МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2001

УДК 539.3

© 2001 г. Л.М. ЗУБОВ

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

Построена нелинейная теория упругих оболочек, испытывающих большие деформации и содержащих непрерывно распределенные трансляционные дислокации. Сначала дается вариационная формулировка задачи о равновесии многосвязной оболочки типа Коссера с изолированными дислокациями. Предложенный вариационный принцип позволяет легко перейти от случая изолированных дефектов к случаю непрерывно распределенных дислокаций. Установлена аналогия между краевой задачей о равновесии оболочки с непрерывно распределенными дислокациями и отсутствующей силовой нагрузкой и краевой задачей о равновесии оболочки без дислокаций под действием распределенной нагрузки.

Линейная теория непрерывно распределенных дефектов в упругих оболочках изложена в [1].

1. Исходные соотношения. Нелинейно-упругая оболочка типа Коссера [2] представляет собой двумерный материальный континуум, т.е. материальную поверхность, каждая частица которой обладает степенями свободы абсолютно твердого тела. Пусть σ – поверхность оболочки в отсчетной конфигурации (т.е. в недеформированном состоянии), отнесенная к гауссовым координатам $q^\alpha(\alpha = 1, 2)$, а $\mathbf{r}(q^1, q^2)$ – радиус-вектор произвольной точки на σ. Поверхность оболочки после деформации Σ также отнесем к координатам q^α, а положение точки поверхности Σ зададим радиус-вектором $\mathbf{R}(q^1, q^2)$. Ориентация частиц оболочки характеризуется полем поворотов $\mathbf{H}(q^1, q^2)$, где $\mathbf{H}$ – собственно ортогональный тензор. Тензорное поле поворотов $\mathbf{H}$ кинематически независимо от поля перемещения оболочки $\mathbf{u}(q^1, q^2) = \mathbf{R} - \mathbf{r}$. Вместо ортогонального тензора $\mathbf{H}$ можно использовать вектор конечного поворота [3–5]. Удельная (на единицу площади поверхности σ) потенциальная энергия деформации оболочки W задается [2, 6] соотношением

$$W = W(\mathbf{U}, \mathbf{L})$$

$$\mathbf{U} = (\operatorname{grad}\mathbf{R})\cdot\mathbf{H}^T, \quad \mathbf{L} = \frac{1}{2}\mathbf{r}^\alpha \otimes \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^\alpha}\cdot\mathbf{H}^T\right)_\times \tag{1.1}$$

$$\operatorname{grad}\boldsymbol{\Psi} \equiv \mathbf{r}^\alpha \otimes \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial q^\alpha}, \quad \mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{r}_\beta = \delta^\alpha_\beta, \quad \mathbf{r}^\alpha\cdot\mathbf{n} = 0$$

$$\mathbf{r}_\beta = \partial\mathbf{r}/\partial q^\beta \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2)$$

Здесь $\mathbf{U}$ – мера деформаций, $\mathbf{L}$ – тензор изгибных деформаций, $\mathbf{r}_\beta$ и $\mathbf{r}^\alpha$ – основной и взаимный векторные базисы на σ, $\mathbf{n}$ – нормаль к σ, grad – оператор градиента на σ, δ^α_β – символ Кронекера, $\boldsymbol{\Psi}$ – произвольное дифференцируемое тензорное поле, определенное на σ; символ $\mathbf{A}_\times$ означает векторный инвариант тензора второго ранга $\mathbf{A}$.

В дальнейшем не используются никакие допущения о малости перемещений, поворотов и деформаций.

Уравнения равновесия оболочки в усилиях и моментах имеют вид [2, 6]:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} + \mathbf{f} = 0 \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{G} + [(\operatorname{grad}\mathbf{R})^T \cdot \mathbf{D}]_\times + \mathbf{l} = 0 \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\Psi} \equiv \mathbf{r}^\alpha \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial q^\alpha}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{H}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{H}, \quad \mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{U}}, \quad \mathbf{K} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{L}} \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{f}$ – интенсивность распределенной по σ силовой нагрузки, $\mathbf{l}$ – вектор интенсивности распределенной по σ моментной нагрузки, div – оператор дивергенции на поверхности σ, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{G}$ – тензор усилий и тензор моментов типа Пиолы. Тензор усилий $\mathbf{P}$ и тензор моментов $\mathbf{K}$ аналогичны второму тензору напряжений Пиолы–Кирхгофа в трехмерной теории упругости [7], и в отличие от тензоров $\mathbf{D}$ и $\mathbf{G}$ остаются неизменными при изменении системы отсчета, т.е. при наложении жесткого движения на деформированное состояние оболочки. Из (1.1), (1.4) вытекает следующее свойство тензоров усилий и моментов: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{G} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{K} = 0$.

Предположим, что поверхность σ, соответствующая отсчетной конфигурации оболочки, многосвязна и гомеоморфна кругу с круговыми отверстиями. Граница поверхности σ состоит из внешнего замкнутого контура ω и контуров отверстий γ_k ($k = 1, \ldots, M$). Контуры отверстий свободны от нагрузки, т.е. на γ_k выполняются условия

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{D} = 0 \tag{1.5}$$

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{G} = 0 \tag{1.6}$$

Здесь и ниже $\mathbf{m}$ – единичный вектор нормали к границе, удовлетворяющий условию $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 0$.

Контур ω разобьем на две непересекающиеся части двумя способами: $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$ и $\omega = \omega_3 \cup \omega_4$. Будем предполагать, что на ω_1 задан вектор перемещений, на ω_2 – силовая нагрузка, на ω_3 задан поворот края, т.е. ортогональный тензор $\mathbf{H}$, на ω_4 – приложена распределенная моментная нагрузка. Таким образом, на внешнем контуре ω имеем следующие краевые условия:

$$\omega_1\colon \mathbf{R} = \boldsymbol{\rho}(s) \tag{1.7}$$

$$\omega_2\colon \mathbf{m}\cdot\mathbf{D} = \boldsymbol{\varphi}(s) \tag{1.8}$$

$$\omega_3\colon \mathbf{H} = \mathbf{h}(s), \quad \mathbf{h}\cdot\mathbf{h}^T = \mathbf{E} \tag{1.9}$$

$$\omega_4\colon \mathbf{m}\cdot\mathbf{G} = \boldsymbol{\mu}(s) \tag{1.10}$$

где $\boldsymbol{\rho}(s)$, $\boldsymbol{\varphi}(s)$, $\mathbf{h}(s)$, $\boldsymbol{\mu}(s)$ – заданные функции текущей длины дуги кривой ω, $\mathbf{E}$ – единичный тензор.

2. Определение поля перемещения оболочки по заданным полям деформаций и поворотов. Рассмотрим задачу нахождения перемещений оболочки при заданных тензорных полях $\mathbf{U}(q^1, q^2)$ и $\mathbf{H}(q^1, q^2)$, что эквивалентно определению положения $\mathbf{R}(q^1, q^2)$ точек деформированной поверхности Σ. Заданные функции $\mathbf{U}$ и $\mathbb{H}$ будем считать непрерывно дифференцируемыми и однозначными в области σ. Тогда тензор дисторсии оболочки

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{H} \tag{2.1}$$

также будет заданной однозначной функцией на σ. Из (1.1), (2.1) вытекает уравнение для определения вектора **R**:

$$\operatorname{grad} \mathbf{R} = \mathbf{F} \tag{2.2}$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (2.2) заключается в выполнении равенства

$$\operatorname{div}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}) = 0, \qquad \mathbf{e} \equiv -\mathbf{n} \times \mathbf{E} \tag{2.3}$$

в котором **e** – дискриминантный тензор поверхности. Векторное соотношение (2.3) состоит из трех скалярных уравнений, являющихся уравнениями совместности относительно тензора дисторсии. Решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = \mathbf{R}_0 + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(\mathbf{r}_0) \tag{2.4}$$

В многосвязной области σ поле перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{R}(\mathbf{r}) - \mathbf{r}$, определяемое формулой (2.4), вообще говоря, может обладать неоднозначностью, состоящей в том, что при обходе замкнутого контура Γ_k, охватывающего одно из отверстий, вектор **u** получает приращение

$$[\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-]_{\Gamma_k} = \mathbf{b}_k, \quad \mathbf{b}_k = \text{const} = \oint_{\Gamma_k} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{2.5}$$

Вектор $\mathbf{b}_k$, называемый вектором Бюргерса, не зависит от выбора контура Γ_k при условии, что контур охватывает только одно k-е отверстие. Неоднозначность поля перемещений в оболочке вида (2.5) означает наличие в ней трансляционных изолированных дислокаций.

Заметим, что если отказаться от требования однозначности тензора поворота **H** в многосвязной области σ, а считать однозначными тензорные поля деформации **U** и изгибной деформации **L**, то неоднозначность перемещений будет иметь более сложный по сравнению с (2.5) характер, связанный с наличием дисклинаций [6]. Принятое здесь допущение об однозначности поворотов исключает существование дисклинаций.

3. Функции напряжений в нелинейной теории оболочек. Краевую задачу о равновесии многосвязной оболочки с заданными характеристиками дислокаций $\mathbf{b}_k$ можно сформулировать как задачу определения тензорных полей **F** и **H** из уравнений равновесия (1.2), (1.3) и уравнений совместности (2.3). При этом grad **R** в (1.3) заменяется на **F**, тензор усилий **D** и тензор моментов **G** определяются соотношениями (1.4), в которых мера деформации **U** выражена через **F** и **H** согласно (2.1), а тензор изгибной деформации **L** выражен через тензор поворота **H** при помощи второго соотношения (1.1). Поскольку указанная система уравнений не содержит перемещений оболочки в качестве неизвестных функций, вектор **R** следует исключить и из краевого условия (1.7). Это можно сделать, продифференцировав (1.7) по переменной s, что приводит с учетом (2.2) к дисторсионным краевым условиям

$$\omega_1: \ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F} = \partial\boldsymbol{\rho}/\partial s \tag{3.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}$ – единичный вектор касательной к границе поверхности σ. Дисторсионные условия (3.1), вообще говоря, не эквивалентны условиям (1.7). Однако, если участок границы ω_1 связный, то условия (1.7) восстанавливаются по дисторсионным с точностью до поступательного движения оболочки. Поскольку добавление поступательного перемещения не влияет на напряженное состояние оболочки, в случае связной кривой ω_1 краевые условия (1.7) и (3.1) можно считать эквивалентными. Таким образом, краевые условия для системы уравнений относительно тензоров **F** и **H** состоят из ограничений (1.5), (1.6), (1.8) – (1.10), (3.1). Кроме того, в формулировку краевой задачи входят интегральные соотношения (2.5), в которых $\mathbf{b}_k$ – заданные постоянные.

Вместо тензоров $\mathbf{F}$, $\mathbf{H}$ в качестве основных неизвестных функций можно использовать тензоры $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$, выразив дисторсию $\mathbf{F}$ через тензор усилий Пиолы $\mathbf{D}$, тензор поворота $\mathbf{H}$, а также производные тензора $\mathbf{H}$. Это можно сделать следующим образом. Согласно (1.4) тензор усилий $\mathbf{P}$ – функция меры деформаций $\mathbf{U}$ и тензора изгибной деформации $\mathbf{L}$. Предполагая однозначную обратимость этой функции относительно $\mathbf{U}$, выразим тензор $\mathbf{U}$ через $\mathbf{P}$ и $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{U} = \lambda(\mathbf{P}, \mathbf{L}) \tag{3.2}$$

На основании (2.1), (1.4), (3.2) получим

$$\mathbf{F} = \lambda(\mathbf{D} \cdot \mathbf{H}^T, \mathbf{L}) \cdot \mathbf{H} \tag{3.3}$$

Поскольку согласно (1.1) тензор $\mathbf{L}$ выражается через тензор поворота $\mathbf{H}$ и его производные, формула (3.3) дает представление дисторсии через усилия типа Пиолы и повороты.

При отсутствии распределенной по σ силовой нагрузки, т.е. при $\mathbf{f} = 0$ уравнению равновесия (1.2) можно тождественно удовлетворить при помощи вектора функций напряжений $\mathbf{\Phi}$ [8]:

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{\Phi} \tag{3.4}$$

Из (3.4) вытекает, что для любой кривой на σ справедливо соотношение $d\mathbf{\Phi}/ds = \mathbf{m} \cdot \mathbf{D}$. Поэтому приращение функции $\mathbf{\Phi}$ при обходе любого замкнутого контура равно главному вектору сил, приложенных к этому контуру. Это означает, что если контуры отверстий многосвязной оболочки свободны от нагрузки, то вектор $\mathbf{\Phi}$ – однозначная функция в области σ.

Подставив (3.4) в (3.3), получим представление дисторсии через вектор функций напряжений и тензор поворота.

Краевые условия (1.8) на части границы ω_2 с учетом (3.4) примут вид $d\mathbf{\Phi}/ds = \varphi(s)$, что после интегрирования дает

$$\mathbf{\Phi}\,|_{\omega_2} = \int \varphi(s)ds + \mathbf{C}_0$$

где $\mathbf{C}_0$ – произвольная постоянная. Поскольку в силу (3.4) добавление постоянного вектора к функции $\mathbf{\Phi}$ не влияет на напряженное состояние оболочки, в случае связной кривой ω_2 постоянную $\mathbf{C}_0$ можно зафиксировать произвольным образом. Следовательно на ω_2 будут заданы значения функции напряжений

$$\mathbf{\Phi}\,|_{\omega_2} = \boldsymbol{\theta}(s) \tag{3.5}$$

где $\boldsymbol{\theta}(s)$ – известная функция.

Граничные условия (1.5) на контурах отверстий аналогичным образом приводятся к виду

$$\mathbf{\Phi}\,|_{\gamma_k} = \mathbf{C}_k = \mathrm{const} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ M) \tag{3.6}$$

Постоянные векторы $\mathbf{C}_k$, определяющие значения вектора функций напряжений на контурах отверстий γ_k, остаются неизвестными.

Система уравнений, описывающая равновесие оболочки и содержащая в качестве неизвестных функций вектор $\mathbf{\Phi}$ и тензор $\mathbf{H}$, состоит из уравнений совместности (2.3) и уравнений баланса моментов (1.3), в которых тензор дисторсии $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \mathbf{R}$ предполагается выраженным через вектор функций напряжений при помощи (3.3), (3.4). Краевые условия на внешнем контуре оболочки ω состоят из дисторсионных условий (3.1) на ω_1, ограничения (3.5) на ω_2 и условий (1.9), (1.10). На контурах отверстий γ_k

должны выполняться условия (1.6) и (3.6). Уравнениями для определения неизвестных постоянных $\mathbf{C}_k$ служат интегральные соотношения (2.5), в которых в качестве контуров Γ_k можно взять контуры отверстий γ_k.

4. Вариационная формулировка задачи о равновесии многосвязной оболочки с дислокациями. Сформулированная в *п.* 3 краевая задача о равновесии нелинейно-упругой оболочки с изолированными дислокациями допускает вариационную постановку, основанную на принципе дополнительной энергии. Введем в рассмотрение удельную дополнительную энергию оболочки V как функцию от тензора усилий $\mathbf{P}$ и тензора моментов $\mathbf{K}$, связанную с удельной потенциальной энергией W преобразованием Лежандра

$$V(\mathbf{P},\mathbf{K}) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right) - W \tag{4.1}$$

По свойству преобразования Лежандра имеем

$$\mathbf{U} = \partial V/\partial\mathbf{P}, \quad \mathbf{L} = \partial V/\partial\mathbf{K} \tag{4.2}$$

В (4.1), (4.2) предполагается, что меры деформации $\mathbf{U}$ и $\mathbf{L}$ выражены через тензоры $\mathbf{P}$ и $\mathbf{K}$, т.е. существует однозначное обращение определяющих соотношений (1.4).

Далее предположим, что элементарная работа моментной нагрузки, распределенной по поверхности оболочки σ и по части границы ω_4, представляет собой вариацию функционала, зависящего только от поля поворотов

$$\iint_\sigma \mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\psi}\,d\sigma + \int_{\omega_4} \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\psi}\,ds = \delta\Lambda\left[\mathbf{H}\left(q^1,q^2\right)\right] \tag{4.3}$$

$$\mathbf{E}\times\boldsymbol{\psi} = -\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\mathbf{H} \tag{4.4}$$

Здесь δ – символ вариации, $\boldsymbol{\psi}$ – вектор малого виртуального поворота [9].

Имея в виду соотношение $\mathbf{P} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$, удельную дополнительную энергию V будем считать функцией тензоров $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$, что в силу (4.2) приводит к выражению

$$\delta V = \mathrm{tr}\left[\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\cdot\left(\delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}\cdot\delta\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right)\right] + \mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial\mathbf{K}}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\delta\mathbf{K}\right] \tag{4.5}$$

Учитывая представление (3.4) тензора $\mathbf{D}$ через вектор функций напряжений, запишем выражение функционала дополнительной энергии оболочки

$$\begin{aligned}
&\Pi_0\left[\boldsymbol{\Phi}\left(q^1,q^2\right),\ \mathbf{H}\left(q^1,q^2\right),\ \mathbf{K}\left(q^1,q^2\right),\ \mathbf{C}_1,\ldots\mathbf{C}_M\right] = \\
&= \iint_\sigma \left[V(\mathbf{e}\cdot\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\Phi},\mathbf{H},\mathbf{K}) - \mathrm{tr}\left(\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{L}(\mathbf{H})\right)\right]d\sigma + \\
&+ \Lambda\left[\mathbf{H}\left(q^1,q^2\right)\right] + \int_{\omega_1} \boldsymbol{\Phi}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial s}\,ds + \sum_{k=1}^{M}\mathbf{b}_k\cdot\mathbf{C}_k
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Через $\mathbf{L}(\mathbf{H})$ в (4.6) обозначен тензор изгибной деформации, выраженный согласно (1.1) через тензор поворота. В функционале Π_0 варьируется вектор функций напряжений $\boldsymbol{\Phi}$, подчиненный условиям (3.5), (3.6), собственно ортогональный тензор $\mathbf{H}$, удовлетворяющий условиям (1.9), тензор моментов $\mathbf{K}$, а также постоянные $\mathbf{C}_k$. Допустимые функции $\boldsymbol{\Phi}$, $\mathbf{H}$ предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми, а функция $\mathbf{K}$ непрерывно дифференцируемой. Используя (4.3)–(4.5), а также соотношение

$$\delta\mathbf{L}(\mathbf{H}) = (\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\psi})\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}} \tag{4.7}$$

вычислим вариацию функционала (4.6):

$$\delta\Pi_0 = \iint_{\sigma} \{-\operatorname{div}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{\Phi}) + [\operatorname{div}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{F})]\cdot\delta\mathbf{\Phi} +$$

$$+\left[(\operatorname{grad}\mathbf{\Phi})^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{F}\right]\times\boldsymbol{\psi} + \operatorname{tr}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{K}} - \mathbf{L}\right)\cdot\delta\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\right] -$$

$$-\operatorname{div}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\psi}) + [\operatorname{div}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{H})]\cdot\boldsymbol{\psi} + \mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\psi}\}d\sigma +$$

$$+\int_{\omega_4}\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\psi}\,ds + \int_{\omega_1}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial s}\cdot\delta\mathbf{\Phi}ds + \sum_{k=1}^{M}\mathbf{b}_k\cdot\delta\mathbf{C}_k \tag{4.8}$$

После применения к (4.8) теоремы о дивергенции на поверхности и при учете ограничений $\delta\mathbf{\Phi} = 0$ на ω_2, $\boldsymbol{\psi} = 0$ на ω_3, $\delta\mathbf{\Phi} = \delta\mathbf{C}_k$ на γ_k условие стационарности функционала примет вид

$$\iint_{\sigma}\left\{[\operatorname{div}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{F})]\cdot\delta\mathbf{\Phi} + \operatorname{tr}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial\mathbf{K}} - \mathbf{L}\right)\cdot\delta\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\right] +\right.$$

$$\left.+\left[\operatorname{div}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{H}) + \left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{e}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{\Phi}\right)_{\times} + \mathbf{l}\right]\cdot\boldsymbol{\psi}\right\}d\sigma +$$

$$+\int_{\omega_1}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial s} - \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{F}\right)\cdot\delta\mathbf{\Phi}ds + \int_{\omega_4}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{m}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{H})\cdot\boldsymbol{\psi}\,ds -$$

$$-\sum_{k=1}^{M}\oint_{\gamma_k}\mathbf{m}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\psi}\,ds + \sum_{k=1}^{M}\left(\mathbf{b}_k - \oint_{\gamma_k}d\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}\right)\cdot\delta\mathbf{C}_k = 0 \tag{4.9}$$

Из (4.9) вытекает, что условие стационарности функционала (4.6) эквивалентно уравнениям совместности (2.3), уравнениям баланса моментов (1.3), второму из соотношений (4.2), дисторсионным краевым условиям на ω_1, краевым условиям (1.6) на контурах отверстий, условиям (1.10) на части ω_4 внешней границы оболочки, а также интегральным соотношениям (2.5).

5. Переход к непрерывному распределению дислокаций в оболочке. Если число дислокаций на ограниченном участке оболочки весьма велико, то целесообразно перейти к математической модели дислокаций, непрерывно распределенных по поверхности оболочки. Это можно сделать при помощи установленного выше вариационного принципа.

Будем неограниченно уменьшать диаметры отверстий таким образом, чтобы каждый контур γ_k стягивался в точку, имеющую радиус-вектор $\mathbf{r}_k$. Так как функция $\mathbf{\Phi}$ имеет одинаковые значения для всех точек контура γ_k, в пределе постоянные $\mathbf{C}_k$ совпадут со значениями функции $\mathbf{\Phi}$ в точках $\mathbf{r}_k$ и функционал (4.6) будет иметь выражение

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma}\left[V - \operatorname{tr}(\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{L})\right]d\sigma + \Lambda + \int_{\omega_1}\mathbf{\Phi}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial s}ds + \iint_{\sigma}\boldsymbol{\alpha}'\cdot\mathbf{\Phi}d\sigma \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{\alpha}' = \sum_{k=1}^{M}\mathbf{b}_k\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \tag{5.2}$$

Здесь $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$ – дельта-функция двух переменных, сосредоточенная в точке $\mathbf{r}_k$.

От функционала (5.1), соответствующего дискретному набору сосредоточенных трансляционных дефектов, легко перейти к случаю непрерывно распределенных дислокаций, заменив в (5.1) обобщенную функцию $\boldsymbol{\alpha}'$ на обычную $\boldsymbol{\alpha}$ и назвав последнюю плотностью дислокаций. Физический смысл плотности дислокаций $\boldsymbol{\alpha}$ согласно (5.2) заключается в том, что суммарный вектор Бюргерса набора дислокаций, содержащихся в произвольной подобласти $\sigma_* \subset \sigma$, выражается формулой $\mathbf{B}_* = \iint \boldsymbol{\alpha} d\sigma$ по σ_*.

Таким образом, вектор плотности дислокаций $\boldsymbol{\alpha}$ есть результирующий вектор Бюргерса всех дислокаций, содержащихся в единичной площадке поверхности оболочки.

Функционал дополнительной энергии для случая дислокаций, непрерывно распределенных по односвязной поверхности оболочки σ, принимает вид

$$\Pi\left[\boldsymbol{\Phi}\left(q^1,q^2\right),\ \mathbf{H}\left(q^1,q^2\right),\ \mathbf{K}\left(q^1,q^2\right)\right]=$$

$$=\iint_{\sigma}\left[V-\mathrm{tr}\left(\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{L}\right)+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\Phi}\right]d\sigma+\Lambda+\int_{\omega_1}\boldsymbol{\Phi}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial s}ds \tag{5.3}$$

Из стационарности функционала Π вытекают уравнения баланса моментов (1.3), в которых grad $\mathbf{R}$ заменен на $\mathbf{F}$, и соотношения, которые можно назвать уравнениями несовместности

$$\mathrm{div}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{F})+\boldsymbol{\alpha}=0 \tag{5.4}$$

Естественными краевыми условиями для функционала (5.3) служат дисторсионные условия (3.1) и условия (1.10), а главными граничными условиями являются ограничения (1.9) и (3.5).

При заданной плотности дислокаций $\boldsymbol{\alpha}$ соотношения (1.3) и (5.4) образуют полную систему уравнений равновесия оболочки с неизвестными $\boldsymbol{\Phi}$ и $\mathbf{H}$.

Заметим, что традиционный подход к нелинейной теории непрерывно распределенных дислокаций заключается в том, что плотность дислокаций определенным образом выражается через пластическую дисторсию [10, 11]. Это требует разложения деформации на упругую и пластическую составляющие, которое в области больших деформаций может быть выполнено неоднозначно, т.е. разными способами. Кроме того, пластическая дисторсия в общем случае не исключается из системы уравнений, что существенно усложняет математическую формулировку нелинейной модели среды с непрерывно распределенными дефектами. Предложенный выше вариационный подход к нелинейной теории двумерных сред с непрерывно распределенными дислокациями свободен от указанных выше недостатков, так как не требует разложения конечной деформации на упругую и пластическую составляющие.

6. Двойственные краевые задачи нелинейной теории упругих оболочек. Между уравнениями равновесия усилий (1.2) и уравнениями несовместности (5.4) существует очевидная аналогия. Введя обозначение $\mathbf{F}^* = \mathbf{e}\cdot\mathbf{F}$, видим, что уравнения (1.2) и (5.4) переходят друг в друга при заменах $\mathbf{D} \rightleftarrows \mathbf{F}^*$, $\mathbf{f} \rightleftarrows \boldsymbol{\alpha}$. Эта аналогия, отмеченная ранее [8] в частном случае $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f} = 0$, существенно связана с учетом геометрической нелинейности и отличается от статико-геометрической аналогии в линейной теории оболочек [12–14,1]. В последней имеются соответствия между усилиями и изгибными деформациями, между моментами и метрическими деформациями, а также между плотностью дислокаций и распределенной моментной нагрузкой.

Далее заметим, что выражение (3.4) тензора усилий Пиолы в случае $\mathbf{f} = 0$ аналогично, согласно (2.2), выражению тензора $\mathbf{F}^*$ через радиус-вектор $\mathbf{R}$ при $\boldsymbol{\alpha} = 0$, кинематические краевые условия (1.7) идентичны условиям (3.5), а силовые граничные условия (1.8) идентичны дисторсионным условиям (3.1).

Указанная статико-геометрическая аналогия влечет существование двойственных краевых задач для нелинейно-упругих оболочек, т.е. таких двух задач, которые математически эквивалентны, но отличаются по физической постановке, так как описывают различные физические ситуации. Системы уравнений и краевых условий двойственных задач запишем в виде таблицы, состоящей из двух столбцов

$$\operatorname{div}\mathbf{D}+\mathbf{f}=0 \qquad \operatorname{div}\mathbf{F}^*+\boldsymbol{\alpha}=0 \tag{6.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{G}+\left[(\operatorname{grad}\mathbf{R})^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}\right]_\times+\mathbf{l}=0 \qquad \operatorname{div}\mathbf{G}+\left[(\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi})^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}^*\right]_\times+\mathbf{l}=0 \tag{6.2}$$

$$\mathbf{D}=\eta\left(\mathbf{F}^*\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}},\mathbf{L}\right)\cdot\mathbf{H} \qquad \mathbf{F}^*=\eta_1\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}},\mathbf{L}\right)\cdot\mathbf{H} \tag{6.3}$$

$$\mathbf{G}=\varkappa\left(\mathbf{F}^*\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}},\mathbf{L}\right)\cdot\mathbf{H} \qquad \mathbf{G}=\varkappa_1\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}},\mathbf{L}\right)\cdot\mathbf{H} \tag{6.4}$$

$$\mathbf{F}^*=\mathbf{e}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{R} \qquad \mathbf{D}=\mathbf{e}\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi} \tag{6.5}$$

$$\mathbf{L}=\frac{1}{2}\mathbf{r}^\beta\otimes\left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial q^\beta}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right)_\times \qquad \mathbf{L}=\frac{1}{2}\mathbf{r}^\beta\otimes\left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial q^\beta}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right)_\times \tag{6.6}$$

$$\omega_1:\ \mathbf{R}=\boldsymbol{\rho}(s) \qquad \omega_1:\ \boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\chi}(s) \tag{6.7}$$

$$\omega_2:\ \mathbf{m}\cdot\mathbf{D}=\boldsymbol{\varphi}(s) \qquad \omega_2:\ \mathbf{m}\cdot\mathbf{F}^*=\boldsymbol{\nu}(s) \tag{6.8}$$

$$\omega_3:\ \mathbf{H}=\mathbf{h}(s) \qquad \omega_3:\ \mathbf{H}=\mathbf{h}(s) \tag{6.9}$$

$$\omega_4:\ \mathbf{m}\cdot\mathbf{G}=\boldsymbol{\mu}(s) \qquad \omega_4:\ \mathbf{m}\cdot\mathbf{G}=\boldsymbol{\mu}(s) \tag{6.10}$$

Первая задача (левый столбец) описывает равновесие оболочки, не содержащей дислокаций и нагруженной распределенными по σ силами $\mathbf{f}$ и моментами $\mathbf{l}$. Основными неизвестными являются радиус-вектор $\mathbf{R}$, задающий положение точек поверхности оболочки после деформации, и ортогональный тензор $\mathbf{H}$. Система уравнений состоит из уравнений равновесия сил (6.1), уравнений баланса моментов (6.2), определяющих соотношений (6.3), (6.4), которые представлены в форме зависимости тензоров усилий и моментов от мер деформации, а также геометрических соотношений (6.5), (6.6). Краевые условия (6.7)–(6.10) состоят в задании перемещений оболочки на части границы ω_1, поворотов на ω_3, силовой распределенной нагрузки на ω_2 и моментной нагрузки на ω_4.

Вторая задача (правый столбец) описывает равновесие оболочки, содержащей непрерывно распределенные дислокации с заданной плотностью $\boldsymbol{\alpha}$ и нагруженной распределенными по σ моментами с плотностью $\mathbf{l}$. Силовая поверхностная нагрузка отсутствует ($\mathbf{f}=0$). Основными неизвестными во второй задаче являются вектор функций напряжений $\boldsymbol{\Phi}$ и тензор поворота $\mathbf{H}$. Система уравнений состоит из уравнений несовместности (6.1), уравнений баланса моментов (6.2), определяющих соотношений (6.3), (6.4), выражения (6.5) тензора усилий Пиолы через вектор функций напряжений и представления (6.6) тензора изгибной деформации через тензор поворота. Определяющие соотношения в данном случае задаются посредством зависимости меры деформации $\mathbf{U}^*=\mathbf{e}\cdot\mathbf{U}$ от тензора усилий $\mathbf{P}$ и тензора изгибной деформации $\mathbf{L}$ и зависимости тензора моментов $\mathbf{K}$ от тех же аргументов. В качестве граничных условий на ω_1 задается вектор функций напряжений, что эквивалентно заданию распределенной по ω_1 силовой нагрузки. На ω_2 поставлены дисторсионные краевые условия, эквивалентные заданию перемещений. Краевые условия на ω_3 и ω_4 такие же, как и в первой задаче.

Предполагается, что указанные краевые задачи сформулированы в безразмерном виде, т.е. все величины, входящие в (6.1)–(6.10), безразмерны. Величины $\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{l}$ считаются заданными функциями координат q^1, q^2 на поверхности σ, а величины $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{h}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\chi}$, $\boldsymbol{\nu}$ – заданными функциями длины дуги на контуре ω.

Из (6.1)–(6.10) непосредственно видно, что если выполняются равенства $\mathbf{f}(q^1, q^2) = \boldsymbol{\alpha}(q^1, q^2)$, $\boldsymbol{\rho}(s) = \boldsymbol{\chi}(s)$, $\boldsymbol{\varphi}(s) = \boldsymbol{\nu}(s)$, а функции η и $\varkappa$ совпадают соответственно с функциями η_1 и $\varkappa_1$, то первая и вторая краевые задачи математически не отличаются одна от другой, хотя соответствуют совершенно различным физическим ситуациям. Таким образом, данные краевые задачи математически эквивалентны, если определяющие соотношения оболочки в первой и во второй задачах имеют соответственно вид (6.11) и (6.12):

$$\mathbf{P} = \eta\left(\mathbf{U}^*, \mathbf{L}\right), \quad \mathbf{K} = \varkappa\left(\mathbf{U}^*, \mathbf{L}\right) \tag{6.11}$$

$$\mathbf{U}^* = \eta(\mathbf{P}, \mathbf{L}), \quad \mathbf{K} = \varkappa(\mathbf{P}, \mathbf{L}) \tag{6.12}$$

Согласно (6.11), (6.12) упругие свойства материала оболочек, отвечающих двойственным, т.е. математически эквивалентным задачам, вообще говоря, различны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-014127).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов Л.М.* Непрерывно распределенные дислокации и дисклинации в упругих оболочках // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С. 102–110.
2. *Жилин П.А.* Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. № 386. С. 29–46.
3. *Simmonds J.G., Danielson D.A.* Nonlinear shell theory with a finite rotation vector // Kon. Nederland. Akad. Wetesch. 1970. B-73. № 5. P. 460–478.
4. *Pietraszkiewicz W.* Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells // Advances in Mechanics. 1989. V. 12. № 1. P. 51–130.
5. *Зубов Л.М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1982. 143 с.
6. *Зубов Л.М.* Нелинейная теория изолированных дислокаций и дисклинаций в упругих оболочках // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 139–145.
7. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. *Зубов Л.М.* Статико-геометрическая аналогия и вариационные принципы в нелинейной безмоментной теории оболочек // Тр. 12 Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 2. Ереван: Изд-во Ерев. ун-та, 1980. С. 171–176.
9. *Зубов Л.М.* Вариационные принципы и инвариантные интегралы для нелинейно упругих тел с моментными напряжениями // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 10–16.
10. *Крёнер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. М.: Мир, 1965. 103 с.
11. *Вакуленко А.А.* Связь микро- и макросвойств в упругопластических средах // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 22. С. 3–54.
12. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
13. *Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.* Линейная теория оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
14. *Зубов Л.М., Филиппова Л.М.* Теория оболочек с непрерывно распределенными дислокациями // Докл. РАН. 1995. Т. 344. № 5. С. 619–622.

Ростов на/Д

Поступила в редакцию
30.10.1997