МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2001

УДК 539.3:534.1

© 2001 г. Е.З. КОРОЛЬ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ МАЛЫХ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ОРТОТРОПНЫХ КРУГОВЫХ ПЛАСТИН

Модели цилиндрически ортотропных круговых пластин широко используются при расчетах на прочность зеркал радиоантенн, лазерных устройств и пр. Точные решения для осесимметричного изгиба изотропных пластин приведены в [1–3], для общего случая решения получены в работах Короля Е.З. и др.[1], а для задач о продольных и поперечных колебаниях общего вида решения отсутствуют.

1. Основные положения и уравнения задачи. Рассматривается круговая (кольцевая или сплошная) тонкая пластина постоянной плотности γ, толщины h, внешнего ($r = a$) и внутреннего ($r = b$) радиусов в полярной системе координат. Пластина свободна от внешних нагрузок. Линейно-упругие деформации пластины малы, справедливы геометрические соотношения Киргоффа – Лява, а также условия обобщенного плоского напряженного состояния. Главные оси цилиндрической ортотропии совпадают с цилиндрической системой координат, связанной со срединной (базовой) поверхностью. Поверхности, эквидистантные срединной, изгибаются подобным образом так, что параметры Ляме и радиусы кривизны их совпадают. Внутренние слои пластины не оказывают давления друг на друга. Влияние продольных усилий на изгиб пластины пренебрежимо мало. Кинематические условия опирания контуров такие, что все задающие их функции представимы рядами Фурье по окружной координате θ. Требуется определить собственные частоты свободных продольных и поперечных колебаний.

Уравнения динамики для малых продольно-поперечных смещений цилиндрически ортотропных тонких упругих круговых пластин постоянной толщины при малых деформациях относительно радиальных $\overline{u}(\rho,\theta,t) = u/a$ и кольцевых (тангенциальных) $\overline{v}(\rho,\theta,t) = v/a$ смещений, отнесенных к радиусу a, и прогиба срединной поверхности $\overline{w}(\rho,\theta,t) = w/h$, отнесенного к толщине h, имеют вид (см. [1–3] сноски на стр. 1, далее черту над величинами $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{z}$ и $\overline{w}$ опускаем).

Для продольных смещений в радиальном и кольцевом направлениях (связная система из двух уравнений):

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{c}{\rho^2}u+\frac{d}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right]+(\mu_{21}+d)\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial\rho\partial\theta}-\frac{c+d}{\mu_{21}+d}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right]=\frac{\gamma a}{B_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\mu_{21}+d}{d}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}+\frac{c+d}{\mu_{21}+d}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]+\left[\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}-\frac{c}{d}\frac{1}{\rho^2}v+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right]=\frac{\gamma a}{B_3}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

---

[1] *Король Е.З.* Краевые задачи изгиба цилиндрически ортотропных круговых пластин на упругом неоднородном основании // Тез. докл. 4-ой Междунар. конф. по механике неоднородных структур. Тернополь. 1995. С. 165–166; *Григолюк Э.И., Король Е.З., Измайлова М.Е.* Изгиб тонких ортотропных круговых пластин на упругом основании. М.: НИИ Механики МГУ. 1997. 89 с. Деп. ВИНИТИ 07.10.97, N2974 В-97; *Король Е.З.* Фундаментальная система решений дифференциальных уравнений N-го порядка бесселева типа и их приложения в МТДТ. Ч. I. Цилиндрические функции N-го порядка. Обобщение формул Неймана – Вебера – Шлефли. М.: НИИ Механики МГУ. 1998. 78 с. Деп. ВИНИТИ 03.04.98, N990-В98.

для поперечных смещений при изгибе (несвязное одно уравнение):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial\rho^4}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial^3 w}{\partial\rho^3}-\frac{c}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}+\frac{c}{\rho^3}\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{c}{\rho^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}+\frac{2(\mu_{21}+2d)}{\rho^2}\frac{\partial^4 w}{\partial\rho^2\partial\theta^2}-$$
$$-\frac{2(\mu_{21}+2d)}{\rho^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\rho\partial\theta^2}+\frac{2(c+\mu_{21}+2d)}{\rho^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}=\frac{\gamma a^4 h}{D_1}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

где $\rho = r/a$ – безразмерная радиальная координата $\rho \leqslant 1$; $\bar{z}=z/h$ – относительная координата по толщине $-1/2 \leqslant z \leqslant 1/2$; $c = E_2/E_1 = B_2/B_1 = D_2/D_1$ – коэффициент ортотропии, равный отношению модуля Юнга E_2 в кольцевом к модулю E_1 в радиальном направлениях; $B_i = E_i h/(1-\mu_{21}\mu_{12})$ – жесткости на растяжение-сжатие ($i = 1, 2$); $D_i = E_i h^3/12(1-\mu_{12}\mu_{21})$ – изгибные жесткости ($i = 1, 2$); $2d = 2G_{12}(1-\mu_{21}\mu_{12})/E_1 = B_3/B_1 = D_3/D_1$ – коэффициент сдвиговой ортотропии; $e = \mu_{21} + 2d$ – приведенный коэффициент сдвиговой ортотропии; μ_{21} и μ_{12} – коэффициенты поперечной деформации в направлении 2 (или 1) при растяжении (сжатии) в направлении 1 (или 2) (коэффициенты Пуассона); $B_3 = G_{12}h$ – сдвиговая жесткость; $D_3 = 2G_{12}h^3/12$ – крутильная жесткость.

2. Разрешающая система уравнений. Рассмотрим установившиеся свободные колебания круговых пластин, когда все точки совершают периодические колебания с круговыми частотами ω_1 в продольном и ω_3 в поперечном направлениях (внешние распределенные нагрузки $q_1(r,\theta,t) = q_2(r,\theta,t) = q_n(r,\theta,t) = 0$ отсутствуют). При этом

$$u(\rho,\theta,t)=u^*(\rho,\theta)\sin\omega_1 t,\quad v(\rho,\theta,t)=v^*(\rho,\theta)\sin\omega_1 t,$$
$$w(\rho,\theta,t)=w^*(\rho,\theta)\sin\omega_3 t. \quad (2.1)$$

Представив искомые функции $\psi(\rho,\theta,t)=\{u^*,\ v^*,\ w^*\}$ Фурье-разложениями по окружной координате

$$\psi^*(\rho,\theta)=\psi_0^*(\rho)/2+\sum_{p=1}^{\infty}[\psi_{cp}^*(\rho)\cos p\theta+\psi_{sp}^*(\rho)\sin p\theta] \quad (2.2)$$

где функции $\psi_{cp}^*(\rho)$ и $\psi_{sp}^*(\rho)$ – коэффициенты Фурье-разложения при косинусах (символ c) и синусах (символ s) зависят от номера гармоники p и от переменной ρ, исходная система уравнений в частных производных сводится к однородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого (четвертого и четвертого) порядка для одной группы компонент Фурье-разложения при косинусах

$$B_{11}^{(2)}\{u_{cp}\}+\lambda_{12}^s E_{12}^{(1)}\{v_{sp}\}=0 \quad (2.3)$$
$$\lambda_{21}^c E_{21}^{(1)}\{u_{cp}\}+B_{22}^{(2)}\{v_{sp}\}=0,\quad B_{33}^{(4)}\{w_{cp}\}=0$$

и аналогичная для другой (при синусах), отличающаяся только знаками коэффициентов $\lambda_{12}^s=-\lambda_{12}^c$ и $\lambda_{21}^s=-\lambda_{21}^c$. Здесь использованы следующие обозначения:

$$E_{11}^{(2)}\{u\}=\rho^2\frac{d^2u}{d\rho^2}+\rho\frac{du}{d\rho}-\frac{c+dp^2}{\mu_{21}+d}u=\prod_{n=1}^{2}(D-\nu_{11(n)})\{u\}$$
$$B_{11}^{(2)}\{u\}=[E_{11}^{(2)}+k_u^2\rho^2]\{u\}$$
$$E_{21}^{(1)}\{u\}=\rho\frac{du}{d\rho}+\frac{c+d}{\mu_{21}+d}u=(D-\nu_{21(1)})\{u\}$$

$$E_{22}^{(2)}\{v\} = \rho^2 \frac{d^2 v}{d\rho^2} + \rho \frac{dv}{d\rho} - \frac{c + dp^2}{d} v = \prod_{n=1}^{2} (D - \nu_{22(n)})\{v\}$$

$$B_{22}^{(2)}\{v\} = [E_{11}^{(2)} + k_v^2 \rho^2]\{v\}, \quad B_{33}^{(4)}\{w\} = [E_{33}^{(4)} + k_w^4 \rho^4]\{w\}$$

$$E_{33}^{(4)}\{w\} = \rho^4 \frac{d^4 w}{d\rho^4} + 2\rho^3 \frac{d^3 w}{d\rho^3} - A_3 \rho^2 \frac{d^2 w}{d\rho^2} + A_3 \rho \frac{dw}{d\rho} + B_3 w = \prod_{n=1}^{4} (D - \nu_{33(n)})\{w\}$$

$$D\{(u, v, w)\} = \rho \frac{d(u, v, w)}{d\rho}, \quad D^{(n)}\{(u, v, w)\} \equiv \rho \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \frac{d}{d\rho} \left[\dots \left(\rho \frac{d(u, v, w)}{d\rho} \right) \right] \right\}$$

$$A_3 = c + 2ep^2, \quad B_3 = [cp^2 - 2(c + e)]p^2, \quad \lambda_{12}^{s,c} = \pm p(\mu_{21} + d), \quad \lambda_{21}^{c,s} = \mp p \frac{\mu_{21} + d}{d}$$

$$k_u^2 = \frac{\gamma a h}{B_1} \omega_1^2, \quad k_v^2 = \frac{\gamma a h}{B_3} \omega_1^2, \quad k_w^4 = \frac{\gamma a^4 h}{D_1} \omega_3^2$$

$$\nu_{11(1,2)} = \pm\sqrt{c + dp^2}, \quad \nu_{12(1)} = \frac{c + d}{\mu_{21} + d}$$

$$\nu_{21(1)} = -\frac{c + d}{\mu_{21} + d}, \quad \nu_{22(1,2)} = \pm\sqrt{\frac{c + dp^2}{d}}$$

Левые части разрешающей системы уравнений (2.3) содержат бесселевы операторы второго порядка $B_{11}^{(2)}$, $B_{22}^{(2)}$ и $B_{33}^{(4)}$ и эйлеровы операторы первого порядка $E_{12}^{(1)}$ и $E_{21}^{(1)}$. Здесь и далее верхний знак $(*)$ над искомыми функциями $\overset{*}{u}_{cp}$, $\overset{*}{v}_{sp}$, $\overset{*}{w}_{cp}$ и им подобными опускаем.

Наряду с системой (2.3) из двух связных второго порядка и одного несвязного четвертого порядка уравнений будем использовать систему, состоящую из четырех связных первого порядка, к которой сводятся первые два, и одного несвязного четвертого порядка

$$\begin{aligned} &du_1 / d\rho = a_{12} u_2, \quad du_2 / d\rho = a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + a_{23} u_3 + a_{24} u_4 \\ &du_3 / d\rho = a_{34} u_4, \quad du_4 / d\rho = a_{41} u_1 + a_{42} u_2 + a_{43} u_3 + a_{44} u_4 \end{aligned} \qquad (2.4)$$

$$B_{33}^{(4)}\{w_{cp}\} = 0$$

$$u_1 = u, \quad u_2 = \frac{du}{d\rho}, \quad u_3 = v, \quad u_4 = \frac{dv}{d\rho}, \quad a_{12}(\rho) = a_{34}(\rho) = 1$$

$$a_{11}(\rho) = a_{13}(\rho) = a_{14}(\rho) = a_{31}(\rho) = a_{32}(\rho) = a_{33}(\rho) = 0, \quad a_{23}(\rho) = \frac{\lambda_{12}^s \nu_{12(1)}}{\rho^2}$$

$$a_{21}(\rho) = \frac{-\nu_{11(1)}\nu_{11(2)}}{\rho^2} - k_u^2, \quad a_{22}(\rho) = \frac{\nu_{11(1)} + \nu_{11(2)} - 1}{\rho}, \quad a_{24}(\rho) = -\frac{\lambda_{12}^s}{\rho}$$

$$a_{41}(\rho) = \frac{\lambda_{21}^c \nu_{21(1)}}{\rho^2}, \quad a_{42}(\rho) = -\frac{\lambda_{21}^c}{\rho}, \quad a_{43}(\rho) = -\frac{\nu_{22(1)}\nu_{22(2)}}{\rho^2} - k_v^2$$

$$a_{44}(\rho) = \frac{\nu_{22(1)} + \nu_{22(2)} - 1}{\rho}$$

Таким образом, разрешающие однородные системы (2.3) или (2.4), описывающие установившиеся свободные колебания, представляют систему обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичную для описания продольно-поперечного изгиба ортотропных пластин на упругом (винклеровом) основании с коэффициентами "постели" k_u, k_v, k_w, пропорциональными квадрату круговой частоты. Частотное уравнение содержит все частные решения – фундаментальные решения однородной системы.

3. Общие решения. Общие решения однородных уравнений (2.3) или (2.4) – есть суммы частных (фундаментальных) решений с произвольными постоянными A_{cpl}, B_{cpl}, определяемыми граничными условиями

$$u_{cp}(\rho)=\sum_{l=1}^{4}A_{cpl}\bar{u}_{cpl}(\rho),\quad v_{sp}(\rho)=\sum_{l=1}^{4}A_{cpl}\bar{v}_{spl}(\rho)$$
$$w_{cp}(\rho)=\sum_{l=1}^{4}B_{cpl}\bar{w}_{cpl}(\rho) \tag{3.1}$$

Поскольку разрешающие системы смешанного типа (содержат бесселевы и эйлеровы дифференциальные операторы), то частные (фундаментальные решения) представляются в виде обобщенных степенных рядов

$$\psi_l=\rho^{\nu_l}\left(C_{0l}+\sum_{m=1}^{\infty}C_{ml}\rho^m\right) \tag{3.2}$$

характеристические показатели ν_l которых определяются из соответствующих характеристических уравнений: для третьего уравнения систем – уравнения чисто бесселева типа, для первых двух – системы уравнений смешанного (в конечном счете – бесселева) типа.

3.1. Система фундаментальных решений. Фундаментальные решения системы двух связных уравнений бесселева типа второго порядка и одного несвязного уравнения бесселевого типа четвертого порядка в соответствии с формой (3.2) содержат характеристические числа ν_l, являющиеся корнями характеристических (вековых) уравнений. Для указанных выше несвязанных системы из двух разрешающих уравнений бесселева типа второго порядка и одного разрешающего уравнения бесселева типа четвертого порядка эти характеристические или вековые уравнения формируются следующим образом.

3.2. Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения четвертого порядка. Для третьего однородного уравнения системы (2.3), представляющего собой сумму эйлерова оператора $E_{33}^{(4)}$ четвертого порядка и бесселева добавка $k_w^4\rho^4 w$ характеристическое (вековое) уравнение определяется эйлеровым оператором и его характеристическими параметрами (характеристические числа и характеристические параметры равны). Представив эйлеровы операторы в полиномиальной форме как это представлено выше, имеем биквадратное вековое уравнение

$$(\nu-1)^4-(1+A_3)(\nu-1)^2+(A_3+B_3)=\prod_{l=1}^{4}(\nu-\nu_{33(l)})=0 \tag{3.3}$$

корни которого ν_l совпадают с характеристическими показателями $\nu_{33(l)}(l=\overline{1,4})$:

$$\nu_{(1,4)}=\nu_{33(1,4)}=1\pm\lambda_{33(1)},\qquad \nu_{(2,3)}=\nu_{33(2,3)}=1\pm\lambda_{33(2)}$$
$$\lambda_{33(1,2)}=\sqrt{\frac{1+A_3}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{1-A_3}{2}\right)^2-B_3}}$$

Здесь нумерация корней характеристических уравнений или, что тоже, характеристических параметров $\nu_{33(l)}$ принята такой, чтобы при $c\geqslant 1$ их значения располагались в убывающем порядке с возрастанием номера. Отметим, что при $p = 1$ и c произвольном (когда $\lambda_{33(1)} = 1+\sqrt{c+2e}$, $\lambda_{33(2)} = 0$) два корня $\nu_{33(2)} = \nu_{33(3)} = 1$ совпадают, а при $p = 0$ и $c = 1$ (когда: $\lambda_{33(1)} = \lambda_{33(2)} = 1$) – совпадают две пары корней: $\nu_{33(1)} = \nu_{33(2)} = 2$ и $\nu_{33(3)} = \nu_{33(4)} = 0$. Первому случаю соответствует изгиб по первой гармонике, а второму – осесимметричные формы изгиба.

3.3. Характеристическое уравнение для системы двух дифференциальных уравнений. Характеристическое уравнение для системы (2.3) бесселева типа или четырех системы (2.4) тоже бесселева типа вековое уравнение – биквадратное, полученное из детерминанта системы заменой в соответствующих эйлеровых операторах величины D на ν:

$$P(\nu) = \det\begin{vmatrix} E_{11}^{(2)} & \lambda_{12}^{s}E_{12}^{(1)} \\ \lambda_{21}^{c}E_{21}^{(1)} & E_{22}^{(2)} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\prod_{n=1}^{2}(\nu-\nu_{11(n)})\prod_{k=1}^{2}(\nu-\nu_{22(k)})\right) - \lambda_{12}^{s}\lambda_{21}^{c}(\nu-\nu_{12(1)})(\nu-\nu_{21(1)})) = 0$$

или сокращенно

$$\nu^4 - A_4\nu^2 + B_4 = 0 \tag{3.4}$$

$$\nu_{44(1,4)} = \pm\lambda_{44(1)}, \quad \nu_{44(2,3)} = \pm\lambda_{44(2)}, \quad \lambda_{44(1,2)} = \sqrt{A_4/2 \pm \sqrt{(A_4/2)^2 - B_4}}$$

$$A_4 = (c+dp^2)+(c+dp^2)/d + p^2(\mu_{21}+d)^2/d, \quad B_4 = (c+dp^2)^2/d - p^2(c+d)^2/d$$

Характеристические корни при $p \geqslant 2$ – простые (некратные и их попарные разности некратны двум). При $p = 1$ и произвольных c (когда $\lambda_{44(1)} = (c + d) + (c + d)/d + (\mu_{21} + d)^2/d$, $\lambda_{44(2)} = 0$) имеем два одинаковых характеристических числа $\nu_{44(2)} = \nu_{44(3)} = 0$, а при $p = 0$ (когда $\lambda_{44(1)} = \sqrt{c}$, $\lambda_{44(2)} = \sqrt{c/d}$) – система распадается на два несвязных уравнения с независимыми характеристическими числами. Очевидно, что фундаментальные решения находятся в зависимости от кратности корней, в частности, некратным корням соответствуют простые решения в виде обобщенных степенных рядов, а кратным – решения представляются обобщенными степенными рядами со степенями логарифмов, равными показателю кратности корней. Классификацию решений уравнений N-го порядка будем проводить по методике, аналогичной методике классификации решений уравнений Бесселя второго порядка.

4. Классификация решений. Мультипликаторы характеристических корней. Для классификации типа решений введем антисимметричную матрицу мультипликаторов, компоненты которой образуются из попарных разностей характеристических чисел (корней, показателей), расположенных в убывающем порядке и отнесенных к показателю степени S бесселева добавка. Компоненты мультипликаторов образуют возрастающую последовательность, между которыми при $l \geqslant k \geqslant n$ справедливы соотношения

$$\mu_{nk} = (\nu_n - \nu_k)/S, \quad \mu_{kl} = -\mu_{nk} + \mu_{nl} \quad (n,k,l) = \overline{(1,4)} \tag{4.1}$$

например, для корней первого векового уравнения $\nu_{33(n)}$ и $\nu_{33(k)}$ для $(n, k) = (1, 4)$, отнесенных к показателю степени $S = 4$ и $S = 2$ для второго (в рассматриваемых уравнениях он совпадает с порядком уравнения) имеем $\nu_{33(n)} \geqslant \nu_{33(k)}$ при $k \geqslant n$, а матрицы мультипликаторов есть

$$\mu_{33(nk)} = \tfrac{1}{4}(\nu_{33(n)} - \nu_{33(k)}), \quad \mu_{44(nk)} = \tfrac{1}{2}(\nu_{44(n)} - \nu_{44(k)}) \quad (n,k) = \overline{(1,4)}$$

Наддиагональные компоненты матрицы $|\mu_{33}|$ всегда положительные, диагональные –

нулевые, а поддиагональные отрицательные. Из структуры решений следует, что коэффициенты рядов содержат в знаменателе произведения $\prod_{k=1}^{4}\prod_{j=1}^{m}(\mu_{nk}+j)$ сумм мультипликаторов μ_{nk} и натуральных чисел $j \in N$. Если мультипликатор принимает целочисленное отрицательное или нулевое значение, то коэффициенты рядов обращаются в бесконечность. В соответствии с этим будем различать строки мультипликаторов простые и особые: простые содержат только дробные поддиагональные компоненты, а особые – целочисленные и нулевые (недиагональные). Род (или кратность) строки определим числом ее особых элементов. Две строки n-ая простая и k-ая особая называются сопряженными по мультипликатору $\mu_{nk} = -\mu_{kn} = m_{nk} = 0$, 1, 2, … Первая (простая) называется основной производящей, а вторая – сопряженно-производящей. Две строки, первая (простая) основная производящая и первая (особая) сопряженно-производящая, первого рода (имеющая только один особый элемент) образуют корневую пару, через которую выражаются все кратные решения второго, третьего и т.д. рода. Корневых пар может быть несколько и для каждой соответствующее число родов. Простой строке соответствует решение первого рода, а особым – решения второго, третьего и т.д. рода. Для рассматриваемых систем имеем чаще всего решения первого и второго и реже третьего родов.

5. Решения первого рода. Используя стандартную процедуру [1, 2, 4–7] определения коэффициентов разложения обобщенного степенного ряда (3.2) для случая простых мультипликаторов, решения первого рода представляются так

для прогиба $\overline{w}_{cpn}$ $n=\overline{(1,4)}$:

$$\overline{w}_{cpn}^{(1)} = \rho^{\nu_{33(n)}}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{k_w\rho}{4}\right)^{4m}\frac{1}{\prod_{k=1}^{4}\prod_{j=1}^{m}(\mu_{33(kn)}+j)}\right) \tag{5.1}$$

для смещений $\overline{u}_{cpn}$ и $\overline{v}_{spn}$ при $(n=\overline{1,4})$:

$$\overline{u}_{cpn}^{(1)} = \rho^{\nu_{44(n)}}\left(C_{1,n}^{(0)}+\sum_{m=1}^{\infty}C_{1,n}^{(m)}\rho^{2m}\right), \quad \overline{v}_{spn}^{(1)} = \rho^{\nu_{44(n)}}\left(C_{2,n}^{(0)}+\sum_{m=1}^{\infty}C_{2,n}^{(m)}\rho^{2m}\right) \tag{5.2}$$

где коэффициенты $C_{1,n}^{(m)}$ и $C_{2,n}^{(m)}$ при $m \geqslant 1$ даются рекуррентными соотношениями

$$C_{1,n}^{(m)} = \alpha_{11,n}^{(m)}C_{1,n}^{(m-1)} + \alpha_{12,n}^{(m)}C_{2,n}^{(m-1)}, \quad C_{2,n}^{(m)} = \alpha_{21,n}^{(m)}C_{1,n}^{(m-1)} + \alpha_{22,n}^{(m)}C_{2,n}^{(m-1)} \tag{5.3}$$

или

$$\| C_n^{(m)} \| = \| \alpha_n^{(m)} \| \ \| C_n^{(m-1)} \| = \prod_{j=1}^{m} \| \alpha_n^{(j)} \| \ \| C_n^{(0)} \|$$

$$\alpha_{11,n}^{(m)} = -k_u^2\frac{\prod_{l=1}^{2}(\nu_{44(n)}-\nu_{22(l)}+2m)}{\prod_{l=1}^{4}(\nu_{44(n)}-\nu_{44(l)}+2m)}, \quad \alpha_{12,n}^{(m)} = \lambda_{12}^{s}k_v^2\frac{(\nu_{44(n)}-\nu_{12(l)}+2m)}{\prod_{l=1}^{4}(\nu_{44(n)}-\nu_{44(l)}+2m)}$$

$$\alpha_{21,n}^{(m)} = \lambda_{21}^{c}k_u^2\frac{(\nu_{44(n)}-\nu_{21(l)}+2m)}{\prod_{l=1}^{4}(\nu_{44(n)}-\nu_{44(l)}+2m)}, \quad \alpha_{22,n}^{(m)} = -k_v^2\frac{\prod_{l=1}^{2}(\nu_{44(n)}-\nu_{11(l)}+2m)}{\prod_{l=1}^{4}(\nu_{44(n)}-\nu_{44(l)}+2m)}$$

$$C_{1,n}^{(0)} = C_{1,n}^{(0)}, \quad C_{2,n}^{(0)} = \frac{\prod_{l=1}^{2}(\nu_{44(n)}-\nu_{11(l)})}{\lambda_{12}^{s}(\nu_{44(n)}-\nu_{12(1)})}C_{1,n}^{(0)}$$

Таким образом, для определения поперечных смещений имеем четыре произвольных постоянных интегрирования B_{cpn}, а для продольных смещений – четыре произвольных постоянных $C_{1,n}^{(0)} = A_{cpn}$ $(n=\overline{1,4})$, определяемые из граничных условий.

Аналогичные выражения имеют место для "синус-компонент", отличающиеся только коэффициентом λ_{21}^{c} вместо λ_{12}^{s}.

Очевидно, что для целочисленных мультипликаторов $\mu_{33(nk)} = -\mu_{33(kn)} = m_{nk}$ решения первого рода $\overline{w}_{cpn}$ и $\overline{w}_{cpk}$ линейно зависимы.

6. Линейная зависимость сопряженных решений. Линейная зависимость для целочисленных мультипликаторов устанавливается по "стандартной" процедуре. Для этого используется "нормированная" [2, 4, 8–11] форма представления решений через Г – гамма-функции, а именно

$$\overset{=(1)}{w}_{cpn}(\rho) = \frac{\overline{w}^{(1)}_{cpn}}{\prod_{k=1}^{4}\Gamma(\mu_{33(kn)}+1)} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{k_w\rho}{4}\right)^{4m}\frac{1}{\prod_{k=1}^{4}\Gamma(\mu_{33(kn)}+m+1)}$$

Используя следующие тождества и значения для Г – гамма-функции

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(1) = 0! = 1!, \quad \Gamma(m+1) = m!$$

$$\Gamma(-m) = (-1)^m\frac{\Gamma(0)}{m!} = \pm\infty$$

приходим к линейной зависимости двух сопряженных по параметру $\mu_{33(kn)} = -\mu_{33(nk)} = m_{33(kn)} \in N$-целочисленному мультипликатору

$$\overset{=(1)}{w}_{cpk} = (-1)^{m_{33(nk)}}\left(\tfrac{1}{4}k_w\right)^{4m_{33(nk)}}\overset{=(1)}{w}_{cpn} \tag{6.1}$$

Поэтому для определения решений второго и старших родов используем (см. [1, 3] сноски на стр. 1) обобщенную формулу Неймана – Вебера – Шлефли [4–9], основанную на непрерывной зависимости решений от параметра

$$\overset{=(2)}{w}_{cpk}(\rho) = \pi\lim_{\mu_{33(nk)}\to m_{33(nk)}}\left.\frac{\overset{=(1)}{w}_{cpn}(\rho)\cos\mu_{33(nk)}\pi - \left(\tfrac{1}{4}k_w\right)^{-4m_{33(nk)}}\overset{=(1)}{w}_{cpk}(\rho)}{\sin\mu_{33(nk)}\pi}\right|_{\mu_{33(nk)}=m_{33(nk)}}$$

или после раскрытия неопределенности типа 0/0 по правилу Лопиталя (дифференцируя числитель и знаменатель по параметру $\mu_{33(nk)}$), используем выражение

$$\overset{=(2)}{w}_{cpk}(\rho) = \left.\left(\frac{\partial\overset{=(1)}{w}_{cpn}}{\partial\mu_{33(nk)}} - (-1)^{m_{33(nk)}}\left(\frac{k_w}{4}\right)^{-4m_{33(nk)}}\frac{\partial\overset{=(1)}{w}_{cpk}}{\partial\mu_{33(nk)}}\right)\right|_{\mu_{33(nk)}=m_{33(nk)}} \tag{6.2}$$

Такие решения второго рода определяются по формулам типа (6.2) для каждой корневой пары. Аналогичные формулы представляют решения второго рода для целочисленных мультипликаторов $\mu_{44(nk)}$ второй системы.

7. Решения второго рода. Эти решения для рассматриваемой задачи определим по указанным выше формулам (см. [1, 3] сноски на стр. 1). Для поперечных смещений в случае когда $p = 1$ и $c \neq 1$ имеем $\nu_{33(2)} = \nu_{33(3)} = 1$, а значит $\mu_{33(23)} = \mu_{33(32)} = 0$ и при этом пара решений $\overset{=(1)}{w}_{cp3} = (-1)^{m_{33(23)}}(k_w/4)^{4m_{33(23)}}\overset{=(1)}{w}_{cp2}$ линейно зависимы, а потому получаем

$$\overset{=(2)}{w}_{c13} = \left.\left(\frac{\partial\overset{=(1)}{w}_{c12}}{\partial\mu_{33(23)}} - (-1)^{m_{33(23)}}\left(\frac{k_w}{4}\right)^{-4m_{33(32)}}\frac{\partial\overset{=(1)}{w}_{c13}}{\partial\mu_{33(32)}}\right)\right|_{\mu_{33(23)}=m_{33(32)}=0} \tag{7.1}$$

$$\overset{=(1)}{w}_{c12} = \rho\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{k_w\rho}{4}\right)^{4m}\frac{1}{\prod_{k=1}^{4}\Gamma(\mu_{33(2k)}+m+1)}$$

$$\overset{=(1)}{w}_{c13} = \rho\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{k_w\rho}{4}\right)^{4m}\frac{1}{\prod_{k=1}^{4}\Gamma(\mu_{33(3k)}+m+1)}$$

Рассматривая поперечные смещения во втором случае, когда $c = 1$ и $p = 0$ и при этом $\lambda_{33(1)} = \lambda_{33(2)} = 1$, а $\nu_{33(1)} = \nu_{33(2)} = 2$, $\nu_{33(3)} = \nu_{33(4)} = 0$, имеем нулевые мультипликаторы $\mu_{33(12)} = \mu_{33(21)} = \mu_{33(34)} = \mu_{33(43)} = 0$. В результате получаем две пары линейно зависимых решений первого рода

$$\overset{=(1)}{w}_{c02} = (-1)^{m_{33(12)}} \left(\frac{k_w}{4}\right)^{4m_{33(12)}} \overset{=(1)}{w}_{c01}, \quad \overset{=(1)}{w}_{c04} = (-1)^{m_{33(34)}} \left(\frac{k_w}{4}\right)^{4m_{33(34)}} \overset{=(1)}{w}_{c03}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}
\overset{=(2)}{w}_{c02} &= \left.\left(\frac{\partial \overset{=(1)}{w}_{c01}}{\partial \mu_{33(12)}} - (-1)^{m_{33(12)}} \left(\frac{k_w}{4}\right)^{-4m_{33(12)}} \frac{\partial \overset{=(1)}{w}_{c02}}{\partial \mu_{33(21)}} \right)\right|_{\mu_{33(12)} = m_{33(21)} = 0} \\
\overset{=(2)}{w}_{c04} &= \left.\left(\frac{\partial \overset{=(1)}{w}_{c03}}{\partial \mu_{33(34)}} - (-1)^{m_{33(34)}} \left(\frac{k_w}{4}\right)^{-4m_{33(34)}} \frac{\partial \overset{=(1)}{w}_{c04}}{\partial \mu_{33(43)}} \right)\right|_{\mu_{33(34)} = m_{33(43)} = 0} \\
\overset{=(1)}{w}_{c01} &= \rho^2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k_w \rho}{4}\right)^{4m} \frac{1}{\prod_{k=1}^{4} \Gamma(\mu_{33(1k)} + m + 1)} \\
\overset{=(1)}{w}_{c02} &= \rho^2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k_w \rho}{4}\right)^{4m} \frac{1}{\prod_{k=1}^{4} \Gamma(\mu_{33(2k)} + m + 1)} \\
\overset{=(1)}{w}_{c03} &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k_w \rho}{4}\right)^{4m} \frac{1}{\prod_{k=1}^{4} \Gamma(\mu_{33(3k)} + m + 1)} \\
\overset{=(1)}{w}_{c04} &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k_w \rho}{4}\right)^{4m} \frac{1}{\prod_{k=1}^{4} \Gamma(\mu_{33(4k)} + m + 1)}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Для продольных смещений в случае когда $p = 0$ и c произвольны, имеем $\nu_{44(1)} = -\nu_{44(2)} = \sqrt{c}$, $\nu_{44(3)} = -\nu_{44(4)} = \sqrt{c/d}$ и поэтому для целочисленных значений величин $\sqrt{c}$ и $\sqrt{c/d}$ получим две пары линейно зависимых решений первого рода $\overset{=(1)}{u}_{c01} = (-1)^{m_{44(12)}} (k_u/2)^{2m_{44(12)}} \overset{=(1)}{u}_{c02}$, $\overset{=(1)}{v}_{s01} = (-1)^{m_{44(34)}} (k_v/2)^{2m_{44(34)}} \overset{=(1)}{v}_{c02}$. В результате найдем

$$\begin{aligned}
\overset{=(2)}{u}_{c02} &= \left.\left(\frac{\partial \overset{=(1)}{u}_{c01}}{\partial \mu_{44(12)}} - (-1)^{m_{44(12)}} \left(\frac{k_u}{2}\right)^{-2m_{44(12)}} \frac{\partial \overset{=(1)}{u}_{c02}}{\partial \mu_{44(21)}} \right)\right|_{\mu_{44(12)} = m_{44(21)} = 0}, \\
\overset{=(2)}{v}_{s02} &= \left.\left(\frac{\partial \overset{=(1)}{v}_{s01}}{\partial \mu_{44(34)}} - (-1)^{m_{44(34)}} \left(\frac{k_v}{2}\right)^{-2m_{44(34)}} \frac{\partial \overset{=(1)}{v}_{c02}}{\partial \mu_{44(43)}} \right)\right|_{\mu_{44(34)} = m_{44(43)} = 0}, \\
\overset{=(1)}{u}_{c01} &= \rho^{\sqrt{c}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k_u \rho}{2}\right)^{2m} \frac{1}{\prod_{k=1}^{2} \Gamma(\mu_{44(1k)} + m + 1)} \\
\overset{=(1)}{u}_{c02} &= \rho^{-\sqrt{c}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k_u \rho}{2}\right)^{2m} \frac{1}{\prod_{k=1}^{2} \Gamma(\mu_{44(2k)} + m + 1)}
\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\overset{=(1)}{v}_{s01} = \rho^{\sqrt{\frac{c}{d}}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k_v \rho}{2}\right)^{2m} \frac{1}{\prod_{k=1}^{2} \Gamma(\mu_{44(3k)} + m + 1)}$$

$$\overset{=(1)}{v}_{s01} = \rho^{-\sqrt{\frac{c}{d}}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k_v \rho}{2}\right)^{2m} \frac{1}{\prod_{k=1}^{2} \Gamma(\mu_{44(4k)} + m + 1)}$$

$$\mu_{44(nk)} = \tfrac{1}{2}(\nu_{11(n)} - \nu_{11(k)}), \quad \mu_{22(nk)} = \tfrac{1}{2}(\nu_{22(n)} - \nu_{22(k)})$$

В частных случаях ($c = 1$), а также при ($p = 0, 1$ и $c \neq 1$) эти решения совпадают с известными [1–3] и выражаются в цилиндрических функциях.

8. Постоянные интегрирования A_{cpl}, B_{cpl}. Значения коэффициентов A_{cpl}, B_{cpl} определяются из граничных условий различного типа, представленные компонентами Фурье-разложения:

радиального $u_1(\theta)$; $u_\beta(\theta)$ и тангенциального $v_1(\theta)$, $v_\beta(\theta)$ смещений и прогиба $w_1(\theta)$, $w_\beta(\theta)$ на внешнем ($\rho = 1$) или на внутреннем ($\rho = \beta$) контурах (кинематические условия)

$$\begin{aligned} &u_{cp}(\rho = 1) = u_{1cp}, \quad u_{cp}(\rho = \beta) = u_{\beta cp} \\ &v_{sp}(\rho = 1) = v_{1sp}, \quad v_{sp}(\rho = \beta) = v_{\beta sp} \\ &w_{cp}(\rho = 1) = w_{1cp}, \quad w_{cp}(\rho = \beta) = w_{\beta cp} \end{aligned} \tag{8.1}$$

угла поворота нормали $\partial w(\rho, \theta)/\partial \rho$ (кинематические условия):

$$\frac{dw_{cp}}{d\rho}(\rho = 1) = \vartheta_{1sp}, \quad \frac{dw_{cp}}{d\rho}(\rho = \beta) = \vartheta_{\beta cp} \tag{8.2}$$

удельных нормированных радиальных и касательных усилий, крутящего и изгибающих моментов, а также поперечных нормированных усилий вычисленных по соотношениям линейной термоупругости и нормированных $n_1 = N_1/B_1$, $s_1 = S_1/B_3$, $m_1 = M_1 a^2/D_1 h$, $h_1 = Ha^2/D_3 h$ и $r_1 = R_1 a^3/D_1 h$ (силовые условия):

$$\begin{aligned} &n_{1cp}(\rho = 1) = n_{11cp}, \quad n_{1cp}(\rho = \beta) = n_{1\beta cp} \\ &s_{1sp}(\rho = 1) = s_{11sp}, \quad s_{1sp}(\rho = \beta) = s_{1\beta sp} \\ &m_{1cp}(\rho = 1) = m_{11cp}, \quad m_{1cp}(\rho = \beta) = m_{1\beta cp} \\ &r_{1cp}(\rho = 1) = r_{11cp}, \quad r_{1cp}(\rho = \beta) = r_{1\beta cp} \\ &h_{1sp}(\rho = 1) = h_{11sp}, \quad h_{1sp}(\rho = \beta) = h_{1\beta sp} \end{aligned} \tag{8.3}$$

$$n_1(\rho) = \left[\frac{\partial u}{\partial \rho} + \mu_{21}\left(\frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\right], \quad s_1(\rho) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$m_1(\rho) = -\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \mu_{21}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\right)\right], \quad h_1 = -\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}\right]$$

$$r_1(\rho) = -\left[\frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} - \frac{c}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{\mu_{21} + c}{\rho^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\mu_{21}}{\rho^2}\frac{\partial^3 w}{\partial \rho \partial \theta^2}\right]$$

удельного продольного, касательного и поперечного радиального усилий, радиального и крутящего моментов, пропорциональных соответственно радиальному, окружному и поперечному смещениям, углу поворота и углу крутки на внешнем ($\rho = 1$) или внутреннем ($\rho = \beta$) контурах (условия смешанного типа):

$$n_{1p}(\rho) = \lambda_n u_p(\rho), \quad s_{1p}(\rho) = \lambda_s u_p(\rho), \quad r_{1p}(\rho) = \lambda_r w_p(\rho)$$
$$m_{1p}(\rho) = \lambda_m \vartheta_p(\rho), \quad h_{1p}(\rho) = \lambda_h \vartheta_p(\rho) \tag{8.4}$$
$$\lambda_{(n,s,m,r,h)} = \begin{cases} \lambda_{1(n,s,m,r,h)} & \text{при} \quad \rho = 1 \\ \lambda_{\beta(n,s,m,r,h)} & \text{при} \quad \rho = \beta \end{cases}$$

для сплошной пластины ($\beta = 0$) в центре ($\rho = 0$) ставится условие ограниченности радиальных $u(0, \theta)$, кольцевых $v(0, \theta)$ и поперечных $w(0, \theta)$ смещений соответственно усилий $n_1(0, \theta)$, $s_1(0, \theta)$, $r_1(0, \theta)$, и углов поворота и крутки

$$\lim_{\rho\to 0} u_p(\rho) \leqslant \bar{b}, \quad \lim_{\rho\to 0} v_p(\rho) \leqslant \bar{c}, \quad \lim_{\rho\to 0} w_p(\rho) \leqslant \bar{a} \tag{8.5}$$

Относительно коэффициентов A_{cpl}, B_{cpl} ($l = \overline{1, 4}$) имеем системы алгебраических уравнений четвертого порядка вида

$$\| a_{pkl}(k_u, k_v) \| \, \| A_{cpl} \| = R(k_u, k_v) = 0, \quad \| g_{pkl}(k_w) \| \, \| B_{cpl} \| = T(k_w) = 0 \tag{8.6}$$

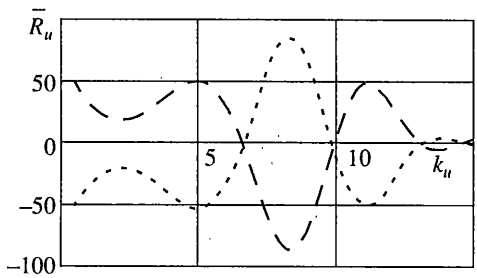
где коэффициенты $a_{pkl}(k_u, k_v)$, $g_{pkl}(k_w)$ – значения выражений (8.1)–(8.5) на границе кольца при $\rho = 1$ и $\rho = \beta$. В результате имеем задачу (8.6) на собственные значения k_u, k_v, k_w. Для решения систем (8.6) разработаны пакеты вычислительных программ. При определении корней частотных полиномов, имеющих степенной и экспоненциальный характер изменяемости, удобно произвести "нормирование", разделив их на соответствующие ненулевые "нормирующие" функции, например, такие

$$\overline{R}_u(k_u) = \frac{R(k_u)}{k_u^{l_1} \exp k_u} = 0, \quad \overline{R}_v(k_v) = \frac{R(k_v)}{k_v^{l_2} \exp k_v} = 0$$
$$\overline{T}_w(k_w) = \frac{T(k_w)}{k_w^{l_3} \exp k_w} = 0 \tag{8.7}$$

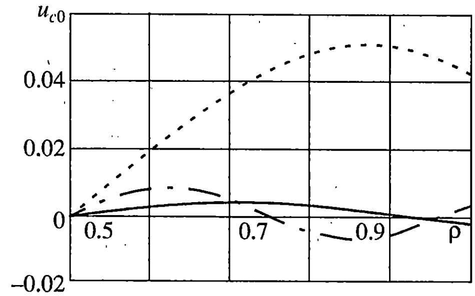
где k_i ($i = 1, 3$) – показатели степени, равные сумме порядков производных от компонент смещений, участвующих в представлении краевых условий.

В задачах о собственных частотах (аналогично задачам об изгибе пластин на упругом основании) производится контроль по условию равенства интегральных "реактивной" и "активной" нагрузок.

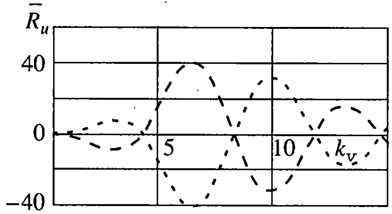
9. Пакет вычислительных программ и анализ результатов расчета. Пакеты вычислительных программ разработаны (см. [2] сноски на стр. 1) для различных комбинаций граничных условий решения систем (8.6) в широком диапазоне механических и геометрических параметров пластин. Для анализа зависимостей характеристик напряженно-деформированного состояния пластин от этих параметров использованы полученные "автомодельные решения", где число параметров сведено к минимуму. При расчетах принималось: $\mu_{12}\mu_{21} = \mu_0^2 = 0.0144$, $\mu_{12} = \mu_0 / \sqrt{c}$, $\mu_{21} = \mu_0 \sqrt{c}$, $2G_{12}/E_1 = \sqrt{c}/1 + \mu_0$, $E_2 = cE_1$, $\beta = 0.5$, $(k_u, k_v, k_w) = (1, 15)$ и $a/h = 10$. Решения однородной системы трансцендентных уравнений (8.6) относительно собственных частот k_u, k_v, k_w свободных колебаний сводится к определению корней частотных полиномов $R(k_u, k_v)$ и $T(k_w)$. Для обеспечения точности проводилось масштабирование частотных полиномов путем деления их на соответствующие нормирующие функции $k_u^{l_1} \exp k_u$, $k_v^{l_2} \exp k_v$ и $k_w^{l_3} \exp k_w$, представляющие произведения степеней соответствующих частот с показателем l_i, равным сумме порядков производных фундаментальных функций, выражающих краевые условия на экспоненты от этих частот. В рядах



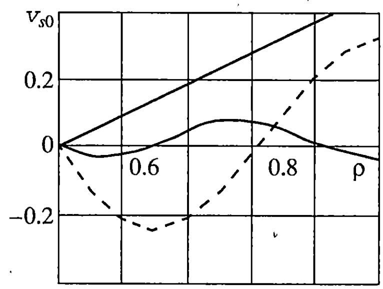
Фиг. 1



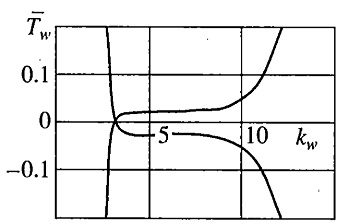
Фиг. 2



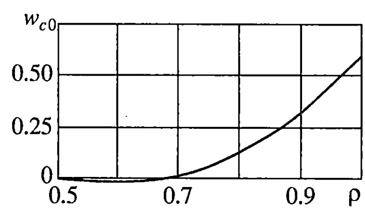
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

удерживалось до пятидесяти и более слагаемых. Сходимость рядов устанавливается по "стандартной" для такого типа рядов процедуре [1, 2, 7]. Как показали расчеты для компонент смещений достаточно ограничиться десятью слагаемыми.

На фиг. 1–6 представлены частотные полиномы и первые формы смещений для шарнирно опертого по внутреннему и свободного по наружному контуру кольцевого диска при осесимметричных колебаниях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Динник А.Н.* Приложения функций Бесселя к задачам теории упругости. Ч. 1. Новочеркасск: Изд-во НПИ, 1913. 24 с.
2. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 287 с.
3. *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Собственные колебания и устойчивость круглых пластин при осесимметричном нагреве // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 4. С. 147–151.
4. *Уиттекер Э.Г., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1955. 515 с.
5. *Weber H.* Über eine Darstellung willkurlicher Funktionen durch Bessel'che Funktionen // Math. Ann. 1873. Bd. 6. S. 146–161.

6. *Schläfli L.* Sull'uso delle linee lungo quali il valore assoluto di una funzione è costante [1973] // Annali Math. 1873–1875. V. 6. P. 1–19.
7. *Neumann K.* Theorie der Bessel'schen Funktionen. Leipzig: Teubner, 1867. 72 s.
8. *Lommel E.L.* Studien über die Bessel'schen Funktionen. Leipzig: Teubner, 1868. 120 s. Math. Ann. I (1870). P. 624–635.
9. *Nilsen N.* Handbuch der Theorie der Cylinderfunktien. Leipzig: Teubner, 1904. 408 s.
10. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
11. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Науч.-техн. изд-во Украины, 1939. 717 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.06.1998