

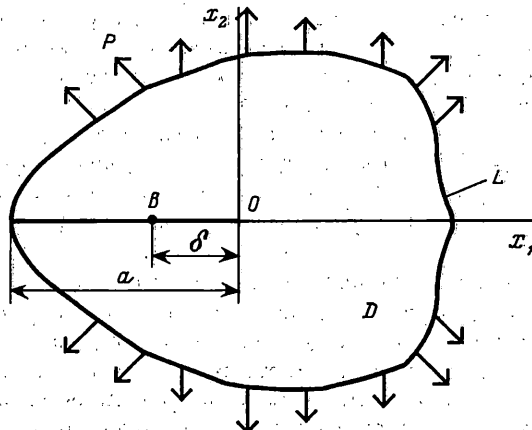
УДК 539.375

© 2001 г. И.М. ЛАВИТ

РОСТ ТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ КВАЗИХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ МОНОТОННО ВОЗРАСТАЮЩЕЙ И ЦИКЛИЧЕСКОЙ НАГРУЗКАХ

Рассматривается задача о росте прямолинейной поверхностной трещины нормального отрыва длиной a в упругопластическом плоскодеформированном теле, нагруженном распределенными поверхностными усилиями p , изменяющимися квазистатически пропорционально одному параметру (фиг. 1). Предполагается, что размеры зоны пластических деформаций вокруг кончика трещины малы по сравнению с размерами тела и длиной трещины. В этих условиях поведение трещины при монотонно возрастающем параметре нагрузки достаточно точно описывается теорией квазихрупкого разрушения Ирвина – Орована [1, 2], основанной на допущении, что в процессе роста трещины упомянутая пластическая зона перемещается вместе с кончиком трещины не изменяясь. Если рассчитанная величина коэффициента интенсивности напряжений K_I оказывается меньше вязкости разрушения K_{IC} – материальной константы, то трещина покоится, при квазистатическом росте трещины ее длина и параметр нагрузки связаны условием $K_I = K_{IC}$. Сопrotивление росту трещины, обусловленное пластическим деформированием материала при перемещении пластической зоны вместе с кончиком трещины, предполагается постоянным и учитывается косвенно – через величину K_{IC} .

Таким образом, трещина длиной a_0 начинает расти только при достижении параметром нагрузки некоторого критического значения, что находится в согласии с экспериментальными данными в случае монотонно возрастающего параметра нагружения [3]. Однако известно, в противоречии с теорией квазихрупкого разрушения, что трещина при определенных условиях может расти и при меньшем



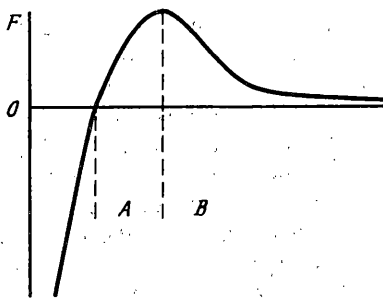
Фиг. 1

значении параметра нагрузки (докритический рост трещины). Наиболее важной и изученной разновидностью такого роста является усталостный рост трещины. Несмотря на то, что его закономерности удовлетворительно описываются с помощью понятий механики разрушения, ответить на вопрос, почему усталостная трещина растет, механика разрушения, без введения дополнительных критериев роста трещины, не в состоянии.

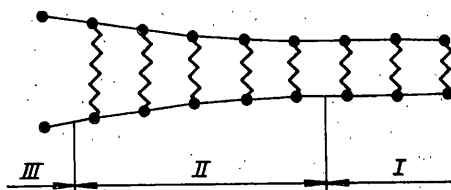
Попытка устранить этот недостаток предпринята в данной работе, развивающей предыдущие исследования [4, 5]. Ее цель состоит в создании единой математической модели квазистатического роста трещины в упругопластической среде, дающей адекватное описание как устойчивого роста трещины при монотонно возрастающей нагрузке, так и ее усталостного роста при выполнении ограничений, обеспечивающих условия квазихрупкого разрушения. Создание такой модели приводит к необходимости рассчитывать напряжения и деформации в пластической зоне вокруг кончика трещины, что соответствует переходу от линейной к нелинейной механике разрушения. При этом возникает проблема особой точки: поля напряжений и деформаций сингулярны в кончике трещины [3]. Эта проблема есть и в линейной механике разрушения, но там она легко решается – существуют достаточно надежные методы, позволяющие определить напряжения и деформации в окрестности кончика трещины. Это возможно благодаря тому, что характер сингулярного решения известен заранее; так, все успешно применяемые численные методы его точно воспроизводят. Иначе обстоит дело при решении упругопластической задачи. Известна асимптотика поля напряжений при приближении к кончику трещины для линейной механики разрушения [3]. Известна, при некоторых дополнительных гипотезах, и асимптотика поля напряжений для нелинейной механики разрушения (HRR-асимптотика [3]). Эти асимптотики существенно различны. И не известен метод решения задач теории пластичности типа метода упругих решений Ильюшина [6], который позволил бы построить алгоритм численного получения HRR-асимптотики.

Сингулярность полей напряжений и деформаций в кончике трещины – атрибут не физической реальности (бесконечных напряжений и деформаций быть не может), а ее математического описания. Последнее можно изменить так, что сингулярность исчезнет. Допустим, что кромки трещины взаимодействуют, причем силы этого взаимодействия, называемые силами сцепления, распределены так, что кончик трещины перестает быть особой точкой напряженно-деформированного состояния. Такое предположение было независимо высказано Леоновым и Панасюком [7], Баренблаттом [8–10] и Дагдейлом [11], опиравшимися на более ранние исследования (см. работы [12, 13]). Решение упругопластических задач с учетом сил сцепления рассмотрено в работах [14–18] и др. В них, однако, возможность применения теории сил сцепления к математическому моделированию процесса усталостного роста трещины даже не обсуждалась. Но оказывается, что умея вычислять напряжения и деформации в окрестности кончика трещины (а введение в рассмотрение сил сцепления позволяет выполнить это корректно – методом упругих решений [6]), можно моделировать движение трещины не только при росте параметра нагрузки, когда трещина удлиняется, но и при его уменьшении, когда она укорачивается. Уравнения, описывающие эти процессы, алгоритм вычислений и некоторые результаты численных расчетов приводятся ниже.

1. Моделирование роста трещины. С точки зрения механики сплошной среды рост трещины – это удлинение линии сильного разрыва поля перемещений, и естественным следствием такого представления является трещина с невзаимодействующими кромками – трещина Гриффитса. Поэтому построение любой другой модели трещины должно опираться на анализ процессов трещинообразования, протекающих на атомарном уровне. Рост трещины в микроскопическом аспекте – это разделение атомных слоев вследствие разрывов межатомных связей. Типичная зависимость силы



Фиг. 2



Фиг. 3

взаимодействия двух изолированных атомов F от расстояния между ними r представлена на фиг. 2. Отрицательные значения F соответствуют отталкиванию, положительные – притяжению. Процесс роста трещины схематично можно представить как изменение характера взаимодействия двух рядов атомов, образующих ее кромки (фиг. 3): зона I представляет собой зону недеформированных и слабodeформированных связей, соответствующую участку A на фиг. 2; II – зону сильно деформированных связей, соответствующую участку B на фиг. 2; а в зоне III, в которую попадает вся оставшаяся область трещины, связи разорваны (экранированы). Зона II обратима – при снижении нагрузки она уменьшается (при этом расширяется область I), и если зона III отсутствует, то трещина в конце концов исчезает (залечивается). Экранирование связей обусловлено взаимодействием атомов разъединяемых слоев с остальными атомами решетки, а также с электронным газом, и, в значительно большей степени, взаимодействием с атомами окружающей среды, проявляющимся в адсорбции и химических реакциях.

Соотнесем микромодель разрушения с макромоделями трещины. Материал в зоне I естественно моделировать непрерывной сплошной средой (трещины нет), а в зоне III – сплошной средой с разрезом, кромки которого моделируют слои атомов с экранированными связями. В предположении отсутствия зоны II получается трещина Гриффитса, кончик которой расположен на границе зон I и III. Попытка построения модели, учитывающей зону II, предпринята в данной работе. Предполагается, что кончик трещины находится на границе зон I и II, там, где усилие взаимодействия раздвигаемых атомов достигает максимума (см. фиг. 2). В пределах зоны II кромки трещины еще взаимодействуют между собой, так как связи, ранее удерживающие материал в одно целое, ослабевают не сразу, а по мере роста расстояния между кромками. Действие этих связей моделируется распределением сил сцепления, притягивающих кромки трещины друг к другу [7–11]. Предполагается, что максимальное значение этих сил G_M (континуальный аналог максимальной величины силы F (см. фиг. 2)) является материальной константой – прочностью бездефектного материала [19], достижимой в экспериментах с нитевидными кристаллами. Силы сцепления распределены в концевой области [12] (моделирующей зону II на фиг. 3) на отрезке $x_1 \in [-\delta, 0]$ (фиг. 1), прилегающем к кончику трещины, в пределах которого они убывают от величины G_M (в кончике трещины) до нуля (при $x_1 = -\delta$). Связь между изменением параметра нагрузки q и величинами δ и a устанавливается постулатом об уничтожении особенностей [7–11]: напряжения и деформации в кончике трещины конечны. Длина концевой области может изменяться от нуля до некоторого предельного значения δ_b . В начальном состоянии, когда параметр нагрузки $q = 0$, силы сцепления не действуют и $\delta = 0$ (кончик трещины находится в точке B). С ростом q концевая область удлиняется (точка O – кончик трещины движется в направлении положительных x_1 при неподвижной точке B), а как только величина δ достигнет значения δ_b , точки O и B начинают перемещаться совместно при сохраняющемся

расстоянии между ними $\delta = \delta_b$. Распределение сил сцепления при этом неизменно [8–10]. Концевая область отличается от остальной области трещины не только тем, что в ней распределены силы сцепления. Концевая область обратима – обратима в том смысле, что при увеличении параметра нагрузки она образуется и растет (до определенного предела), а при уменьшении – укорачивается и исчезает [7]. Кромки трещины в концевой области еще не являются истинными барьерами, разделяющими материал, что и находит свое выражение в существовании сил сцепления. В противоположность этому кромки трещины вне концевой области – сформировавшиеся границы поверхностей. Они не исчезают при нулевой нагрузке, более того, даже если их прижать друг к другу, сплошность материала не обязательно восстанавливается: для залечивания трещины необходима значительная пластическая деформация [20]. Поэтому при уменьшении параметра нагрузки происходит следующее. Точка B неподвижна, а точка O движется по направлению к точке B (концевая область укорачивается). Если деформации упруги, то точка O совпадет с точкой B (концевая область исчезнет) в момент, когда параметр нагрузки станет равным нулю. Трещина при этом полностью закрывается, но не залечивается: при возрастании параметра нагрузки начинает расти концевая зона так, как это описано выше. Если же в теле есть пластические деформации и соответствующие им остаточные напряжения, то принципиально реализуемы две возможности:

(1) к моменту, когда параметр нагрузки станет равным нулю, точка O не доходит до точки B : при этом действие сил сцепления будет уравниваться действием остаточных напряжений;

(2) точка O достигнет точки B при ненулевом значении параметра нагрузки. Дальнейшее уменьшение параметра нагрузки в этом случае будет приводить к закрытию (но не залечиванию) трещины. Ее кончик (точка O) все это время будет перемещаться влево от точки B ; силы сцепления при этом будут равны нулю, а конечность напряжений в кончике трещины будет обусловлена совместным действием внешних сил и остаточных напряжений.

Действие сил сцепления на кромки трещины аналогично действию штампа, вдавливаемого в упругопластическую среду. И поскольку давление такого штампа очень велико (а оно превышает предел текучести материала приблизительно в той же пропорции, в которой прочность бездефектного материала превышает его предел прочности, то есть на порядок), то, в соответствии со схемой Прандтля, произойдет потеря несущей способности кромки и начнется неограниченное пластическое течение. В конце концов на участке сцепления трещина полностью закроется, а его граница – точка B станет особой точкой поля напряжений, и трещина с концевой областью превратится в трещину Гриффитса. Для разрешения этого парадокса следует рассмотреть условия существования трещины в упругопластической среде. Ключевой момент здесь – зарождение трещины. Известно весьма большое число наблюдений (Зинер, Стро, Коттрелл и др. [21]), показывающих, что трещины образуются в местах скопления нераспространяющихся дислокаций. Так как пластическое деформирование – это движение дислокаций, то появление в некоторой области упомянутого скопления следует интерпретировать как прекращение в ней пластического деформирования. А это значит, что материал в указанной области будет при дальнейшем росте нагрузки деформироваться только упруго и напряжения могут достичь величины прочности бездефектного материала и инициировать образование трещины. Следовательно, материал достаточно малой окрестности зародившейся трещины может деформироваться только упруго, так как его пластичность за счет скопления нераспространяющихся дислокаций уже исчерпана. При устойчивом росте трещины картина деформирования окрестности кончика трещины будет такова: упругое деформирование зоны, где дислокации остановлены, сопровождаемое, за счет роста напряжений, увеличением как области пластического деформирования, так и зоны скопления неподвижных дислокаций. По мере роста трещины картина стабилизи-

руется. Таким образом, ближайшая окрестность кончика трещины может деформироваться пластически лишь до определенного предела и процесс пластического закрытия трещины оказывается невозможным.

Процесс скопления дислокаций представляется в терминах механики деформируемого твердого тела как прекращение пластического деформирования в итоге накопления значительных пластических деформаций. В качестве меры последних используется параметр Одквиста

$$\varepsilon_l = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_l \sqrt{d\mathbf{E}^p \cdot d\mathbf{E}^p} \quad (1.1)$$

где \mathbf{E}^p – тензор пластических деформаций, l – длина траектории, описываемой в девятимерном евклидовом пространстве точкой, декартовы координаты которой совпадают с компонентами тензора пластических деформаций. При малых и даже достаточно больших значениях ε_l влияние этой величины на процесс пластического деформирования отсутствует (дислокации распространяются беспрепятственно), и только когда ε_l приближается к некоторому предельному значению ε_f , пластическое деформирование становится затрудненным и вскоре прекращается совсем. Принимается допущение, что при $\varepsilon_l < \varepsilon_f$ пластическое деформирование протекает в соответствии с законом текучести, но как только ε_l станет равной величине ε_f , пластическое деформирование прекращается; ε_f – это материальная константа, характеризующая пластическое деформирование. Ее величина зависит от структурной неоднородности материала. Чем более химически чист и механически однороден материал, тем ε_f больше, и в предельном случае ε_f стремится к бесконечности. Свойства константы ε_f аналогичны свойствам предельной деформации (истинной) ε_b при разрыве образца, что дает основание в первом приближении их отождествить. При этом явление разрыва образца можно представить себе следующим образом: образец пластически деформируется до тех пор, пока параметр Одквиста не достигнет величины ε_f ; вслед за этим происходит охрупчивание и при дальнейшем, даже малом, росте деформаций создаются условия для образования и роста трещин – образец разрывается.

2. Постановка и решение краевой задачи. При квазихрупком разрушении размеры пластической зоны, окружающей кончик трещины, малы по сравнению как с размерами поперечного сечения (см. фиг. 1), так и с длиной трещины. Поэтому можно упростить постановку задачи – воспользоваться расчетной схемой плоскости с полубесконечной трещиной. При этом напряжения от действия внешних сил находятся из решения краевой задачи линейной механики разрушения для области D (см. фиг. 1). Они представимы в виде суммы регулярного и сингулярного (в кончике трещины) слагаемых. Будем считать, что порядок регулярного слагаемого значительно меньше порядка предела текучести материала. При этом можно считать, что выражения напряжений от действия внешних сил здесь, сводятся только с сингулярным составляющим.

Принятая расчетная схема не позволяет моделировать зарождение и начальный период роста трещины, что, вообще говоря, возможно в рамках построенной выше механической модели. Эта схема моделирует асимптотическое поведение трещины при достаточно большой ее длине с тем отличием, что реальную трещину сопровождает поле заторможенных дислокаций, образовавшееся еще до ее зарождения. Следствием существования этого поля является невозможность пластического деформирования близкой окрестности кончика трещины и независимость вновь образующихся пластических деформаций, в силу их удаленности от кончика трещины, от деталей распределения сил сцепления. Поэтому в модели, описывающей и зарождение, и начальный рост трещины при вычислении приращений пластических деформаций для расчета напряжений от действия сил сцепления достаточно асимптотических формул, справедливых на большом удалении от кончика трещины. Новые пластические

деформации образуются, главным образом, не за счет напряжений от сил сцепления, а из-за того, что при продвижении трещины – разрыва в сплошной среде – изменяются граничные условия и поле остаточных напряжений становится неуравновешенным. В рассматриваемой расчетной схеме упомянутое поле заторможенных дислокаций создается самой трещиной, поэтому задание конкретного закона распределения сил сцепления необходимо, и наиболее приемлем, в силу сказанного, простейший закон распределения (так как концевая область движется, эпюра сил сцепления должна быть гладкой и иметь максимум):

$$G(x_1) = \begin{cases} G_M(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3), & \eta \in [0, 1] \\ 0, & \eta \in [1, \infty] \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\eta = -x_1/\delta$. Распределение (2.1) зависит только от одного параметра – длины концевой области δ .

Решение краевой упругопластической задачи строится при максимально возможных упрощающих предположениях: материал считается несжимаемым, деформации – малыми; используются соотношения Прандтля – Рейсса и условие текучести Мизеса с линейным изотропным упрочнением. Причин упрощений две: первая из них – это стремление минимизировать трудности численных расчетов, а вторая – выявить основные факторы изучаемых процессов. Так, численный анализ показывает, что и устойчивый рост трещины при монотонно возрастающей нагрузке, и ее усталостный рост обусловлены пластичностью материала; другие факторы, как-то: конечность деформаций в окрестности кончика трещины, трансляционное упрочнение, отклонение принятого закона текучести от экспериментально наблюдаемого, погрешность, вносимая схемой плоской деформации, и т.д. являются второстепенными, что, конечно, не означает, что их учет несуществен для количественных оценок.

Упругопластическую задачу можно, следуя Ильюшину [6], рассматривать как задачу линейной упругости с распределенными объемными силами f , обусловленными пластическими деформациями. Постулат уничтожения особенностей эквивалентен требованию равенства нулю суммарного коэффициента интенсивности напряжений

$$K_I = K_{Ie} + K_{IG} + K_{If} = 0 \quad (2.2)$$

где K_{Ie} , K_{IG} , K_{If} – коэффициенты интенсивности напряжений соответственно от действия поверхностной нагрузки, сил сцепления и объемных сил, обусловленных пластическим деформированием.

Рассмотрим алгоритм решения упругопластической задачи, основой которого служит метод упругих решений Ильюшина [6]. Пусть в плоскости имеется известное из предыдущей итерации поле начальных напряжений $s_{mn}(x_k)$. Тензор напряжений представляется разностью

$$\sigma_{mn} = t_{mn} - s_{mn} \quad (2.3)$$

Здесь тензор t_{mn} связан с деформациями законом Гука (для несжимаемого материала)

$$t_{mn} = t\delta_{mn} + \frac{2}{3}E\varepsilon_{mn}, \quad t = t_{mm}/3 = \sigma_{mm}/3 \quad (2.4)$$

где δ_{mn} – символ Кронекера, E – модуль Юнга. Начальные напряжения определяются формулой

$$s_{mn} = \frac{2}{3}E(\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^e) = \frac{2}{3}E\varepsilon_{mn}^p \quad (2.5)$$

Индекс e обозначает упругую составляющую тензора деформаций, а p – пластическую. С учетом гипотез несжимаемости и плоской деформации получим $s_{11} + s_{22} = 0$. Поля напряжений s_{11} и s_{22} симметричны относительно оси абсцисс, а поле s_{12} – антисимметрично. Подстановка выражений (2.3) в уравнения равновесия дает

$$\partial_m t_{mn} + f_n = 0, \quad f_n = -\partial_m s_{mn} \quad (2.6)$$

При известных функциях f_n получается (для определения t_{mn}) задача линейной теории упругости с заданными объемными силами. Рассмотрим граничные условия. К кромкам трещины приложены силы сцепления интенсивностью $G(x_1)$. Действие внешних сил сводится к уничтожению особенности напряженного состояния в кончике трещины. Найденное решение должно обращаться в нуль в бесконечно удаленной точке.

Решение поставленной задачи распадается на два этапа. Вначале рассматривается задача нахождения напряжений в упругой плоскости от действия распределенных объемных сил f_n . При этом предполагается, что трещина отсутствует. Получим с использованием решения задачи Кельвина [22]:

$$t_{11}^{(1)} = t_{22}^{(1)} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}[H_1(z) + \bar{H}_1(z)]$$

$$t_{22}^{(1)} - t_{11}^{(1)} + 2it_{12}^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} [H_2(z) + \bar{H}_2(z) + H_3(z, \bar{z}) + \bar{H}_3(z, \bar{z})] \quad (2.7)$$

$$H_1(z) = \int_{\Omega} \frac{f}{\xi - z} d\Omega; \quad H_2(z) = \int_{\Omega} \frac{\bar{f}}{\xi - z} d\Omega, \quad H_3(z, \bar{z}) = \int_{\Omega} \frac{(\xi - \bar{z})f}{(\xi - z)^2} d\Omega$$

$$\bar{H}_k(z) = \overline{H_k(\bar{z})} \quad (k = 1, 2), \quad \bar{H}_3(z, \bar{z}) = \overline{H_3(\bar{z}, z)} \quad (2.8)$$

Здесь область Ω – часть верхней полуплоскости, в которой распределены начальные напряжения; ξ – комплексная координата точки приложения силы $f = f_1 + if_2$; z – комплексная координата точки, в которой вычисляются напряжения. Напряжения $t_{22}^{(1)}$ и s_{22} на линии трещины в общем случае не равны нулю. Так как напряжения σ_{22} на кромках трещины равны нулю (за исключением концевой области, где они равны $G(x_1)$), к кромкам трещины следует приложить нагрузку таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям. Эта нагрузка равна

$$p(x_1) = t_{22}^{(1)}(x_1) - s_{22}(x_1) - G(x_1) \quad (2.9)$$

Действие этой нагрузки вместе с внешними силами приводит к появлению поля напряжений $t_{mn}^{(2)}$. Последние вычисляются по формулам [23]:

$$t_{11}^{(2)} + t_{22}^{(2)} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(x)}], \quad t_{22}^{(2)} + it_{12}^{(2)} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - (z - \bar{z})\varphi''(z)$$

$$\varphi'(z) = \frac{K_I z^{-1/2}}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{z^{1/2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p(\zeta)d\zeta}{\zeta^2 + z} = -\frac{z^{1/2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p(\zeta)d\zeta}{\zeta^2 + z}$$

$$K_{Ie} = -(K_{IG} + K_{If}) = -2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} p(\zeta)d\zeta, \quad \zeta = \sqrt{-x_1} \quad (2.10)$$

Таким образом в точке плоскости с координатой z вычисляются напряжения $t_{mn}^{(2)}$; суммируя их с напряжениями $t_{mn}^{(1)}$ и вычитая начальные напряжения s_{mn} , получаем напряжения σ_{mn} (см. формулу (2.3)). Далее находятся приращения пластических деформаций в соответствии с законом Мизеса и приращения начальных напряжений (2.5):

$$\Delta \varepsilon_{mn}^p = \Delta \lambda (\sigma_{mn} - \delta_{mn} \sigma), \quad \Delta s_{mn} = \frac{2}{3} E \Delta \varepsilon_{mn}^p = \frac{2}{3} E (\sigma_{mn} - \delta_{mn} \sigma) \Delta \lambda \quad (2.11)$$

Они пропорциональны неизвестному пока параметру $\Delta \lambda \geq 0$; последний находится из условия выполнения условия текучести Мизеса

$$\sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_{mn} - \delta_{mn} \sigma - \Delta s_{mn}) (\sigma_{mn} - \delta_{mn} \sigma - \Delta s_{mn})} = \sigma_Y + \mu E (\varepsilon_I + \Delta \varepsilon_I)$$

или

$$\Delta\lambda = \frac{3}{2E(1+\mu)} \left(1 - \frac{\sigma_Y + \mu E \varepsilon_l}{\sigma_i} \right) \quad (2.12)$$

где μ – коэффициент линейного упрочнения, σ_Y – предел текучести, σ_i – интенсивность напряжений. Если получается, что $\Delta\lambda < 0$, значит, пластическое деформирование в данной точке не происходит и следует положить $\Delta\lambda = 0$. Приращение параметра Одкависта определяется формулой $\Delta\varepsilon_l = \frac{2}{3}\sigma_i\Delta\lambda$. Если при этом оказывается, что $\varepsilon_l + \Delta\varepsilon_l > \varepsilon_f$, то величина $\Delta\lambda$ находится из условия $\varepsilon_l + \Delta\varepsilon_l = \varepsilon_f$ или

$$\Delta\lambda = \frac{3}{2}(\varepsilon_f - \varepsilon_l) / \sigma_i \quad (2.13)$$

Далее полагается $s_{mn} = s_{mn} + \Delta s_{mn}$, выполняется следующая итерация и т.д. до сходимости процесса.

При продвижении кончика трещины на величину Δa начало координат также перемещается и выполняется соотношение $s_{mn}(x_1) = s_{mn}(x_1 + \Delta a)$. Величина Δa может быть как положительной, так и отрицательной; последний случай соответствует уменьшению значений δ и $|K_{IG}|$. Возможно, что эти величины станут равными нулю, но K_{Ie} и вычисляемый по нему параметр нагрузки будут еще ненулевыми за счет ненулевого значения K_{If} . Дальнейшее уменьшение длины трещины происходит при отсутствии сил сцепления и сопровождается уменьшением $|K_{If}|$ и, следовательно, K_{Ie} .

Концевая зона перестает увеличиваться, когда ее длина δ достигает предельной величины δ_b , которой соответствует коэффициент интенсивности напряжений от сил сцепления

$$K_{IG} = -2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^\infty G(\zeta) d\zeta = -K_{Ib} \quad (2.14)$$

где $K_{Ib} > 0$ – материальная константа, – это постулат теории (см. выше).

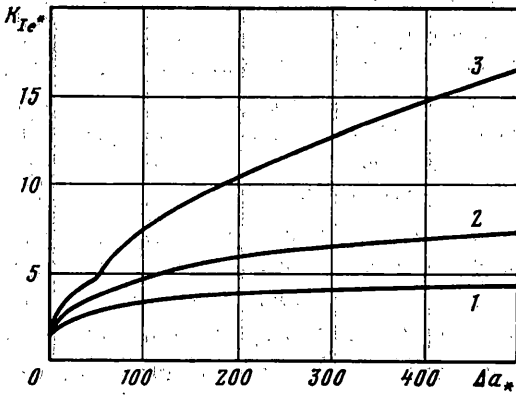
3. Результаты расчетов. Основным результатом решения задачи является зависимость, связывающая K_{Ie} с приращением длины трещины Δa и с другими параметрами задачи. С учетом анализа размерностей можно записать

$$K_{Ie^*} = F(\Delta a_*, E/G_M, G_{M^*}, \mu, \varepsilon_f) \\ \Delta a_* = \Delta a / \delta_b, \quad G_{M^*} = G_M / \sigma_Y, \quad K_{Ie^*} = K_{Ie} / K_{Ib} \quad (3.1)$$

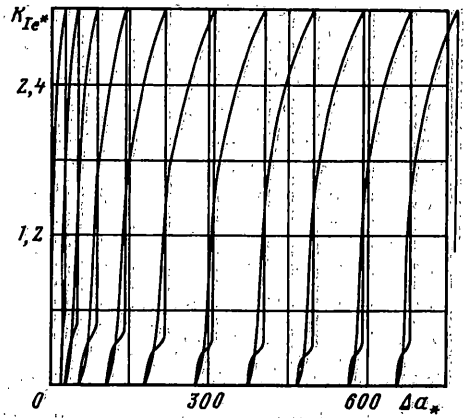
При проведении численных расчетов принимались значения $E/G_M = 10$; $\mu = 0,01$, $G_{M^*} = 20$. Последняя величина при $E = 2 \cdot 10^5$ Н/мм² соответствует $\sigma_Y = 1000$ Н/мм² – характерному для распространенных в машиностроении марок сталей пределу текучести. На фиг. 4 показаны рассчитанные для монотонного нагружения зависимости K_{Ie^*} от Δa_* при различных значениях предельной пластической деформации ε_f . Зависимость 1 получена при $\varepsilon_f = 0,05$; 2 – при $\varepsilon_f = 0,10$; 3 – при неограниченной величине параметра Одкависта (скачок K_{Ie^*} на линии 3 обусловлен появлением вторичных пластических деформаций). Более жесткие ограничения на величину пластического деформирования делают кривую более пологой. По-видимому, при $\varepsilon_f \rightarrow \infty$ величина K_{Ie^*} с ростом Δa_* неограниченно возрастает, но когда максимальная деформация ε_f конечна, существует предел

$$\lim_{\Delta a \rightarrow \infty} K_{Ie^*} = K_{IC^*} \quad (3.2)$$

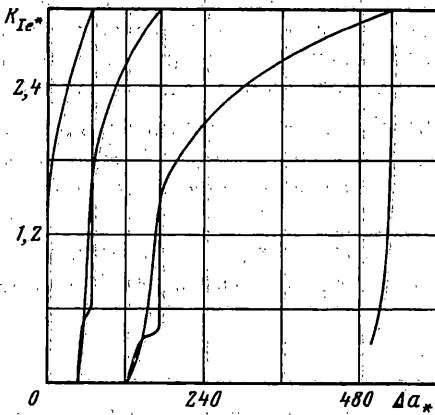
по которому находится $K_{IC} = K_{IC^*} K_{Ib}$ – вязкость разрушения материала.



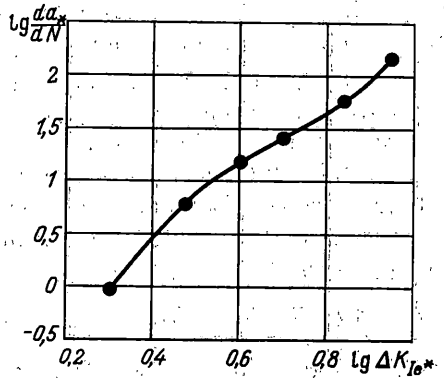
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Дадим количественную оценку результатам вычислений. Если предположить, что, по аналогии с хрупкими материалами, величина K_{Ib} связана с удельной поверхностной энергией γ формулой, полученной методами линейной механики разрушения [3], и в общем случае, когда возможно пластическое деформирование

$$K_{Ib} = \sqrt{2E\gamma/(1-\nu^2)} \quad (3.3)$$

где ν — коэффициент Пуассона, то при значении для железа $\gamma = 2 \cdot 10^{-3}$ Н/мм [24] получим $K_{Ib} = 30$ Н/мм^{3/2}. Диапазон вязкости разрушения для стали [3] $K_{IC} = 900 - 4500$ Н/мм^{3/2}, экспериментальные значения K_{Ic}^* лежат в пределах 30–150. Ясно, что кривые 1, 2 на фиг. 4, соответствующие малопластичным материалам, согласуются с этими результатами. Сложнее оценить согласование кривой 3, полученной при отсутствии ограничений на величину параметра Оджвиста. При максимальном в расчете значении Δa_* , равном 500, величина K_{Ic}^* далека до предельного значения, характеризуемого соотношением $\frac{\partial K_{Ic}^*}{\partial a_*} = 0$. Для упомянутой кривой при $\Delta a_* = 500$ максимальное значение параметра Оджвиста равно 0,33; эта величина значительно меньше предельных значений для пластичных материалов ($\epsilon_f = 0,5-0,7$), причем, для приемлемой точности вычислений следует учитывать

конечность деформаций. Таким образом, расчет при $\epsilon_f \rightarrow \infty$ нельзя считать завершённым. Для полноценного суждения о согласовании с экспериментальными данными следует провести расчет для конечных упругопластических деформаций с $\epsilon_f \geq 0,6$. Вычислительные возможности при выполнении данного исследования не позволили это сделать. Можно, однако, ожидать, что соответствующая кривая будет вести себя так же, как кривые 1 и 2 на фиг. 5, отличаясь от них лишь количественно, и даст предельное значение K_{IC}^* , согласующееся с экспериментом.

Рассмотрим циклическое изменение внешней нагрузки, проявляющееся в циклическом изменении коэффициента K_{Ie} . Описываемые ниже численные эксперименты проводились для пульсационного цикла: $\Delta K_{Ie} = K_{Ie \max}$. На фиг. 5 изображена зависимость $K_{Ie}^*(\Delta a_*)$ при $\epsilon_f = 0,1$; $\Delta K_{Ie}^* = 3$. В данном случае разгрузка, понимаемая как уменьшение K_{Ie}^* , не является упругой за счет того, что кончик трещины движется в обратном направлении. Это приводит к увеличению длины трещины в каждом следующем цикле нагружения. При уменьшении нагрузки вначале укорачивается и исчезает концевая область, затем начинается закрытие (но не заживление) невзаимодействующих участков кромок трещины – эффект, наблюдаемый в эксперименте [3]. Зависимости, аналогичные приведенной на фиг. 5, получаются и при других значениях ΔK_{Ie}^* и ϵ_f . Так, на фиг. 6 представлен график, полученный при другом значении предельной пластической деформации $\epsilon_f = 0,05$. У более хрупкого материала скорость роста трещины выше; в предельном случае, когда пластическое деформирование невозможно, трещина либо покоится, либо растет квазистатически или динамически (для хрупкого материала K_{Ib} совпадает с K_{IC}).

С увеличением числа циклов N приращение длины трещины за один цикл стабилизируется (см. фиг. 5), и когда число циклов велико, отношение $\Delta a_*/\Delta N$ перестает зависеть от N и можно записать

$$da_*/dN = \Phi(\Delta K_{Ie}^*, E/G_M, G_{M^*}, \mu, \epsilon_f, R) \quad (3.4)$$

Здесь, в дополнение к переменным, фигурирующим в формуле (3.1), появляется новая – коэффициент асимметрии цикла $R = K_{Ie \min}/K_{Ie \max}$ (для пульсационного цикла $R = 0$). На фиг. 7 представлен график зависимости (3.4) при постоянных значениях всех аргументов, кроме ΔK_{Ie}^* . Ее линейный участок описывается формулой Париса [3]:

$$da_*/dN = C \Delta K_{Ie}^{*n} \quad (3.5)$$

Вычисленная величина показателя степени $n = 2,8$ лежит в диапазоне экспериментально получаемых значений $n = 2 \dots 4$.

Расчеты показывают, что если при циклически изменяющейся нагрузке длина концевой области не достигает величины δ_b , усталостный рост трещины невозможен. Следовательно, существует, в согласии с экспериментом [3], пороговое значение $K_{th} = K_{Ie} |_{\Delta a_* = 1}$, которое тем больше K_{Ib} , чем пластичнее материал. Порядок этих величин совпадает.

4. Заключение. Решенная задача представляет собой задачу о докритическом росте трещины в упругопластической среде. Начало роста трещины в теории Ирвина – Орована связывается с достижением скорости изменения потенциальной энергии удвоенной величины эффективной поверхностной энергии или, что то же, с достижением коэффициентом интенсивности напряжений (в принятых обозначениях K_{Ie}) величины вязкости разрушения K_{IC} . В полученном решении старт трещины по Ирвину – Оровану соответствует предельному случаю при $\Delta a \rightarrow \infty$. Но эти точки зрения совместимы. Достижение K_{IC} в теории Ирвина – Орована означает, как

правило, начало неустойчивого роста трещины. Если с использованием рассмотренной выше модели трещины решить задачу для области конечных размеров, то зависимость $K_{Ic}(\Delta a)$ обязательно будет иметь максимум, соответствующий началу неустойчивого роста трещины, и этот максимум при реализации условий квазихрупкого разрушения будет мало отличаться от K_{Ic} . Что касается теории усталостного роста трещины, то она оказывается составной частью (по-видимому, наиболее важной с точки зрения приложений) изложенной теории роста трещины в упругопластической среде.

Остановимся еще на определении материальных констант, фигурирующих в рассматриваемой теории. Кроме тех, которые находятся из диаграммы одноосного растяжения, необходимо знать еще две: G_M и K_{Ib} . Непосредственное измерение в данном случае вряд ли возможно, и поэтому для их определения следует использовать данные экспериментов по определению вязкости разрушения K_{Ic} и порогового коэффициента интенсивности напряжений K_{Ih} .

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-01-00121). Автор благодарен Л.А. Толоконникову (1923–1998) за внимание к работе и полезные обсуждения результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Irwin G.R. Fracture dynamics // *Fracturing of metals*. Cleveland: ASM, 1948. P. 147–166.
2. Orowan E. Fundamentals of brittle behavior of metals // *Fatigue and Fracture of Metals*. N.Y.: Wiley, 1950. P. 139–167.
3. Хеллан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.
4. Лавит И.М. Математическая модель квазистатического роста трещины в упругопластической среде. 1. Исходные допущения и постановка краевых задач // *Изв. Тульск. университета. Математика, механика, информатика*. 1997. Т. 3. Вып. 1. С. 118–123.
5. Лавит И.М. Математическая модель квазистатического роста трещины в упругопластической среде. 2. Вычислительный алгоритм и результаты расчетов // *Изв. Тульск. университета. Математика, механика, информатика*. 1997. Т. 3. Вып. 1. С. 124–129.
6. Ильющин А.А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
7. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Розвиток найдрібніших тріщин в твердому тілі // *Прикл. механіка*. 1959. Т. 5. Вип. 4. С. 391–401.
8. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины // *ПММ*. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 434–444.
9. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках // *ПММ*. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 706–721.
10. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Устойчивость изолированных трещин. Связь с энергетическими теориями // *ПММ*. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 893–900.
11. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // *J. Mech. and Phys. Solids*. 1960. V. 8. No. 2. P. 100–104.
12. Баренблатт Г.И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // *ПМТФ*. 1961. № 4. С. 3–56.
13. Гудьер Дж. Математическая теория равновесных трещин // *Разрушение*. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 11–82.
14. Лавит И.М. Об устойчивом росте трещины в упругопластическом материале // *Проблемы прочности*. 1988. № 7. С. 18–23.
15. Лавит И.М., Толоконников Л.А. Термоупругопластическая задача механики разрушения для полого цилиндра с внутренними трещинами // *Прикл. проблемы прочности и пластичности. Методы решения*. Горький: Изд-во Горьков. ун-та. 1990. С. 56–61.
16. Cornes A., Yuan H., Lin G. Cohesive zone model for ductile fracture // *GKSS Rept*. 1994. No. E73. P. 269–274.

17. *Tvergaard V., Hutchinson J.W.* The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic–plastic solids // *J. Mech. and Phys. Solids*. 1992. V. 40. No. 6. P. 1377–1397.
18. *Лавит И.М., Толоконников Л.А.* Исследование роста трещины в упругопластическом материале // Тр. 9-й Конф. по прочности и пластичности. М.: ИПМ РАН, 1996. Т. 1. С. 114–119.
19. *Баренблатт Г.И.* О некоторых вопросах механики хрупкого разрушения // *Инж. ж. МТТ*. 1968. № 6. С. 153–163.
20. *Стройман И.М.* Холодная сварка металлов. Л.: Машиностроение, 1985. 224 с.
21. *Хан Дж.Т., Авербах Б.Л., Оуэн В.С., Коэн М.* Возникновение микротрещин скола в поликристаллическом железе и стали // *Атомный механизм разрушения*. М.: Металлургиздат, 1963. С. 109–134.
22. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
23. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения // *Разрушение*. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 204–335.
24. *Нотт Дж.* Механика разрушения // *Атомистика разрушения*. М.: Мир, 1987. С. 145–176.

Тула

Поступила в редакцию
18.09.1998