МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2001

УДК 539.3

© 2001 г. В.П. ПАЙМУШИН

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК (ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ, СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ)

Проанализированы основные этапы развития теории устойчивости трехслойных пластин и оболочек, связанные с выявлением особенностей их докритического деформирования и выпучивания, математическим описанием этих особенностей и построением соответствующих уравнений устойчивости. Составлена уточненная классификация форм потери устойчивости конструкции в целом, ее несущих слоев и заполнителя, установлены и описаны причины их реализации. Рассмотрены примеры решения конкретных задач, подтверждающие сформулированные выводы, которые в совокупности указывают и направления дальнейших исследований.

1. Введение. Совершенствование и создание современных изделий авиационной и космической техники, судостроения, строительства в настоящее время неразрывно связано с применением новых конструкционных материалов и элементов конструкций их них, обладающих высокими прочностными и жесткостными характеристиками. Таким требованиям отвечают слоистые элементы конструкций, в частности, трехслойные. Они состоят из двух несущих слоев, изготавливаемых из материалов с высокими механическими характеристиками и предназначенных для восприятия основной части внешней нагрузки, и связующего слоя заполнителя, служащего для образования монолитной конструкции и обеспечивающего совместную работу несущих слоев. Применение в качестве заполнителей материалов с низкими массовыми характеристиками позволяет при сравнительно небольшом увеличении веса конструкции существенно повысить изгибную жесткость пакета слоев в целом. Поэтому они в конструкциях преимущественно используются там, где невозможно избежать моментности напряженно-деформированного состояния (НДС).

Теоретические и экспериментальные исследования по трехслойным конструкциям позволили выявить их основные преимущества по отношению к другим типам конструкций. Эти преимущества обусловлены тем, что несущие слои, подкрепленные заполнителем, могут воспринимать высокие напряжения сжатия. В результате эти конструкции оказываются оптимальными при работе на изгиб и возможно значительное повышение их критических нагрузок при минимальной массе. Их внедрение в различных отраслях техники повлекло за собой интенсивные исследования в области теории и методов расчета. В результате за последние пятьдесят лет в механике деформируемого твердого тела сложилось отдельное направление, связанное с разработкой теории многослойных (в частности, трехслойных) пластин и оболочек.

В отличие от теории оболочек, выполненных из традиционных однородных материалов, созданная к настоящему времени теория трехслойных элементов конструкций характеризуется достаточно большим разнообразием построенных вариантов математических моделей и разрешающих уравнений. Это неудивительно и закономерно, и каждый из таких вариантов разработанных теорий имеет свою область применимости, поскольку они базируются на таких гипотезах и предположениях, которые с той или иной степенью точности отражают многообразие структуры пакета слоев трехслойных конструкций, особенности их геометрии и условий нагружения.

2. Синфазные, антифазные и смешанные формы потери устойчивости (ФПУ). Относительно самостоятельную группу в области механики трехслойных пластин и оболочек составляют задачи устойчивости, которым до настоящего времени было посвящено большое число работ как отечественных, так и зарубежных авторов. Ключевыми в теории устойчивости этих конструкций являются вопросы, связанные с выявлением и классификацией всех возможных форм потери устойчивости и построением для их описания соответствующих математических моделей и разрешающих уравнений.

В свою очередь, от степени полноты и точности последних зависит и возможность выявления на их основе соответствующих ФПУ. В связи с этим обратимся к уточненным уравнениям, построенным в [5–7], в основу которых положено: *1*) использование для несущих слоев классической модели Кирхгофа–Лява; *2*) использование для заполнителя модели трансверсально-мягкого слоя, предполагающей равенство нулю тангенциальных компонент тензора напряжений, т.е.

$$\sigma^{ij} = 0 \quad (i, j = 1{,}2) \tag{2.1}$$

3) установление законов изменения компонент вектора перемещений в заполнителе по поперечной координате z на основе интегрирования трехмерных уравнений теории упругости, предварительно упрощенных в соответствии с (2.1); *4*) сохранение в кинематических соотношениях для несущих слоев квадратичных нелинейных слагаемых, связанных только с поворотами $\omega_i^{(k)}$ ($k = 1$ соответствует нижнему несущему слою, а $k = 2$ – верхнему) материальных волокон, нормальных к срединным поверхностям $\sigma_{(k)}$ несущих слоев.

Линеаризованные уравнения нейтрального равновесия, служащие для исследования локальных ФПУ оболочек общего вида при их статическом нагружении и выведенные в рамках описанных предположений, имеют вид [7] (деформационные параметрические слагаемые, связанные с докритическими поворотами $\mathring{\omega}_i^{(k)}$, не учитываются):

$$f_{(k)}^i = \nabla_j T_{(k)}^{ij} + \delta_{(k)} q^i = 0$$

$$f_{(k)}^3 = \nabla_i S_{(k)}^i + T_{(k)}^{ij} b_{ij} - \delta_{(k)} c_3 (w^{(2)} - w^{(1)}) = 0 \tag{2.2}$$

$$\mu_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)} - (h + h_{(1)})\omega_i^{(1)} - (h + h_2)\omega_i^{(2)} + c_{is} q^s - \frac{2h^3}{3E_3} \nabla_i \nabla_s q^s = 0 \tag{2.3}$$

где $\delta_{(1)} = -\delta_{(2)} = 1$; $u_i^{(k)}, w^{(k)}$ – тангенциальные перемещения и прогибы точек $\sigma_{(k)}$; $2h_{(k)}$, $2h$ – толщины несущих слоев и заполнителя; $c_3 = E_3/(2h)$, $c_{is} = 2hd_{is}$; E_3, d_{is} – модуль упругости заполнителя в направлении z и компоненты двухвалентного тензора упругих параметров, характеризующих податливость заполнителя на поперечный сдвиг; $T_{(k)}^{ij}, M_{(k)}^{ij}$ – внутренние тангенциальные усилия и моменты в несущих слоях; q^i – компоненты вектора поперечных касательных напряжений в заполнителе, постоянные вдоль z в рамках модели (2.1); $S_{(k)}^i$ – приведенные к несущим слоям перерезывающие усилия, определяемые по формулам

$$S_{(k)}^i = \nabla_j M_{(k)}^{ij} + \mathring{T}_{(k)}^{ij}\,\omega_j^{(k)} + (h_{(k)} + h) q^i \tag{2.4}$$

где $\omega_i^{(k)} = \nabla_i w^{(k)}$, $\mathring{T}_{(k)}^{ij}$ – докритические тангенциальные усилия в несущих слоях, определяемые из уравнений равновесия оболочки в невозмущенном состоянии и в рамках точности уравнений (2.2)–(2.4) имеющие вид [7]:

$$\overset{\circ}{f}{}^{i}_{(k)}+X^{i}_{(k)}=0,\quad \overset{\circ}{f}{}^{3}_{(k)}+X^{3}_{(k)}=0,\quad \mu^{0}_{i}=0 \tag{2.5}$$

Принципиальное значение имеет рассмотрение трех простейших задач.

2.1. Критические нагрузки бесконечно – широкой трехслойной пластины симметричного строения при сжатии несущих слоев одинаковыми погонными силами P/2. Решение этой задачи хорошо известно и его можно найти практически в любой научной литературе справочного характера по механике трехслойных конструкций. Если вместо $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ ввести в рассмотрение две новых функции

$$w_a = w^{(1)} + w^{(2)},\quad w_c = w^{(1)} + w^{(2)} \tag{2.6}$$

то при $\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(1)}=\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(2)}$ из уравнений (2.2)–(2.4) в результате соответствующих преобразований выделяется уравнение относительно функции w_a, несвязанное с другими, которое описывает антифазную ФПУ, а уравнения относительно функций $u_i^{(k)}$, w_c – синфазную ФПУ. В рассматриваемом случае в силу $\overset{\circ}{T}{}^{11}_{(k)}=-P/2,\ \overset{\circ}{T}{}^{12}_{(k)}=\overset{\circ}{T}{}^{22}_{(k)}=0$ при шарнирном опирании кромок для определения безразмерного параметра критической нагрузки m_*, входящего в формулу

$$P_* = m_*\pi^2 D/a^2 \tag{2.7}$$

в которой D – изгибная жесткость несущего слоя, a – длина пластины, можно получить формулы

$$m_*^c = 2m^2\left[1+\frac{3(1+2r)^2}{1+km^2+4r^2m^4/\varphi}\right] \tag{2.8}$$

для синфазной ФПУ и

$$m_*^a = 2(m^2+\varphi/m^2) \tag{2.9}$$

для антифазной ФПУ. Здесь введены обозначения для безразмерных параметров (t, B – толщина и жесткость на растяжение несущего слоя, G – модуль поперечного сдвига заполнителя)

$$r=h/t,\quad k=Bh\pi^2/(Ga^2),\quad \varphi=E_3a^4/(Dh\pi^4) \tag{2.10}$$

первый из которых характеризует отношение толщины заполнителя к толщине несущего слоя, второй получил название коэффициента поперечного сдвига, а третий следует назвать коэффициентом поперечного обжатия.

Как показали исследования [8, 9], точность положенной в основу (2.3)–(2.5) математической модели, предложенной в [5,6], при определении таких интегральных характеристик, как критическая нагрузка, практически приближается к точности линеаризованных уравнений теории упругости, используемой для заполнителя. Применение этой модели допустимо при больших показателях изменяемости параметров как докритического, так и возмущенного НДС, что обусловлено, как показали исследования, наличием в уравнениях (2.3) слагаемых $2h^3\nabla_i\nabla_s q^s/(3E_3)$. Пренебрежение этими слагаемыми, приводящее уравнения (2.3) к виду

$$\mu_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)} - (h+h_{(1)})\omega_i^{(1)} - (h+h_{(2)})\omega_i^{(2)} + c_{is}q^s = 0 \tag{2.11}$$

позволяет исключить из (2.2), (2.4) две искомые неизвестные функции q^i благодаря использованию соотношений

$$q^s = A^{si}[u_i^{(1)} - u_i^{(2)} - (h + h_{(1)})\omega_i^{(1)} - (h + h_{(2)})\omega_i^{(2)}] \tag{2.12}$$

следующих из (2.11). Получающаяся при таких преобразованиях система уравнений относительно искомых неизвестных $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$ полностью эквивалентна уравнениям В.В. Болотина [10, 11], основанным на использовании предположений (2.1) и аппроксимации прогиба в заполнителе линейной функцией по z. Ее, как показано в [5–7], допустимо использовать при малых показателях изменяемости параметров НДС. Если исходить из таких упрощенных уравнений, решение рассматриваемой в данном разделе задачи вместо (2.8) приводит к формуле

$$\tilde{m}_*^c = 2m^2\left[1 + \frac{3(1+2r)^2}{1+km^2}\right] \tag{2.13}$$

в то время как для антифазной ФПУ формула (2.9) остается без изменений.

Исходя из анализа решений многих задач, по постановке аналогичных приведенному выше и найденных на основе уравнений той или иной степени точности, к семидесятым годам были сформулированы следующие два основных вывода:

1. В реальных трехслойных элементах конструкций критические нагрузки, отвечающие синфазным (кососимметричным) ФПУ, значительно ниже критических нагрузок, отвечающих антифазным (симметричным) ФПУ. Последние в чистом виде реализуются только в трехслойных пластинах с симметричным по толщине строением при малых значениях параметра φ (при большой относительной толщине заполнителя и малом значении E_3).

2. Значения параметров критических нагрузок, определяемые по формулам (2.8) и (2.13), для весьма широких пределов изменения параметра φ практически совпадают, что и послужило основанием для вывода о том, что не требуется учет поперечного обжатия заполнителя при определении критических нагрузок трехслойных (в общем случае и многослойных) пластин и оболочек.

Критически оценивая сформулированные выводы, следует указать на их состоятельность лишь при соблюдении условий $\mathring{T}_{(1)}^{ij} \equiv \mathring{T}_{(2)}^{ij}$, имеющих место только для безмоментного докритического состояния.

Однако, одно из главных преимуществ трехслойных конструкций заключается в их оптимальности при работе на изгиб. Поэтому они используются в изделиях того или иного назначения там, где невозможно избежать моментности напряженно-деформированного состояния, выражающейся главным образом, в реализации неравенств $\mathring{T}_{(1)}^{ij} \neq \mathring{T}_{(2)}^{ij}$.

В 1974 г. в статьях [12, 13] была дана постановка задач устойчивости трехслойных пластин при поперечном и продольно-поперечном изгибах, когда до потери устойчивости в несущих слоях в первом случае реализуются усилия $\mathring{T}_{(1)}^{ij} = -\mathring{T}_{(2)}^{ij}$, а во втором случае – усилия $\mathring{T}_{(1)}^{ij} \neq \mathring{T}_{(2)}^{ij}$. Для постановки задач устойчивости при таком докритическом НДС и их численного решения использовались уравнения, основанные на привлечении к несущим слоям модели Кирхгофа–Лява, а к заполнителю – модели В.В. Болотина, но с учетом моментности докритического НДС, выражающейся неравенствами $\mathring{T}_{(1)}^{ij} \neq \mathring{T}_{(2)}^{ij}$. Исходя из анализа результатов, изложенных в [12, 13], в статье [14] в 1985 г. была дана уточненная классификация ФПУ трехслойных пластин и оболочек, в соответствии с которой, кроме хорошо изученных синфазных и антифазных, следует различать и смешанную ФПУ, характеризующуюся в общем случае различными ФПУ несущих слоев с наибольшими амплитудами выпучиваний более сжатого слоя в зонах преимущественно моментного состояния трехслойного пакета слоев в целом. Для постановки задач устойчивости трехслойных (в общем случае и многослойных) пластин и оболочек при таких докритических НДС необходимо:

(*1*) уравнения устойчивости должны быть выведены с обязательным учетом поперечного обжатия заполнителя и моментности докритического НДС, выражающейся неравенствами $\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(1)} \neq \overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(2)}$;

(*2*) уравнения, описывающие докритическое НДС, должны обеспечивать необходимую степень точности определения докритических усилий $\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(k)}$;

(*3*) недопустимо упрощение уравнений устойчивости путем введения допущения о безмоментности несущих слоев, так как причиной реализации смешанной ФПУ конструкции является первоначальная потеря устойчивости одного из несущих слоев, трансформирующаяся в смешанную ФПУ.

Уравнения устойчивости трехслойных оболочек, удовлетворяющие сформулированным требованиям, были выведены в статье [14], основанные на привлечении модели Кирхгофа–Лява к несущим слоям и модели В.В. Болотина [10] к заполнителю. В последней в рамках упрощений (2.1) прогиб заполнителя аппроксимируется по его толщине линейным законом, что в предельно упрощенном виде позволяет удовлетворить первому из сформулированных требований. На основе этих уравнений в [15] была решена одна из простейших задач о смешанной ФПУ, которая была в дальнейшем рассмотрена в статье [7] в более строгой постановке на базе уравнений (2.2)–(2.4).

2.2. Критические нагрузки бесконечно-широкой трехслойной пластины симметричного строения при сжатии одного несущего слоя силой P. Реальные трехслойные пластины вдоль кромок, как правило, имеют законцовки, позволяющие передавать внешнюю контурную сжимающую нагрузку лишь через один несущий слой. Если принять для такой пластины, имеющей длину a, условия шарнирного опирания, считать несущие слои безмоментными, а заполнитель в условиях модели (2.1) (модель трансверсально-мягкого слоя [11]) – несжимаемым в поперечном направлении, то при нагружении лишь первого (нижнего) несущего слоя для докритических усилий можно получить выражения

$$\overset{\circ}{T}{}^{11}_{(1)} = -P, \quad \overset{\circ}{T}{}^{11}_{(2)} = 0 \tag{2.14}$$

Определяя критическую нагрузку P_* формулой (2.7), в рассматриваемом случае согласно решению [7], основанному на представлении прогибов $w^{(k)}$ в виде $w^{(k)} = W_m^{(k)} \sin(m\pi x / a)$, для вычисления m_* можно получить формулу (m – число полуволн потери устойчивости):

$$m_* = \frac{2(m^4 + \varphi)(L_m + m^4)}{m^2(\varphi + L_m + 2m^4)}, \quad L_m = \frac{3(1+2r)^2 m^4}{1 + km^2 + 4r^2 m^4 / \varphi} \tag{2.15}$$

если исходить из уравнений (2.2)–(2.4), и приближенную формулу

$$\overline{m}_* = \frac{2(m^4 + \varphi)(\overline{L}_m + m^4)}{m^2(\varphi + \overline{L}_m + 2m^4)}, \quad \overline{L}_m = \frac{3(1+2r)^2 m^4}{1 + km^2} \tag{2.16}$$

если использовать предельно упрощенные уравнения (2.2), (2.4), (2.11). Некоторые результаты расчетов m_* и $\overline{m}_*$, а также волновые числа m, соответствующие минимальному значению m_*, для параметров $k = 1$, $r = 9$ при варьировании φ приведены в табл. 1, где отношение $W_m^{(1)} / W_m^{(2)}$ отвечает первому решению.

Таблица 1

$\lg\varphi$	m	m_*	$\overline{m}_*$	$W_m^{(1)}/W_m^{(2)}$
3	6	83.61	120.50	–3.32
4	11	254.93	341.70	–3.97
5	18	725.26	867.45	–6.78
6	1	1084.24	1084.41	1.00
7	1	1084.92	1084.94	1.00
8	1	1084.99	1084.99	1.00

Анализ полученных результатов позволяет сформулировать следующие основные выводы:

1. Существует некоторое предельное ("критическое") значение параметра поперечного обжатия φ, при достижении которого смешанная ФПУ с большим числом волнообразования (т.е. с большим показателем изменяемости параметров возмущенного НДС) переходит в почти синфазную ФПУ с $m=1$ и $W_m^{(1)}=W_m^{(2)}$. В пределе, когда $\varphi\to\infty$, $m_*\to\ \tilde{m}_*^c$, где $\tilde{m}_*^c$ определяется по формуле (2.13). Увеличение параметра φ выше "критического" не приводит к увеличению критической нагрузки, т.е. к улучшению конструкции, в то время как при значениях φ, меньших "критического", конструкция разрушается из-за потери устойчивости по смешанной ФПУ при параметрах критической нагрузки, значительно меньших $\tilde{m}_*^c$.

2. Исследование смешанных ФПУ трехслойных (в общем случае и многослойных) пластин и оболочек с заполнителями, относящимися к классу трансверсально-мягких, на основе предельно упрощенных уравнений вида (2.2), (2.4), (2.11) приводит к значительной погрешности получаемых результатов.

3. При исследовании смешанных ФПУ, характеризующихся образованием в несущих слоях выпучин с характерными линейными размерами, соизмеримыми с толщиной пакета слоев в целом (особенно при значительных значениях параметра $r\sim 10$, характерных для реальных конструкций) возникают значительные трудности вычислительного характера, если ориентироваться при решении соответствующих задач на использование чисто численных методов. Так как смешанные ФПУ, как правило, локализованы, то одно из направлений разработки эффективных и перспективных методов их исследования должно быть связано с разработкой численно-аналитических методов решения соответствующих задач, аналогичных предложенному в статьях [16, 17].

4. Для выявления смешанных ФПУ и определения соответствующих нагрузок, реализация которых является главной причиной разрушения конструкции в целом из-за разрушения заполнителя в зонах выпучивания несущих слоев, как следует из рассмотрения приведенного выше простейшего примера, требуется постановка и решение задач устойчивости на основе весьма сложных уравнений. Для многослойных оболочек количество и сложность таких уравнений, относящихся к классу дискретно-структурных (по терминологии [4]), возрастает пропорционально количеству слоев. В то же время все известные варианты теории многослойных оболочек, относящихся к классу структурно-непрерывных [4] и являющиеся более простыми в сравнении с дискретно-структурными, не удовлетворяют требованиям, предъявляемым к уравнениям для описания смешанных ФПУ. В связи с этим одним из актуальных направлений развития теории слоистых пластин и оболочек следует отнести исследования, связанные с разработкой таких вариантов теории многослойных оболочек для исследования смешанных ФПУ, порядок уравнений которых не зависит от числа слоев в пакете.

Таблица 2

$\lg\varphi$	m	m_*	$\overline{m}_*$	$W_m^{(1)} / W_m^{(2)}$
3	6	87.97	263.27	–6.27
4	11	263.42	484.21	–7.27
5	17	733.52	929.03	–13.89
6	26	1835.61	1946.2	12.48
7	40	4542.88	4588.71	3.75
8	60	12105.42	12121.58	2.26

2.3. Критические нагрузки бесконечно-широкой трехслойной пластины симметричного строения, находящейся в условиях чистого изгиба. Если края пластины, имеющей длину a, считать шарнирно опертыми, а к ее несущим слоям при $x = 0$, a приложены внешние усилия P, растягивающие нижний слой и сжимающие верхний слой, то, оставаясь в рамках точности постановки и решения задачи о докритическом НДС, рассмотренной в п. 2.2, в данном случае для докритических усилий в несущих слоях приходим к равенствам

$$\overset{\circ}{T}{}^{11}_{(1)} = P, \ \overset{\circ}{T}{}^{11}_{(2)} = -P \tag{2.17}$$

Представляя прогибы несущих слоев по прежнему в виде $w^{(k)} = W_m^{(k)} \sin(m\pi x / a)$, для m_*, входящего в (2.7), можно получить формулу

$$m_* = \frac{1}{m^2}\sqrt{(m^4 + L_m)(m^4 + \varphi)} = \frac{1}{2}\sqrt{m_*^a m_*^c} \tag{2.18}$$

если исходить из уравнений (2.2)–(2.4), и приближенную формулу

$$\overline{m}_* = \frac{1}{m^2}\sqrt{(m^4 + \overline{L}_m)(m^4 + \varphi)} \tag{2.19}$$

если исходить из предельно упрощенных уравнений (2.2), (2.4), (2.11).

Некоторые результаты расчетов по определению m_*, $\overline{m}_*$, а также значения m и $W_m^{(2)} / W_m^{(1)}$, отвечающие минимуму m_*, для параметров $r = 9$, $k = 0{,}25$ при разных значениях параметра φ приведены в табл. 2.

Из нее следует, что в условиях чистого изгиба пластины в несущих слоях реализуется только смешанная ФПУ с выпучиванием несущих слоев в разные стороны при малых значениях φ и в одну сторону при больших значениях φ. Погрешность предельно упрощенных уравнений устойчивости (2.2), (2.4), (2.11) тем выше, чем меньше параметр поперечного обжатия φ. Возмущенное НДС при реализации смешанных ФПУ в условиях чисто моментного докритического НДС характеризуется большим показателем изменяемости, чем при сжатии лишь одного несущего слоя.

3. Сдвиговая ФПУ трехслойных конструкций в тангенциальном направлении. В [14] в дополнении к синфазным, антифазным и смешанным ФПУ была введена в рассмотрение четвертая ФПУ, которая может реализоваться в трехслойных пластинах и оболочках с несущими слоями из композитных материалов с низкими значениями модуля сдвига материала в тангенциальной плоскости по сравнению со значениями нормальных модулей упругости. Механизм ее реализации может быть освещен и проанализирован на рассмотрении задачи устойчивости прямоугольной пластины, находящейся в условиях чистого сдвига. Классическая постановка задачи устойчивости такой пластины, имеющей толщину t и подверженной чистому сдвигу усилиями S, приложенными на контуре, состоит в необходимости интегрирования уравнения устойчивости [18] (D_1, D_s, D_2 – изгибные жесткости пластины):

$$\left(D_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D_s \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) w + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \tag{3.1}$$

при тех или иных условиях контурного закрепления. Данным уравнением, как известно, описывается потеря устойчивости пластины по изгибной форме с образованием выпучин, определенным образом ориентированных относительно осей координат x и y.

Если считать, что потеря устойчивости пластины происходит без образования изгибных выпучин, т.е. $w \equiv 0$, то исходя из геометрически нелинейных уравнений плоской задачи теории упругости может быть составлена следующая система линеаризованных уравнений нейтрального равновесия относительно тангенциальных компонент u, v вектора перемещений (материал предполагается ортотропным):

$$\left(a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u + (a_{12} + G_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2\frac{S}{t} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{3.2}$$

$$(a_{12} + G_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(a_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + G_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v - 2\frac{S}{t} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

$$a_{ii} = E_i / (1 - \mu_{12}\mu_{21}), \quad a_{12} = a_{21}\mu_{12}E_1 / (1 - \mu_{12}\mu_{21})$$

где μ_{ij} – коэффициенты Пуассона; E_1, E_2 – нормальные модули упругости.

Если решение системы (3.2) представить в виде

$$u = U_* \sin\left(\frac{m\pi x}{a} + \frac{n\pi y}{b}\right), \quad v = V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a} + \frac{n\pi y}{b}\right)$$

то для критических значений S_* можно получить формулу

$$\frac{S_*}{t} = \frac{1}{4}\left\{(a_{11} + G_{12})\eta + \frac{G_{12} + a_{22}}{\eta} \pm \sqrt{\left[(a_{11} - G_{12})\eta + \frac{G_{12} - a_{22}}{\eta}\right]^2 + 4(a_{12} + G_{12})^2}\right\}$$

$$\eta = bm / na \tag{3.3}$$

Для изотропной пластины из (3.3) следует формула $S_*/t = G = E/2(1 + \mu)$, которая указывает, что при сдвиге изотропной пластины напряжениями S/t критическое напряжение не может быть достигнуто или в виду ее разрушения при $S/t = \tau^*$, или из-за ее потери устойчивости по изгибной форме, описываемой уравнением (3.1), при критическом напряжении $\tau_* = S_*^u/t$.

Анализ решений описанных выше задач показывает, что для ортотропной пластины равенство $S_* = S_*^u$, где S_* определяется минимизацией (3.3) по параметру η, может быть достигнуто только при весьма малых значениях G_{12}/E_i в относительно толстых пластинах. В трехслойных конструкциях, у которых несущие слои из ортотропного материала имеют малые значения G_{12}/E_i, такое равенство может быть достигнуто и при малых относительных толщинах, так как для таких конструкций при сохранении жесткости на сдвиг tG_{12} жесткость пакета слоев на изгиб растет пропорционально квадрату расстояния между срединными поверхностями несущих слоев. Следовательно, задачи, связанные с описанием и выявлением в трехслойных пластинах и оболочках сдвиговых ФПУ в тангенциальных направлениях, являются практически более важными и интересными, чем аналогичные задачи для однослойных конструкций. Такие ФПУ не описываются уравнениями вида (2.2)–(2.4), так как они основаны на использовании для несущих слоев кинематических соотношений лишь в квадратичном приближении, имеющих вид

$$2\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} + e_{ji}^{(k)} + \omega_i^{(k)}\omega_j^{(k)}, \quad e_{ij}^{(k)} = \nabla_i u_j^{(k)} - b_{ij} w^{(k)} \tag{3.4}$$

Выявление рассматриваемых ФПУ возможно только при использовании нелинейных кинематических соотношений общего вида при сохранении в них квадратичных слагаемых, связанных с поворотами $e_{12}^{(k)}$ в тангенциальных направлениях. Вопросы построения таких двумерных уравнений теории многослойных пластин и оболочек следует отнести к еще не разработанным разделам механики слоистых конструкций.

4. Смешанные изгибные и изгибно-сдвиговые ФПУ. Освещение современного состояния в области механики слоистых пластин и оболочек в 1996 году было дано в обзорной статье [19]. Приведенная в ней классификация ФПУ содержит синфазную и антифазную формы, к настоящему времени детально исследованные многими авторами, введенную в рассмотрение в [14] и исследованную в последующем [6, 7, 9, 17] смешанную форму, а также форму сдвигового гофрообразования в заполнителе, аналогичного освещенной в п. 3 настоящей статьи сдвиговой ФПУ в тангенциальных направлениях, но реализующегося в заполнителе вследствие появления деформаций поперечных сдвигов. Эта форма потери устойчивости, по-видимому, до сих пор серьезно не изучена, хотя, судя по данным экспериментов, полученным в разные годы как отечественными, так и зарубежными исследователями, она реализуется в комбинации с другими формами.

Для теоретического обоснования причин появления в трехслойных оболочках рассматриваемой ФПУ обратимся к уравнениям $f_{(k)}^3 = 0$ из (2.2). При подстановке вместо усилий $S_{(k)}^i$ выражений (2.4) будем иметь

$$\begin{aligned}&\nabla_i\nabla_j M_{(k)}^{ij} + \omega_j^{(k)}\nabla_i \mathring{T}_{(k)}^{ij} + \mathring{T}_{(k)}^{ij}\,\nabla_i\omega_j^{(k)} + \\ &+\left(h + h_{(k)}\right)\nabla_i q^i + T_{(k)}^{ij} b_{ij} + \delta_{(k)} c_3\left(w^{(2)} - w^{(1)}\right) = 0\end{aligned} \tag{4.1}$$

Но согласно уравнениям докритического равновесия (2.5) справедливы равенства

$$\nabla_i \mathring{T}_{(k)}^{ij} = -\delta_{(k)}\,\mathring{q}^j - X_{(k)}^i \tag{4.2}$$

где $\mathring{q}^j$ – докритические поперечные касательные напряжения в заполнителе. С учетом (4.2) уравнения (4.1) можно привести к виду

$$\begin{aligned}&\nabla_i\nabla_j M_{(k)}^{ij} + \left(h_{(k)} + h\right)\nabla_i q^i + T_{(k)}^{ij} b_{ij} + \delta_{(k)} c_3\left(w^{(2)} - w^{(1)}\right) - \\ &-\omega_j^{(k)} X_{(k)}^j + \mathring{T}_{(k)}^{ij}\,\nabla_i\omega_j^{(k)} - \delta_{(k)}\omega_j^{(k)}\mathring{q}^j = 0\end{aligned} \tag{4.3}$$

которые содержат две группы параметрических слагаемых. Первая из них связана с докритическими усилиями в несущих слоях и является стандартной в задачах теории устойчивости оболочек, а вторая связана с докритическими касательными напряжениями в заполнителе $\mathring{q}^j$.

Анализ структуры уравнений (4.3) указывает на целесообразность составления более детальной классификации смешанных ФПУ трехслойных (в общем случае и многослойных) пластин и оболочек.

1. Если в конструкции реализуется такое докритическое НДС, когда $\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(1)} \neq \overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(2)}$, а $\overset{\circ}{q}{}^{i} \neq 0$, то реализующуюся в ней смешанную ФПУ следует называть смешанной изгибной.

2. Если в конструкции докритическое НДС таково, что $\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(1)} \neq \overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(2)}$, $\overset{\circ}{q}{}^{i} \neq 0$, то реализующуюся в ней смешанную ФПУ следует назвать смешанной изгибно-сдвиговой.

3. Если гипотетически предположить, что в конструкции реализуется такое докритическое НДС, когда $\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(k)} = 0$, а $\overset{\circ}{q}{}^{i} \neq 0$, то отвечающую такому НДС ФПУ следует назвать сдвиговой ФПУ в заполнителе. Так как такое докритическое НДС в конструкциях реализовать невозможно, то невозможна и реализация соответствующей сдвиговой ФПУ в заполнителе. Однако, при некоторых видах нагружения и закрепления кромок в некоторых зонах конструкции превалирующими в уравнениях (4.3) могут оказаться параметрические слагаемые $\delta_{(k)}\omega_{j}^{(k)}\,\overset{\circ}{q}{}^{j}$, что может вызвать реализацию в таких зонах преимущественно сдвиговой ФПУ заполнителя.

4. И, наконец, если в конструкции или в некоторой ее зоне реализуется такое докритическое НДС, когда $\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(1)} \neq \overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(2)}$, $\overset{\circ}{q}{}^{i} = 0$, то в ней возможна реализация или синфазной, или антифазной ФПУ.

Одной из наиболее характерных и простейших задач устойчивости, относящихся к рассматриваемому в данном разделе классу, является задача о смешанных ФПУ бесконечно широкой пластины, находящейся в условиях поперечного изгиба от действия равномерно распределенной по длине поперечной нагрузкой P. Ее докритическое НДС с принятой в п. 3.1–3.3 точностью описывается уравнениями равновесия

$$\frac{d\overset{\circ}{T}{}^{11}_{(1)}}{dx} + \overset{\circ}{q}{}^{1} = 0, \quad \frac{d\overset{\circ}{T}{}^{11}_{(2)}}{dx} - \overset{\circ}{q}{}^{1} = 0, \quad \frac{d\overset{\circ}{q}{}^{1}}{dx} + \frac{P}{2h+t} = 0 \tag{4.4}$$

$$(0 \leqslant x \leqslant a)$$

где t – по-прежнему толщина несущего слоя, a – длина пластины. Уравнения устойчивости (2.2)–(2.4) при введении безразмерной координаты $\xi = \pi x/a$, безразмерного параметра поперечной нагрузки

$$m_*^P = \frac{Pa^4}{2(2h+t)\pi^4 D} \tag{4.5}$$

и новых искомых неизвестных (2.6) можно преобразовать к следующему разрешающему уравнению:

$$\left\{\left(\frac{d^4}{d\xi^4} + \varphi\right)\left[L_0 + 3(1+2r)^2\right] - m_*^2 T_0^2 L_0\right\}\frac{d\Phi}{d\xi} - m_*^2 L_0\left(T_0 q_0 \Phi\right) = 0 \tag{4.6}$$

$$L_0 = 1 + k\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{4r^2}{\varphi}\frac{d^4}{d\xi^4}, \quad \Phi = \frac{d^3 w_c}{d\xi^3}$$

в котором первое параметрическое слагаемое, содержащее T_0^2, связано только с докритическими усилиями в несущих слоях, а второе – с докритическими касательными напряжениями $\overset{\circ}{q}{}^{1}$. Можно показать, что для безразмерных функций T_0, q_0, характеризующих эти слагаемые и входящих в (4.6), исходя из (4.4) следуют формулы

$$T_0,\, q_0 = \begin{cases} \xi(\pi-\xi),\ (\pi-2\xi) \ -\ \text{при шарнирном опирании кромок} \\ (\xi-\pi)^2,\ 2(\xi-\pi)\ -\ \text{для консольно закрепленной пластины} \end{cases}$$

Анализ уравнения (4.6) показывает, что при $T_0 = 0$, $q_0 \neq 0$ потеря устойчивости пластины не происходит. В консольно закрепленной пластине, в которой функции T_0 и q_0 максимальных значений достигают в сечении заделки при $\xi = 0$, локальное волнообразование сконцентрировано в окрестности этого сечения, о чем качественно и количественно свидетельствуют результаты работы [12]. Шарнирно опертая пластина является прямой противоположностью консольно закрепленной пластине. В ней при $\xi = 0$ q_0 достигает максимального значения, а $T_0 = 0$; при $\xi = \pi/2$ картина обратная: T_0 достигает максимального значения, а $q_0 = 0$. Локальная потеря устойчивости здесь происходит в окрестности сечения $\xi = \pi/2$, она близка по форме к смешанной изгибной, в чем можно убедиться при решении соответствующей задачи методом конечных элементов [20].

В заключение данного раздела следует отметить, что в трехслойных (в общем случае и многослойных) конструкциях НДС с параметрами $T^{ij}_{(1)} \neq T^{ij}_{(2)} \neq 0$, $q^i \neq 0$ (моментное НДС общего вида) возникает, в частности, в окрестности закрепленных краев и точек приложения локализованных внешних нагрузок. В таких зонах возможна реализация смешанных изгибно-сдвиговых ФПУ при критических параметрах нагрузки, намного меньших, чем критические нагрузки синфазных ФПУ. В общем случае для их выявления необходимо построение решений уравнений (2.2)–(2.4), (2.5).

5. О необходимой степени точности построения решения задачи о докритическом НДС при исследовании устойчивости трехслойных конструкций. Одним из актуальных вопросов теории устойчивости однослойных оболочек, детально изучавшихся в свое время в 60–70-е годы многими исследователями, является вопрос о необходимости учета моментности докритического НДС при постановке и решении задач устойчивости. Введение предположения о безмоментности докритического НДС, как известно, сильно упрощает формулируемые задачи, позволяя их свести для широкого класса оболочек к необходимости интегрирования уравнений с постоянными коэффициентами и получать аналитические решения. В последующем, с началом широкого использования численных методов решения задач, эти вопросы теории устойчивости оболочек практически потеряли свою актуальность, так как при численном решении задач учет в уравнениях устойчивости моментных параметрических слагаемых не приводит к принципиальным затруднениям вычислительного характера.

Указанный период времени характеризуется также становлением теории трехслойных и многослойных оболочек. При выводе уравнений устойчивости для таких оболочек, следуя уже известным положениям из теории устойчивости однослойных оболочек, исследователи вводили предположение о безмоментности докритического НДС. Но при этом сразу же "из ванной вместе с водой оказывается выброшенным и ребенок" – из уравнений устойчивости, построенных с любой степенью точности учета поперечного обжатия заполнителя, выявлялись лишь синфазные и антифазные ФПУ. Так как синфазные ФПУ слабо зависят от поперечного обжатия заполнителя, то нет и необходимости учета этого фактора в задачах устойчивости. Эти выводы и легли в последующем в основу всех дальнейших исследований в области теории устойчивости трехслойных конструкций, которые, как следует из выше изложенного, являются корректными лишь при больших значениях параметра φ.

Другой основополагающий вывод, касающийся особенностей механики деформирования слоистых элементов конструкций и утвердившийся в научной литературе, состоит в том, что при действии на конструкцию гладких (нелокализованных) нагрузок учет поперечного обжатия заполнителя не приводит к заметной погрешности получаемых результатов. Данный вывод, являясь вполне корректным в задачах по определению НДС, при определенных физико-механических и геометрических параметрах может оказаться абсолютно некорректным в задачах устойчивости в части, касающейся определения докритических усилий в несущих слоях. Подтверждением данному выводу может служить простейшая задача об устойчивости трехслойного кругового кольца, находящегося под действием внешнего давления p. Если сформулировать задачу о его докритическом НДС на базе уравнений (2.5), то для докритических окружных усилий $\overset{\circ}{T}{}^{22}_{(k)}$ в несущих слоях можно получить формулы

$$\overset{\circ}{T}{}^{22}_{(1)} = -\frac{\chi}{1+2\chi}pR, \quad \overset{\circ}{T}{}^{22}_{(2)} = -\frac{1+\chi}{1+2\chi}pR \tag{5.1}$$

где R – радиус срединной поверхности заполнителя, а χ – безразмерный параметр, характеризующий податливость заполнителя на поперечное обжатие (B – жесткость на растяжение – сжатие несущего слоя):

$$\chi = E_3R^2/(2Bh) \tag{5.2}$$

Если линеаризованную задачу устойчивости кольца при докритических усилиях (5.1) формулировать исходя из общих уравнений работы [7] без введения упрощенной теории пологих оболочек, то относительно поворотов несущих слоев (θ – окружная координата, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ – окружные перемещения точек срединных поверхностей несущих слоев):

$$\omega_1 = \frac{1}{R}\left(\frac{dw^{(1)}}{d\theta} - v^{(1)}\right), \quad \omega_2 = \frac{1}{R}\left(\frac{dw^{(2)}}{d\theta} - v^{(2)}\right)$$

в возмущенном состоянии можно получить следующую систему двух разрешающих уравнений:

$$L\left[m(l_1\omega_1 + l_2\omega_2) - \frac{d^2}{d\theta^2}(\omega_1+\omega_2)\right] + \frac{3(d_1+d_2)}{2t_0^2}(l_1\omega_1 - L_2\omega_2) = 0$$

$$L\left[\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)^2 + \chi\right]\left[m(l_1\omega_1 - l_2\omega_2) - \frac{d^2}{d\theta^2}(\omega_1-\omega_2)\right] + \tag{5.3}$$

$$+\frac{3}{t_0^2}\left(\frac{d_1-d_2}{2} + \frac{d^2}{d\theta^2} + 1 + \chi\right)(L_1\omega_1 - L_2\omega_2) - \frac{3\chi}{t_0^2}\frac{d^2}{d\theta^2}(\omega_1-\omega_2) = 0$$

$$L = \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + 1 + \chi\right)\left(k - \frac{h_0^2}{6\chi}\frac{d^2}{d\theta^2}\right) - \frac{d^2}{d\theta^2}$$

$$L_k = \frac{d^2}{d\theta^2} + 1 + \chi + \delta_{(k)}\left[\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)^2 + \chi\right] \quad (k = 1,2)$$

$$m = pR^3/D, \quad k = Bh/(GR), \quad t_0 = t/R$$

$$d_1 = H_0 - t_0 - 2h_0^2/3, \quad d_2 = H_0 + t_0 + 2h_0^2/3$$

$$h_0 = \frac{h}{R}, \quad H_0 = \frac{h+t}{R}, \quad l_1 = \frac{\chi}{1+2\chi}, \quad l_2 = \frac{1+\chi}{1+2\chi}$$

Решение уравнений (5.3) и критические значения безразмерного параметра m критического давления p_*, исходя из условия периодичности решения по θ, найдены при

Таблица 3

$\lg\varphi$	$h_0 = 0.02$		$h_0 = 0.05$	
	n	m_*	n	m_*
3	2	13.91	2	31.89
4	2	35.06	2	121.58
5	3	58.06	5	126.43
6	3	78.06	6	185.19
7	2	79.86	2	295.13

представлении поворотов ω_k в виде $\omega_k = \Phi_k \sin n\theta$, где Φ_k – амплитудные значения углов поворота, n – число полуволн потери устойчивости.

Были проведены расчеты по определению m_* и n для широких пределов изменения введенных в рассмотрение определяющих параметров. Некоторые из этих результатов расчетов при $t_0 = 0.01$, $H = 0.08$, $k = 1.0$ и двух значениях параметра $h_0 = 0.02$, $h_0 = 0.05$ приведены в таблице 3, где $\varphi = 6\chi / t_0^2$.

Анализ полученных результатов позволяет сформулировать следующие выводы.

1. При малых значениях φ (а, следовательно, и χ) внешняя нагрузка воспринимается, главным образом, нагруженным (т.е. вторым) несущим слоем ($\mathring{T}^{22}_{(2)} \gg \mathring{T}^{22}_{(1)}$), который и теряет устойчивость с образованием двух полуволн. Увеличение φ приводит к увеличению восприятия доли внешней нагрузки внутренним слоем и к появлению ярко выраженной смешанной (в рассматриваемом случае смешанной изгибной) ФПУ с образованием числа полуволн $n > 2$. Как и в пластинах, подверженных сжатию через один несущий слой, имеется "критическое" (пороговое) значение φ, когда смешанная ФПУ переходит в синфазную ФПУ с $n = 2$. Дальнейшее увеличение φ, а следовательно, и удельного веса заполнителя, не приводит к увеличению критического внешнего давления.

2. Так как у реальных трехслойных элементов конструкций определяющие параметры $r = h/t$, k, H_0, t_0, h_0, φ находятся в рассмотренных пределах изменения, то для достоверного определения критических нагрузок необходимо привлекать уточненные уравнения устойчивости.

3. И, наконец, главный вывод, к которому приводит анализ полученных результатов: даже при незначительной разнице в докритических усилиях во внешних слоях, в трехслойном кольце может реализоваться потеря устойчивости по смешанной форме при параметрах m_*, намного меньших m_*^c. Достижение последних возможно только при φ, больших "порогового" значения.

4. Из последнего вывода следует основной вывод, относящийся к рассматриваемому в данном разделе вопросу – даже при действии гладких нагрузок при постановке задач устойчивости о смешанных ФПУ докритические усилия в несущих слоях необходимо определять исходя из соответствующих уточненных уравнений докритического равновесия, позволяющих выявить главную причину реализации смешанных ФПУ – неравность докритических усилий в несущих слоях.

Заметим, что последний вывод не является всеохватывающим. Так, например, решение рассмотренной в разделе 2.3 задачи о докритическом НДС методом конечных элементов [20] исходя из уточненных уравнений общего вида (2.7), незначительно уточняя формулы (2.14), позволило с высокой степенью точности установить поле докритических касательных напряжений $\mathring{q}^i$, сконцентрированных в окрестности кромок $x = 0$, a и входящих в уравнения устойчивости. При этом, как показывает сравнение, критические нагрузки, найденные численным методом на базе уравнений (2.2)–(2.4), незначительно отличаются от значений, определяемых по формуле (2.15). В то же время в рамках таких уточненных постановок и решений задач как о докритическом НДС, так и устойчивости, коренным образом уточняется форма потери устойчивости – она является смешанной изгибно-сдвиговой, проявляющейся в окрестностях кромок $x = 0$, a.

Необходимо подчеркнуть, что в рассмотренной задаче в приближенном решении (2.14) учтена главная причина реализации смешанной ФПУ – неравность докритических усилий в несущих слоях.

6. Заключение. Исходя из всего изложенного, следует, прежде всего, обратить внимание исследователей на необходимость корректировки и критического анализа всех полученных к настоящему времени результатов решений конкретных задач, представленных в справочной и научной литературе по устойчивости слоистых элементов конструкций. Вся эта работа весьма кропотлива и трудоемка, для ее решения требуются усилия немалого коллектива высококвалифицированных исследователей.

Рассмотренным в статье вопросам автор посвятил более двадцати пяти лет. К настоящему времени многие из них имеют ту или иную степень завершенности, причем результаты последних лет получены автором благодаря плодотворной совместной работе прежде всего с профессорами В.А. Ивановым, А.И. Головановым при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 93-013-16516, 97-01-00646). Автор выражает им искреннюю признательность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А.Я. и др.* Расчет трехслойных панелей. М.: Оборонгиз, 1960. 270 с.
2. *Александров А.Я., Куршин Л.М.* Многослойные пластины и оболочки // Тр. 7-ой Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970. С. 714–721.
3. *Григолюк Э.И., Коган Ф.А.* Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. 1972. Т. 8. № 6. С. 3–17.
4. *Дубченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф.* Анизотропные многослойные пластины и оболочки. Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 15. С. 3–68.
5. *Паймушин В.Н.* Уточненная нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем при термосиловых воздействиях // Изв. ВУЗ. Авиационная техника. 1989. № 4. С. 8–12.
6. *Иванов В.А., Паймушин В.Н.* Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (нелинейные уравнения докритического равновесия оболочек с трансверсально-мягким заполнителем). Изв. ВУЗ. Математика. 1994. № 11. С. 29–42.
7. *Иванов В.А., Паймушин В.Н., Полякова Т.В.* Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (линеаризованные уравнения нейтрального равновесия и простейшие одномерные задачи). Изв. ВУЗ. Математика. 1995. № 3. С. 15–24.
8. *Галимов М.К., Иванов В.А., Паймушин В.Н.* Проблема устойчивости моментного равновесия трехслойных пластин и оболочек и моделирования в них заполнителя в возмущенном состоянии // Тр. Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 1996. Т. 1. С. 16–23.
9. *Паймушин В.Н., Муштари А.И.* Уточненная теория устойчивости трехслойных оболочек с трансверсально-жестким заполнителем. 3. Простейшие одномерные задачи // Механика композитных материалов. 1998. Т. 34. № 1. С. 57–65.
10. *Болотин В.В.* Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин // Расчеты на прочность. 1965. Вып. 11. С. 31–63.
11. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
12. *Паймушин В.Н., Галимов Н.К.* Об устойчивости трехслойных пластин с легким заполнителем при изгибе // Тр. семинара по теории оболочек. Казань: Изд-во Казанск. физико-техн. ин-та АН СССР. Вып. 5. 1974. С. 35–42.

13. *Паймушин В.Н., Галимов Н.К.* Осесимметричный изгиб и устойчивость трехслойных круглых пластин с легким заполнителем при комбинированном нагружении // Исследования по нелинейным задачам теории пластин и оболочек. Саратов: Изд-во Саратовск. гос. ун-та, 1974. С. 94–102.
14. *Паймушин В.Н., Бобров С.Н.* О формах и потери устойчивости трехслойных пластин и оболочек с внешними слоями из однородных и армированных материалов // Механика композитных материалов. № 1. 1985. С. 79–86.
15. *Паймушин В.Н., Бобров С.Н.* Исследование устойчивости трехслойной бесконечно широкой пластины при осевом сжатии одного слоя // Механика композитных материалов. 1985. № 2. С. 284–291.
16. *Иванов В.А., Паймушин В.Н.* Уточненная постановка динамических задач трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем и численно-аналитический метод их решения // Прикладная механика и техническая физика. 1995. Т. 36. № 4. С. 137–151.
17. *Голованов А.И., Иванов В.А., Паймушин В.Н.* Численно-аналитический метод исследования локальных форм потери устойчивости несущих слоев трехслойных оболочек по смешанным формам // Механика композитных материалов. 1995. Т. 31. № 1. С. 88–100.
18. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
19. *Norr A.K., Burton W.S., Bert Ch.W.* Computational models for sandwich panels and shells // Appl. Mech. Rev. 1996. V. 49. № 3. P. 155–199.
20. *Голованов А.И., Паймушин В.Н.* Напряженно-деформированное состояние и устойчивость трехслойных оболочек из композитных материалов, имеющих зону расслоения заполнителя с несущим слоем // Механика композитных материалов. 1993. Т. 29. № 5. С. 640–652.

Казань

Поступила в редакцию
5.05.1999