МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2001

УДК 539.375

© 2001 г. С.А. НАЗАРОВ

ТЕНЗОР И МЕРЫ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

4.2. ИНВАРИАНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ТЕЛАХ С РАССЕЯННЫМИ ДЕФЕКТАМИ

Вычисляется известный инвариантный интеграл M по поверхности трехмерного анизотропного тела с малыми дефектами ($M = 0$ в случае однородного тела). Значение M связывается с приращением потенциальной энергии деформации вследствие поврежденности тела. Под дефектами подразумеваются полости (трещины) и упругие (абсолютно жесткие) включения; рассматривается как произвольно рассеянное конечное семейство, так и облако дефектов периодической структуры.

1. Постановка задачи. В линейной теории упругости имеются четыре инвариантных интеграла (см. [1–4] и др.), позволяющие вычислять характеристики концентраторов напряжений. Контур интегрирования обычно отодвигается от концентратора, но благодаря независимости от пути интегралы способны описывать локальные свойства напряженного состояния. В статье обсуждается один из таких интегралов, а именно, M в обозначениях [3]. Пусть интеграл M вычислен по внешней, доступной для снятия показаний, поверхности тела. Если тело Ω_0 однородное, то он инвариантен и потому аннулируется, но при появлении повреждений теряет названные свойства и оказывается ненулевым. Эту особенность M можно использовать в дефектоскопии.

Далее применяется та же форма записи основных уравнений, что и в [5]:

$$L(\nabla_x)v^\circ(x) \equiv -D(\nabla_x)AD(\nabla_x)^t v^\circ(x) = 0, \quad x \in \Omega_0 \tag{1.1}$$

$$B(x, \nabla_x)v^\circ(x) \equiv D(n(x))AD(\nabla_x)^t v^\circ(x) = p(x), \quad x \in \partial\Omega \tag{1.2}$$

Здесь v° и p – векторы смещений и нагрузок (столбцы в декартовом представлении); A – положительно определенная симметрическая 6×6-матрица упругих модулей; t – транспонирование; $D(x)$ – 3×6-матрица со столбцами

$$D^i(x) = x_i e^i \ \ (i = 1, 2, 3), \quad D^4(x) = 2^{-1/2}(0, x_3, x_2)^t \tag{1.3}$$

$$D^5(x) = 2^{-1/2}(x_3, 0, x_1), \quad D^6(x) = 2^{-1/2}(x_2, x_1, 0)^t$$

Через e^i обозначен орт оси x_i, $\nabla = \mathrm{grad}$, а $D(\nabla)$ и $D(n)$ получаются из $D(x)$ заменами x_j на $\partial/\partial x_j$ и n_j соответственно; $n = (n_1, n_2, n_3)^t$ – единичный вектор внешней нормали. Введем еще 6-столбцы деформаций и напряжений

$$\varepsilon(v; x) = D(\nabla)^t v(x), \quad \sigma(v; x) = AD(\nabla)^t v(x) \tag{1.4}$$

Поврежденное тело интерпретируется как упругое неоднородное. Считая, что масштабированием характерный размер Ω_0 сведен к единичному, фиксируем внутри Ω_0 точки $Q^1, \ldots, Q^N$ – центры дефектов

$$\omega_h^j = \{x : \xi^j \equiv h^{-1}(x - Q^j) \in \omega^j\} \tag{1.5}$$

Здесь $h > 0$ малый параметр и ω^j – приведенный дефектный объем с диаметром $O(1)$. Упругие свойства дефекта описываются матрицей $A^j(\xi^j)$, зависящей от "быстрых" переменных ξ^j. В пределе при $A^j \to 0$ или $A^j \to \infty$ получаются полость или абсолютно жесткое включение ω_h^j (см., например, [5]). Задача для поврежденного тела Ω_h принимает подобный (1.1), (1.2) вид

$$-D(\nabla_x)A_h(x)D(\nabla_x)^t u^h(x) = 0, \quad x \in \Omega_h \tag{1.6}$$

$$D(n(x))A_h(x)D(\nabla_x)^t u^h(x) = p(x), \quad x \in \partial\Omega_0 \tag{1.7}$$

Матрица-функция A_h определена формулой

$$A_h(x) = \begin{cases} A, x \in \Omega(h) \equiv \Omega_0 \setminus \{\omega_h^1 \cup \ldots \cup \omega_h^N\} \\ A^j(\xi^j), x \in \omega_h^j \quad (j = 1, \ldots, N) \end{cases} \tag{1.8}$$

В п. 5–8 будет рассмотрена задача о теле с периодическим семейством повреждений. Эти две задачи различаем только потому, что благодаря [5] все результаты для (1.6), (1.7) обоснованы строго, а в периодическом случае асимптотические разложения имеют формальный характер (автору неизвестны какие-либо результаты в части обоснования процедуры осреднения задачи с условием Неймана на поверхности произвольной формы).

2. Инвариантные интегралы. В [3] предложен интеграл

$$M(u;\Gamma) = \int_\Gamma \{\mathbf{W}(\sigma(u))x \cdot n(x) - \sigma^{(n)}(u;x) \cdot [x \cdot \nabla_x + 1/2]u(x)\} ds_x \tag{2.1}$$

Он инвариантен (не зависит от выбора замкнутой поверхности Γ) в случае отсутствия массовых сил в однородном линейно упругом теле. В (2.1) $\mathbf{W}$ – плотность упругой энергии; в соответствии с (1.4), (1.3):

$$\mathbf{W}(\sigma(u)) = 2^{-1}\sigma(u)^t A^{-1}\sigma(u) = 2^{-1}\sigma(u)^t \varepsilon(u) \tag{2.2}$$

Свяжем интеграл (2.1) с другим поверхностным интегралом

$$I_r(u;\Gamma) = \frac{1}{2}\int_\Gamma \{\sigma^{(n)}(r\partial_r u) \cdot u - \sigma^{(n)}(u) \cdot r\partial_r u\} ds_x \tag{2.3}$$

$$r\partial_r = r\frac{\partial}{\partial r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = x \cdot \nabla_x, \quad r = |x| \tag{2.4}$$

Пусть Ξ прилегающая к Γ часть тела Ω_h, свободная от дефектов, а λ гладкая срезающая функция с носителем в Ξ, $\lambda = 1$ около Γ. Пусть еще $w = \lambda u$, где u – поле смещений, удовлетворяющее (1.1) на Ξ. Имеем

$$I_r(u;\Gamma) = I_r(w;\Gamma), \quad M(u;\Gamma) = M(w;\Gamma) \tag{2.5}$$

$$2I_r(u;\Gamma) = \int_\Gamma \{\sigma^{(n)}(r\partial_r w) \cdot w - \sigma^{(n)}(w) \cdot r\partial_r w\} dx = \int_\Xi \{r\partial_r w \cdot L(\nabla_x)w - w \cdot L(\nabla_x) r\partial_r w\} dx \tag{2.6}$$

$$L(\Delta_x)r\partial_r = (r\partial_r + 2)L(\nabla_x), \quad D(\nabla_x)^t r\partial_r = (r\partial_r + 1), \quad \partial_r r = r\partial_r + 3 \tag{2.7}$$

Так как $L\omega = 0$ на $\partial\Xi$, интегрированием по частям в (2.6) получаем

$$2I_r(u;\Gamma) = \int_\Xi L(\nabla_x)w \cdot [2r\partial_r + 3 - 2]w dx =$$

$$= \int_\Xi \varepsilon(w) \cdot A\varepsilon([2r\partial_r + 1]w) dx - \int_\Gamma \sigma^{(n)}(w) \cdot [2r\partial_r + 1]w ds_x \tag{2.8}$$

Согласно (2.2), (1.4) и (2.7):

$$\varepsilon(w)\cdot A\varepsilon([2r\partial_r+1]w)=\varepsilon(w)\cdot A[2r\partial_r+3]\varepsilon(w)=2[r\partial_r+3]\mathbf{W}(\sigma(w))$$

Поэтому благодаря (2.7) последний объемный интеграл из (2.8) равен

$$2\int_{\Xi}[r\partial_r\mathbf{W}(\sigma(w))+3\mathbf{W}(\sigma(w))]dx=2\int_{\Xi}\mathbf{W}(\sigma(w))x\cdot n(x)dx \tag{2.9}$$

В силу (2.8), (2.9) и (2.1), (2.4) совпадение интегралов $I_r(u;\Gamma)$ и $M(u;\Gamma)$ установлено. Из (2.7) и (1.1) вытекает, что $L(\nabla_x)r\partial_r u(x)=0$, $x\in\Xi$. Итак, инвариантность I_r (а значит, и M) выводится из тождества Бетти. Различные аспекты применения интегралов (2.1) и (2.3) можно найти в [6–8].

3. Инвариантные интегралы для поврежденного тела. В [5] построено асимптотическое решение $\mathbf{u}^h$ задачи (1.6), (1.7), приближающее u^h с точностью $O(h^4)$. Для целей работы достаточно знать только структуру "дальнего поля" $\mathbf{v}^h$, аппроксимирующего u^h вне окрестностей дефектов,

$$\mathbf{v}^h(x)=\upsilon^\circ(x)+h^3\sum_{j=1}^{N}G^j(x)P^j\varepsilon^j. \tag{3.1}$$

Здесь υ° – поле смещений в неповрежденном теле, а $\varepsilon^j=\varepsilon(\upsilon^\circ;Q^j)$ – деформации в точках Q^j; P^j – 6×6-матрицы упругой поляризации дефектов (см. разд. 3, 4 [5], а также [9–11] для изотропного тела); $G^j=(G^{j1},\ldots,G^{j6})$ 3×6-матрица, составленная из сингулярных решений задач

$$L(\nabla_x)G^{jk}(x)=D^k(\nabla_x)\delta(x-Q^j),\quad x\in\Omega_0 \tag{3.2}$$

$$B(x,\nabla_x)G^{jk}(x)=0,\quad x\in\Gamma$$

В (3.2) δ – функция Дирака. Линейные комбинации полей $G^{j1},\ldots,G^{j6}$ описывают всевозможные деформации тела Ω_0 самоуравновешенными воздействиями, сосредоточенными в точке Q^j. Справедливы представления

$$G^{jk}(x)=\sum_{i=1}^{3}D_i^k(\nabla_x)T^i(x-Q^j)+\mathbf{G}^{jk}(x) \tag{3.3}$$

При этом D_i^k определены в (1.3), $T=(T^1,T^2,T^3)$ – фундаментальная матрица для оператора $L(\nabla_x)$ в $\mathbf{R}^3$ (аналог тензора Кельвина – Сомилианы для анизотропной среды), $\mathbf{G}^{jk}$ – гладкая в $\overline{\Omega}_0$ регулярная часть G^{jk}.

Пусть Γ – гладкая замкнутая поверхность, охватывающая все дефекты. Заменим в $M(u^h;\Gamma)$ поле u^h его асимптотическими приближениями

$$M(u^h;\Gamma)=M(\mathbf{u}^h;\Gamma)+O(h^4)=M(\mathbf{v}^h;\Gamma)+O(h^4)=I_r(\mathbf{v}^h;\Gamma)+O(h^4) \tag{3.4}$$

Ввиду инвариантности интеграл $I_r(\mathbf{v}^h;\Gamma)$ равен сумме (с обратным знаком – нормали всегда берутся внешними) таких же интегралов по сферам $\mathbf{S}_\delta^j$ с малыми радиусами δ и с центрами Q^j. Можно устремить δ к нулю, не изменяя значения интегралов. Рассмотрим один из них. Перенесем начало координат в точку Q^j, т.е. положим $y^j=x-Q^j$, $r_j=|y^j|$. В силу (2.4) и (2.3):

$$r\partial_r=x\cdot\nabla_x=Q^j\cdot\nabla_x+y^j\cdot\nabla_x=Q_i^j\partial_i+r_j\partial_{rj} \tag{3.5}$$

$$I_r(\mathbf{v}^h;\mathbf{S}_\delta^j)=-I_{rj}(\mathbf{v}^h;\mathbf{S}_\delta^j)-\sum_{i=1}^{3}Q_i^jI_i(\mathbf{v}^h;\mathbf{S}_\delta^j) \tag{3.6}$$

$$I_i(u;\Gamma)=\frac{1}{2}\int_\Gamma\left\{\sigma^{(n)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\cdot u-\sigma^{(n)}(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\}ds_x \tag{3.7}$$

Величины (3.7) совпадают с интегралами Черепанова – Райса [1–3].

Заменим в (3.6) поле $\mathbf{v}^h$ представлениями около точки Q^j, получающимися разложениями v° и G^{jk0} в ряды Тейлора. При учете (3.1), (3.6) имеем

$$\mathbf{v}^h(x) = W^{-2}(y^i) + W^0 + W^1(y^j) + W^2(y^j) + O(|y^j|^3) \tag{3.8}$$

Здесь через W^p обозначены однородные вектор-функции степени p; все они удовлетворяют уравнению $L(\nabla_y)W = 0$ в $\mathbf{R}^3\backslash 0$. Кроме того,

$$W^{-2}(y^j) = h^3[P^j D(\nabla_y)^t T(y^j)]^t \varepsilon^j, \tag{3.9}$$

$$D(\nabla_y)^t W^1(y^j) = \varepsilon^j + O(h^3), \quad W^2(y^j) = \gamma^j(y^j) + O(h^3 |y^j|^3) \tag{3.10}$$

Величина $W^0 + W^j(y^j)$ с точностью $O(h^3)$ равна сумме линейного поля $D(y^j)\varepsilon^j$, порождающего деформации $\varepsilon(v^0)$ в точке Q^j, и жесткого смещения $\Lambda(y^j)$ этой точки; (3.9) – матричная запись сингулярного члена из (3.1); $\gamma^j(y^j)$ – квадратичный полином в отрезке ряда Тейлора для решения задачи (1.1), (1.2):

$$v^\circ(x) = \Lambda(y^j) + D(y^j)\varepsilon^j + \gamma^j(y^j) + O(r_j^3) \tag{3.11}$$

Наконец, пользуясь формулами Эйлера, находим, что

$$r^j \partial_{rj} \mathbf{v}^h(x) = -2W^{-2}(y^j) + W^1(y^j) + 2W^2(y^j) + O(|y^j|^3)$$

$$\partial_i \mathbf{v}^h(x) = \partial_i W^{-2}(y^j) + \partial_i W^1(y^j) + \partial_i W^2(y^j) + O(|y^j|^2) \tag{3.12}$$

После предельного перехода $\delta \to +0$ в (3.6) остаются только те подынтегральные выражения, степень однородности которых равна -2 (учитывается площадь $4\pi\delta^2$ поверхности сферы $\mathbf{S}_\delta^j$). В I_{r_j} такими выражениями оказываются всевозможные произведения, содержащие W^{-2} и W^1, а в I_i – произведения, содержащие $\partial_i W^{-2}$ и W^2 или W^{-2} и $\partial_i W^2$. Следовательно, оперируя с W^p как с распределениями, получаем при учете (3.8)–(3.12) и (3.2):

$$\lim_{\delta\to 0} I_{r_j}(\mathbf{v}^h;\mathbf{S}_\delta^j) = \frac{3}{2}\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbf{S}_\delta^j} [\sigma^{(n)}(W^1)\cdot W^{-2} - \sigma^{(n)}(W^{-2})\cdot W^1] ds_y =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{\delta\to 0}\int_{|y|<\delta} W^1 \cdot LW^{-2} dy = \frac{3}{2} h^3 \sum_{k,m=1}^{6} \varepsilon_k^j P_{km}^j \int_{\mathbf{R}^3} W^1(y)\cdot D^m(\nabla_y)\delta(y) dy =$$

$$= \frac{3}{2} h^3 \sum_{k,m=1}^{6} \varepsilon_k^j P_{k,m}^j D^m(\nabla_y)^t W^1(y)|_{y=0} = -\frac{3}{2} h^3 \varepsilon^j \cdot P^j \varepsilon^j + O(h^6) \tag{3.13}$$

Аналогично,

$$\lim_{\delta\to 0} I_i(\mathbf{v}^h;\mathbf{S}_\delta^j) = \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{S_\delta^j} [\sigma^{(n)}(\partial_i W^2)\cdot W^{-2} - \sigma^{(n)}(W^{-2})\cdot \partial_i W^2] ds_y + \right.$$

$$\left. + \int_{\mathbf{S}_\delta^j} [\sigma^{(n)}(\partial_i W^{-2})\cdot W^2 - \sigma^{(n)}(W^2)\cdot \partial_i W^{-2}] ds_y \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\int_{|y|<\delta} \{\partial_i W^2 \cdot LW^{-2} - W^2 \cdot L\partial_i W^{-2}\} dy =$$

$$= \frac{1}{2} h^3 \sum_{k,m=1}^{6} \varepsilon_k^j P_{km}^j \int_{\mathbf{R}^3} \{\partial_i W^2 \cdot D^m(\nabla_y)\delta(y) - W^2 \cdot \partial_i D^m(\nabla_y)\delta(y)\} dy =$$

$$= -h^3 \sum_{k,m=1}^{6} \varepsilon_k^j P_{km}^j [\partial_i D^m(\nabla_y)^t W^2(y)]|_{y=0} = -h^3 \varepsilon^j \cdot P^j [\partial_i D(\nabla_y)^t \gamma^j](0) + O(h^6) \tag{3.14}$$

Согласно (3.11) и (1.3):

$$[\partial_i D(\nabla_y)^t \gamma^j](0) = \varepsilon(\partial_i v^\circ; Q^j) \qquad (3.15)$$

Таким образом, из (3.4), (3.6) и (3.13)–(3.15) выводим окончательную формулу

$$M(u^h;\Gamma) = I_r(u^h;\Gamma) = h^3 \sum_{j=1}^{J} \left[\frac{3}{2}\varepsilon^j + \sum_{i=1}^{3} Q_i^j \varepsilon(\partial_i v^\circ; Q^j)\right] \cdot P^j \varepsilon^j + O(h^4) \qquad (3.16)$$

4. Обсуждение. В [5] обнаружена связь между потенциальными энергиями $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{U}_h$ деформации тел Ω_0 и Ω_h усилиями p:

$$\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U}^h - \mathbf{U}^\circ = \frac{1}{2} h^3 \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j \cdot P^j \varepsilon^j + O(h^4) \qquad (4.1)$$

Сравнивая соотношения (4.1) и (3.16), обнаруживаем в (3.16) лишние члены

$$\frac{1}{2} h^3 \sum_{i=1}^{3} Q_i^j \frac{\partial}{\partial x_j} [\varepsilon(u^\circ; x) \cdot P^j \varepsilon(u^\circ; x)]|_{x=Q^j} \quad (j = 1, \ldots, N) \qquad (4.2)$$

Они заведомо малы в двух ситуациях:

1° множество, в которое вкладываются все дефекты $\omega_h^1, \ldots, \omega_h^N$, имеет малый диаметр (по сравнению с $\mathrm{diam}\Omega_0$);

2° поле деформаций в неповрежденном теле Ω_0 постоянно или его изменяемость незначительна.

В результате пренебрежения величиной (4.2) и остатками $O(h^4)$ в (3.16), (4.1) получается приближенная формула для приращения потенциальной энергии деформации тела вследствие возникновения дефектов

$$\Delta\mathbf{U} \approx \tfrac{1}{3} M(u^h;\Gamma) \qquad (4.3)$$

Если выполнено требование 1°, то нужно поместить начало координат вовнутрь упомянутого множества. Простейший случай – одиночное включение ω_h^1 с центром $Q^1 = 0$; при этом выражение (4.2) исчезает полностью (так как $Q_i^1 = 0$), а соответствующая формула (4.3) по существу известна (см. [4, 6]).

Информация, необходимая для вычисления интеграла (2.1), относится к внешней поверхности $\Gamma = \partial\Omega_0$ тела, доступной для измерений. В (2.1) присутствуют поле смещений и его первые производные; поэтому интеграл M более удобен, чем интеграл I_r, в котором фигурируют также и вторые производные. Для тела без дефектов интеграл $M(\overset{\circ}{u};\Gamma)$ равен нулю и потому $M(u^h;\Gamma)$ можно рассматривать как некую меру неоднородности материала.

Поверхность Σ, по которой вычисляется M, не обязана совпадать с $\partial\Omega_0$ тела. Пусть Σ ограничивает область $G \subset \Omega_0 \cup \Gamma$ и не пересекается с $\omega_h^1, \ldots, \omega_h^N$. Тогда интеграл $M(u^h;\Sigma)$ равен правой части (3.16), где суммирование распространено только на те j, для которых $\omega_h^j \subset G$. Это обстоятельство можно использовать для вычисления приращения энергии в произвольной ситуации

$$\Delta\mathbf{U} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{N} M_j(u^h;\Sigma_j) + O(h^4)$$

Здесь Σ_j – поверхность, охватывающая лишь одно включение ω_h^j, а M_j – интеграл (2.1), в котором x заменено на $x^j = x - Q^j$ (сравни с (3.6), (3.7)).

Укажем одну модификацию условия 2°. Если деформации суть обобщенно однородные степени N функции переменных x, то согласно формуле Эйлера

$$\sum_{i=1}^{3} Q_i^j \partial_i \varepsilon(u^\circ; Q^j) = N\varepsilon(u^\circ; Q^j), \quad \Delta\mathrm{U} = (3+2N)^{-1} M(u^h;\Gamma) + O(h^4) \tag{4.4}$$

Продемонстрируем использование (4.4) на примере плоской задачи теории упругости о прямолинейной трещине с облаком дефектов в концевой зоне. Будем считать, что диаметр облака мал по сравнению с длиной трещины, а значит, поле деформаций с несущественной погрешностью заменяется главным членом его асимптотики вблизи вершины, обладающим корневой особенностью (т.е. $N = -^1/_2$). Через Г обозначим дугу, соединяющую берега трещины внутри области и охватывающая семейство дефектов. Начало координат совместим с вершиной трещины. Пусть, наконец, массовые силы отсутствуют (обеспечиваем инвариантность M) и берега трещины свободны от напряжения (интеграла M по участкам берегов аннулируются). Переход от $\mathbf{R}^3$ к $\mathbf{R}^2$ сопровождается изменениями множителей в формулах. Укажем эти замены: в (2.1) из квадратных скобок исчезает $^1/_2$, в (3.16) и (4.4) вместо 3 появляется 2. Сам интеграл $M(u^h;\Gamma)$ есть $O(h^2)$, а остатки в (3.16) и (4.4) составляют $O(h^3)$. Формула для приращения энергии, вызванного возникновением облака рассеянных дефектов около вершины трещины, имеет вид $\Delta\mathrm{U} \approx {}^1/_2 M(u^h;\ \Gamma)$.

Поверхности Σ не запрещается быть лишь кусочно-гладкой (обладать коническими точками, ребрами и т.п.) при условии, что поле u и непрерывно дифференцируемого в окрестности Σ. Однако в случае негладкой границы $\Gamma = \partial\Omega$ нужна осторожность: из-за сингулярностей напряжений $\sigma(u^h)$ в интеграле $M(u^h;\ \Gamma)$ возможно появление дополнительных слагаемых.

5. Осреднение свойств периодического композита. Рассмотрим занимающее объем Ω_0 тело Ω^l, для которого матрица $A^l(l_0^{-1}x)$ является (l_1, l_2, l_3) – периодической (период относительно x_i равен l_i). Предположим, что величина $l_0 = [l_1^2 + l_2^2 + l_3^2]^{1/2}$ мала по сравнению с характерным размером самого тела Ω_0 и введем "быстрые" переменные

$$\eta = l_0^1 x \tag{5.1}$$

В результате появляется растянутая ячейка периодичности S – параллелепипед с ребрами $l_i^0 = l_0^{-1} l_i$, сравнимыми по порядку с единицей. Теория осреднения (см. [13–16] и др.), позволяющая вычислить эффективные модули композитного материала, известна и соответствующая процедура осреднения приводится только для того, чтобы согласовать ее с матричной записью уравнений равновесия, значительно укорачивающей формулы (см. [17, 5] и др.). Асимптотическое представление поля смещений в композите ищется в виде

$$u^*(x) + l_0 v^1(x,\eta) + l_0^2 v^2(x,\eta) + \ldots \tag{5.2}$$

Под u^* понимается осредненное поле смещений, а v^1 и v^2 – асимптотические поправки. Многоточием обозначаются младшие члены. Условимся, что зависимость всех функций от переменных (5.1) периодическая (период по η_i равен $l_0^{-1} l_i$). Сначала предположим, что A^l – кусочно гладкая, непрерывная матрица–функция. Подставим (5.2) в уравнения равновесия

$$-D(\nabla_x) A^l(l_0^{-1}x) D(\nabla_x)^t u(x) = 0, \quad x \in \Omega^l \tag{5.3}$$

Отделим зависимости функций от переменных x и η. Собирая коэффициенты при одинаковых степенях l_0, получаем задачи для определения v^1 и v^2:

$$-D(\nabla_\eta)A^l(\eta)D(\nabla_\eta)^t v^1(x,\eta) = D(\nabla_\eta)A^l(\eta)D(\nabla_x)^t u^*(x), \quad \eta \in S \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}-D(\nabla_\eta)A^l(\eta)D(\nabla_\eta)^t v^2(x,\eta) &= D(\nabla_x)A^l(\eta)D(\nabla_x)^t u^*(x) + \\ &+ D(\nabla_x)A^l(\eta)D(\nabla_\eta)^t v^1(x,\eta) + D(\nabla_\eta)A^l(\eta)D(\nabla_x)^t v^1(x,\eta), \quad \eta \in S\end{aligned} \tag{5.5}$$

Переменная $x \in \Omega$ рассматривается как параметр в каждой из задач (5.4) и (5.5). Условием разрешимости задачи на ячейке S в классе периодических функций служит равенство нулю главного вектора ее правой части. Для (5.4) это условие выполнено. Обозначим через V периодическую матрицу-функцию размером 3×6, удовлетворяющую системе

$$-D(\nabla_\eta)A^l(\eta)D(\nabla_\eta)^t V(\eta) = D(\nabla_\eta)A^l(\eta), \quad \eta \in S \tag{5.6}$$

Произвол в выборе столбцов матрицы – жесткие смещения – не сказывается на дальнейших вычислениях. Сопоставляя (5.6) и (5.4), выводим

$$v^1(x, \eta) = V(\eta)D(\nabla_x)^t u^*(x) \tag{5.7}$$

Поместим (5.7) в (5.5) и вычислим главный вектор правой части F системы (5.5). Имеем

$$\overline{F(x,\eta)} = D(\nabla_x)\{\overline{A^l(\eta)} + \overline{A^l(\eta)D(\nabla_\eta)^t V(\eta)}\}D(\nabla_x)^t u^*(x)$$

$$\overline{F(x,\eta)} = [\operatorname{mes}_3 S]^{-1}\int\limits_S F(x,\eta)d\eta \tag{5.8}$$

Итак, условие разрешимости задачи (5.5) принимает вид уравнений

$$-D(\nabla_x)A^* D(\nabla_x)^t u^*(x) = 0, \quad x \in \Omega \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}A^* &= \overline{A^l(\eta)} + \overline{A^l(\eta)D(\nabla_\eta)^t V(\eta)} = \overline{A^l(\eta)} - \overline{V(\eta)^t D(\nabla_\eta)A^l(\eta)} = \overline{A^l(\eta)} - \\ &- \overline{[D(\nabla_\eta)^t V(\eta)]^t A^l(\eta)D(\nabla_\eta)^t V(\eta)}\end{aligned} \tag{5.10}$$

Последние равенства получены интегрированием по частям при учете симметричности матрицы A и справедливости формулы (5.6). Именно матрице (5.10) и отводится роль эффективной (осредненной) матрицы упругих свойств композитного материала. Упомянем известный факт: матрица A^* всегда оказывается симметрической и положительно определенной.

6. Матрица эффективных модулей. Представления (5.10) получены для матрицы-функции A, непрерывной на S. Тем не менее, ими можно пользоваться и в случае разрывов на гладкой поверхности Σ в S: нужно предварительно сгладить скачки в узкой, шириной $O(\varepsilon)$, окрестности поверхности Σ, а затем перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$. Так как конечная формула в (5.10) не содержит производных матрицы A, указанный способ вычисления A^* нетрудно обосновать. Кроме того, стандартные предельные переходы (см., например, разд. 3 [5]) позволяют включить в рассмотрение полости и абсолютно жесткие вставки. Впрочем, в цитированной литературе по теории осреднений содержится прямой анализ всех обсуждаемых ситуаций.

Проверим одно частное свойство матрицы A^*. Рассмотрим первоначально однородный материал, ослабленный периодическим семейством полостей, т.е.

$$A^l(\eta) = \begin{cases} A, & \eta \in S \setminus \overline{\omega} \\ \mathbf{0}, & \eta \in \omega \end{cases} \tag{6.1}$$

Здесь $\overline{\omega}$ – замкнутое подмножество S; множество $S\setminus\overline{\omega}$ связное. Матрица V определяется как периодическое решение заменяющей систему (5.6) задачи

$$-B(\nabla_\eta)AD(\nabla_\eta)^t V(\eta) = 0, \quad \eta \in S\backslash\omega$$
$$D(n(\eta))AD(\nabla_\eta)^t V(\eta) = -D(n(\eta))A, \quad \eta \in \partial\omega \tag{6.2}$$

Формула (5.7) для коэффициента v^1 в (5.2) остается прежней. Условие разрешимости задачи для v^2 имеет вид системы (5.9), в которой

$$A^* = A - [\mathrm{mes}_3\, S]^{-1}\{A\,\mathrm{mes}_3\,\omega + 2(E(V^j, V^k; S\setminus\overline{\omega}))_{j,k=1}^6\} \tag{6.3}$$

$$E(V,W;\Xi) = \frac{1}{2}\int_\Xi [D(\nabla_\eta)^t V]^t AD(\nabla_\eta)^t W d\eta = \frac{1}{2}\int_\Xi \sigma(V)\cdot\varepsilon(W)d\eta \tag{6.4}$$

При этом (6.3) – перезапись (5.10), учитывающая (6.1) и (5.8). В случае $\mathrm{mes}_3\omega > 0$ вычитаемое в (3.12) является положительно определенной матрицей.

7. Однородное тело с периодическим семейством рассеянных повреждений. Допустим, что имеется еще один малый параметр h, характеризующий размеры дефектов в ячейке S. Для простоты считаем, что в S имеется только один дефект ($N = 1$ в (1.5)). Совместим центр параллелепипеда S с началом координат $\eta = 0$ и предположим, что дефект занимает объем

$$\omega_h^1 = \{\eta \in \mathbf{R}^3 : \ \xi = h^{-1}\eta \in \omega^1\} \tag{7.1}$$

Иными словами, дефекты в самом теле Ω^l, первоначально однородном, получаются всевозможными сдвигами множества $\omega_\delta^1 = \{x : \rho^{-1}x \in \omega^1\}$, где $\rho = l_0 h$ и $\rho \ll h$, $\rho \ll l_0$. Таким образом, диаметр $O(\rho)$ дефектов много меньше минимального расстояния $O(h)$ между ними. Подобные задачи об облаках рассеянных повреждений (микротрещин) исследовались в [17–21] и др. Матрица $A(\eta)$ на ячейке вводится похожей на (1.8), (6.1) формулой

$$A(\eta) = \begin{cases} A^\circ, & \eta \in S\setminus\overline{\omega_h^1} \\ A^1(h^{-1}\eta), & \eta \in \omega_h^1 \end{cases} \tag{7.2}$$

В результате эталонная задача (5.6) оказывается сингулярно возмущенной и требуется применить асимптотическую процедуру [22–24], описанную в [5]. Если иметь в виду только вычисление асимптотики матрицы A^*, то возможны значительные упрощения благодаря второму ее представлению в (5.10): необходимо знать лишь главный член асимптотики решения V на множестве ω_h^1, так как $D(\nabla_y)A(y) = 0$ при $y \notin \omega_h^1$, в силу (7.2). Повторяя рассуждения из разд. 4 [5] применительно к задаче (5.6), заключаем, что вблизи ω_h^1:

$$V(x) = hX^1(\xi) + \ldots \tag{7.3}$$

Здесь $X^1 = (X^{11},\ldots, X^{16})$ – 3×6-матрица, составленная из специальных решений X^{1k} (см. разд. 2 [5]), а многоточием обозначаются несущественные члены. Верна асимптотическая формула (см. (3.9)):

$$X^1(\xi) = [P^1 D(\nabla_\xi)^t T(\xi)]^t + O(|\xi|^{-3}), \quad |\xi| \to \infty \tag{7.4}$$

Приступим к расчету асимптотики A^*. Применим второе представление из (5.10) и поместим туда (5.9); в результате получаем

$$A^* = A^\circ + (\mathrm{mes}_3\, S)^{-1}\left\{\int_{\omega_h^1} (A^1(h^{-1}\eta) - A)d\eta - h\int_{\omega_h^1} X^1(h^{-1}\eta)^t D(\nabla_\eta)A^1(h^{-1}\eta)d\eta + \ldots\right\} =$$
$$= A^\circ + h^3(\mathrm{mes}_3\, S)^{-1}\left\{\int_{\omega^1} (A^1(\xi) - A)d\xi + \int_{\omega^1} (D(\nabla_\xi)^t X^1(\xi))^t (A^1(\xi) - A)d\xi\right\} + \ldots \tag{7.5}$$

Далее воспользуемся интегральным представлением (2.17) из [5] для элементов матрицы P^1. Несколько раз интегрируя по частям, выводим

$$P^1 = \int_{\omega^1} (D(\xi)+X^1(\xi))^t D(\nabla_\xi)A^1(\xi)D(\nabla_\xi)^t X^1(\xi)d\xi =$$

$$= -\int_{\omega^1} (D(\xi)+X^1(\xi))^t D(\nabla_\xi)^t (A^1(\xi)-A)d\xi = \int_{\omega^1} [D(\nabla_\xi)^t (D(\xi)+X^1(\xi))]^t (A^1(\xi)-A)d\xi =$$

$$= \int_{\omega^1} [D(\nabla_\xi)^t X^1(\xi)]^t [A^1(\xi)-A]d\xi + \int_{\omega^1} [A^1(\xi)-A]d\xi \tag{7.6}$$

В последнем равенстве учтено, что в силу (1.3) $D(\nabla_\xi)^t D(\xi)$ – единичная 6×6-матрица. Сравнивая (7.5) и (7.6), заключаем

$$A^* = A + (\mathrm{mes}_3 S)^{-1} h^3 P^1 + \ldots \tag{7.7}$$

В соответствии с определениями из [5] $h^3 P^1$ – матрица поляризации дефекта ω_h^1, а $\rho^3 P^1$ – аналогичная матрица $P^1(\omega_\rho^1)$ для неприведенного (с истинным размером $\rho = l_0 h$) дефекта. Итак

$$\Delta A = A^* - A = (l_0^3 \,\mathrm{mes}_3\, S)^{-1} P^1(\omega_\rho^1) + \ldots \equiv P^* + \ldots \tag{7.8}$$

В главном приращение ΔA совпадает с суммой P^* матриц поляризации дефектов, расположенных в единичном объеме. Матрицу P^* будем называть матрицей объемной поляризации периодического семейства повреждений.

8. Интеграл M в случае периодических повреждений. Пусть нагрузка p такова, что в теле Ω_0 (неповрежденном) реализуется однородное напряженное состояние σ°, т.е.

$$p(x) = D(n(x))\sigma^\circ,\ \sigma(u^\circ; x) = \sigma^\circ \in \mathbf{R}^6,\ \ \varepsilon(u^\circ; x) = \varepsilon^\circ = A^{-1}\sigma^\circ \tag{8.1}$$

Ту же нагрузку приложим и к телу с периодическим семейством микродефектов. Соответствующая задача теории упругости сводится к системе (5.3) с матрицей (7.2), снабженной краевыми условиями

$$D(n(x))AD(\nabla_x)u(x) = p(x),\quad x \in \Gamma \tag{8.2}$$

В задаче (5.3), (8.2) поле напряжений $\sigma(u)$ перестает быть постоянным. Тем не менее, некоторая равномерность распределения напряжений сохраняется: после осреднения возникает система (5.9) с условиями

$$D(n(x))A^* D(\nabla_x)u^*(x) = p(x),\quad x \in \Gamma \tag{8.3}$$

решение u^* которой порождает постоянные (осредненные) поля

$$\sigma^* \equiv A^* D(\nabla_x)u^*(x) = \sigma^\circ,\quad \varepsilon^* \equiv \varepsilon(u^*; x) = (A^*)^{-1}\sigma^\circ \tag{8.4}$$

Ввиду инвариантности M заключаем, что для задач (1.1), (1.2) и (5.9), (8.3)

$$M(v^\circ; \Gamma) = 0,\quad M^*(u^*; \Gamma) = 0 \tag{8.5}$$

В определении (2.1) интеграла M^* фигурирует матрица A^* вместо A.

Найдем интеграл $M(u; \Gamma)$ в случае задачи (5.3), (8.2). Как и в п. 3, он равен взятой с обратным знаком сумме интегралов по малым сферам, охватывающим дефекты. Некоторые упрощения в вычислениях возникают благодаря однородности полей (8.4): в (3.8) и (3.12) отсутствует член W^2, поскольку

$$u^*(x) = d(x)\alpha^* + D(x)\varepsilon^* \tag{8.6}$$

Рассмотрим какой-либо дефект ω_ρ^1 из семейства. Пусть Q^j – центр ω_ρ^1 и $C\rho > \delta > c\rho$, причем $\rho = l_0 h$ и сфера $\mathbf{S}_\delta^j$ с центром в Q^j охватывает ω_ρ^1. Повторим выкладки, приведшие в п. 3 к вычислению интеграла (3.6). Пользуясь (5.2), (5.7), (7.3) и (7.4), (8.6), получаем играющее роль (3.8)–(3.10) формулы

$$u(x)=u^*(x)+l_0 v^1(\eta)+\ldots=u^*(x)=\rho X^1(\xi)D(\nabla_x)^t u^*(x)+\ldots=$$

$$=u^*(x)+\rho^3\sum_{k,m=1}^{6}\varepsilon_k^* P_{km}^1 \sum_{i=1}^{3} D_i^m(\nabla_{y^j})T^i(y^j)+\ldots \tag{8.7}$$

$$W^{-2}(y)=\rho^3[P^1 D(\nabla_y)^t T(y)]^t\varepsilon^* \tag{8.8}$$

$$D(\nabla_y)^t W^1(y)=\varepsilon^*,\quad W^2(y)=0 \tag{8.9}$$

Согласно (8.7), (8.9) преобразования (3.14) дают соотношение $I_i(u;\mathrm{S}_\delta^j)=\ldots(i=1,2,3)$. Кроме того, обращаясь к (3.6) и (3.18), получаем

$$I_r(u;\mathbf{S}_\delta^j)=I_{r_j}(u;\mathbf{S}_\delta^j)+\ldots=-{}^3\!/\!_2\,\rho^3\varepsilon^*\cdot P^1\varepsilon^*+\ldots \tag{8.10}$$

Все повреждения одинаковы и их количество равно

$$\mathrm{mes}_3\,\Omega[l_0^3\,\mathrm{mes}_3\,S]^{-1}+\ldots \tag{8.11}$$

Наличие или отсутствие дефектов в узкой окрестности поверхности Г не сказывается на (8.11). Суммируя (8.10) по всем дефектам, имеем

$$M(u;\Gamma)=\frac{3}{2}(l_0 h)^3\sum\varepsilon^*\cdot P^1\varepsilon^*+\ldots=\frac{3}{2}\sum\varepsilon^*\cdot P(\omega_\rho^1)\varepsilon^*+\ldots,$$

$$[\mathrm{mes}_3\,\Omega]^{-1}M(u;\Gamma)=\frac{3}{2}[l_0^3\,\mathrm{mes}_3\,S]^{-1}\varepsilon^*\cdot P(\omega_\rho^1)\varepsilon^*+\ldots=\frac{3}{2}\varepsilon^*\cdot P^*\varepsilon^*+\ldots \tag{8.12}$$

В силу (8.4) и (7.7), (8.1) $\varepsilon^*=(A^*)^{-1}\sigma^\circ=(A^\circ)^{-1}\sigma^\circ+\ldots=\varepsilon^\circ+\ldots$, т.е. окончательно (8.12) принимает вид

$$[\mathrm{mes}_3\Omega]^{-1}M(u;\Gamma)={}^3\!/\!_2\,\varepsilon^\circ\cdot P^*\varepsilon^\circ+\ldots \tag{8.13}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черепанов Г.П.* Распространение трещин в сплошной среде // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 476–488.
2. *Rice J.R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech. 1968. V. 35. № 2. P. 379–386.
3. *Knowles J.K., Sternberg E.* On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics // Arch. Rat. Mech. Analysis. 1972. V. 44. № 3. P. 187–211.
4. *Budiansky B., Rice J.R.* Conservation laws and energy release rates // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1973. V. 40. № 1. P. 201–203.
5. *Назаров С.А.* Тензор и меры поврежденности. 1. Асимптотический анализ анизотропной среды с дефектами // Изв. АН СССР. МТТ. 2000. № 3. С. 113–124.
6. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Весовые функции и инвариантные интегралы высших порядков // Изв. АН СССР. МТТ. 1995. № 1. С. 104–119.
7. *Назаров С.А.* Инвариантные интегралы в модели трещины Леонова–Панасюка–Дагдейла // ПМТФ. 1997. Т. 38. № 5. С. 147–155.
8. *Назаров С.А.* При помощи инвариантных интегралов можно вычислить все коэффициенты при младших сингулярностях поля напряжений // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1996. № 22. Вып. 4. С. 95–99.
9. *Зорин И.С., Мовчан А.Б., Назаров С.А.* О применении тензоров упругой емкости, поляризации и присоединенной деформации // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. Вып. 16. С. 75–91.

10. *Зорин И.С., Мовчан А.Б., Назаров С.А.* Об использовании тензора упругой поляризации в задачах механики трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 128–134.
11. *Назаров С.А.* Упругие емкость и поляризация дефектов в упругом слое // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 57–65.
12. *Назаров С.А.* Весовые функции и инвариантные интегралы // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1990. Т. 1. С. 17–31.
13. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984. 352 с.
14. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
15. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
16. *Назаров С.А.* Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 5. С. 1–92.
17. *Назаров С.А.* Нелинейные эффекты деформирования композитов с регулярной системой мелких трещин // Механика композитных материалов. 1988. № 6. 1052–1059.
18. *Болотин В.В.* Стохастические модели зарождения и развития трещин // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984. С. 166–179.
19. *Ромалис Н.Б., Тамуж В.П.* Разрушение структурно неоднородных тел. Рига: Зинатне, 1989. 224 с.
20. *Канаун С.К., Левин В.М.* Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Петрозаводск: Изд-во ПГУ, 1993. 398 с.
21. *Мовчан А.Б., Назаров С.А.* Трещины в композитных материалах. 1. // Механика композитных материалов. 1990. № 5. С. 842–851; 2. № 6. С. 1038–1046.
22. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
23. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verlag, 1990. 432 s.
24. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin: Walter de Gruyter, 1994. 524 p.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
16.11.1998