}{\gamma} \right] b_j + \left[\frac{j^2(\mu + Q)}{\gamma} - \Omega^2(1 + j^2) \right] z_j = 0$$

$$\ddot{y}_j + 2\Omega\dot{b}_j - 2j\Omega\dot{z}_j + \left[\frac{\mu j^3 + Qj}{\gamma} - 2j\Omega^2 \right] a_j + \left[\frac{(\mu + Q)j^2}{\gamma} - \Omega^2(1 + j^2) \right] y_j = 0$$

($j = 1, 2, \dots, N-1$)

$$\ddot{z}_N + 2\Omega w_1\dot{p} + 2N\Omega\dot{y}_N + \left[2N\Omega^2 - \frac{\mu N^3 + QN}{\gamma} \right] w_2p + \left[\frac{N^2(\mu + Q)}{\gamma} - \Omega^2(1 + N^2) \right] z_N = 0$$

$$\ddot{y}_N + 2\Omega w_2\dot{p} - 2N\Omega\dot{z}_N + \left[\frac{\mu N^3 + QN}{\gamma} - 2N\Omega^2 \right] w_1p + \left[\frac{(\mu + Q)N^2}{\gamma} - \Omega^2(1 + N^2) \right] y_N = 0$$

Полученную систему линейных дифференциальных уравнений можно записать

$$K_2\ddot{V} + K_1\dot{V} + K_0V = A$$

$$V^T = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{N-1} \ b_1 \ \dots \ b_{N-1} \ z_1 \ \dots \ z_N \ y_1 \ \dots \ y_N]$$

Решая частотное уравнение данной системы получим значения требуемых частот.

Для проверки точности полученных зависимостей был проведен физический эксперимент. Кольцо радиуса средней линии $r = 0.18619$ м, толщиной $b = 1.2073 \cdot 10^{-3}$ м,

шириной $a = 0.0605$ м и модулем упругости материала $E = 1.1857 \cdot 10^{11}$ Н/м² вращалось на двух роликовых опорах. Вибратором с регулируемой частотой возбуждались колебания в кольце. В момент возникновения колебаний с резонансной частотой сигнал о перемещениях кольца с помощью магниторезистивного датчика и аналого-цифрового преобразователя записывался в ЭВМ. В таблице 1 представлены результаты эксперимента (ω_1^* , ω_2^*) и расчетов для случаев использования гипотез нерастяжимой (ω_1^0 , ω_2^0) и растяжимой (ω_1^1 , ω_2^1) средней линии. Угол α между опорами задан в градусах, угловая скорость вращения Ω в рад/с, первая ω_1 и вторая ω_2 собственные частоты кольца даны в рад/с. При расчетах число гармоник бралось $N = 8$.

α	Ω	ω_1^*	ω_2^*	ω_1^0	ω_2^0	ω_1^1	ω_2^1
26.296	0	35.16	92.10	40.44	83.41	41.12	97.10
31.203	0	37.68	99.14	42.64	90.51	43.74	102.14
26.296	0.42	47.10	87.92	40.44	83.41	41.03	96.92
26.296	0.55	43.96	94.20	40.43	83.38	40.95	96.83
31.303	0.54	37.68	104.06	42.64	90.48	43.68	102.01
31.203	2.10	36.76	102.60	42.50	90.20	43.57	101.91

Сравнение результатов эксперимента с теоретическими расчетами позволяет сделать вывод, что учет растяжимости средней линии для кольца данной геометрии дает более высокое значение первой и особенно второй частот, что хорошо видно для случая $\Omega = 0$.

Необходимо отметить, что при эксперименте возникала проблема фиксации момента возникновения резонансных частот, особенно ω_1 , так как при приближении частоты возбуждающей силы к этой резонансной частоте возникали неустойчивые колебания большой амплитуды. Вначале происходил поочередный отрыв кольца от точек опор, а затем оно сходило с опор. Кроме того на точность определения резонансных частот повлияли помехи, вносимые вибратором. Данным обстоятельством объясняется разброс значений резонансных частот, полученных в экспериментах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
2. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 325 с.
3. Полунина А.И. Математическое моделирование динамики упругого вращающегося кольца при наличии двух опор // Изв. АН. МГТ. 1999. № 6. С. 153–158.

Белгород

Поступила в редакцию
5.02.1998