

УДК 539.375

© 2001 г. Э.С. СИБГАТУЛЛИН

РАЗВИТИЕ КОНЦЕПЦИИ СИ В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

В [1], где, в частности, приведены различные критерии квазихрупкого разрушения для тела с макротрещиной, отмечено, что наиболее широко распространены предложенный $G \cdot C \cdot Si$ и S -критерий. Однако результаты расчетов на основе критерия Си [2] часто не совпадают с соответствующими результатами экспериментальных исследований (см., например, [3]). В настоящей работе в условии достижения предельного состояния тела с макротрещиной, на котором базируется критерий Си, осуществлен рациональный переход с пространства напряжений в пространство коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Полученный критерий разрушения позволяет определить, в частности, границу зоны процесса разрушения [4], окружающей вершину трещины, с упругой областью тела. Из общего критерия следуют критерии разрушения для всех частных случаев, когда отличен от нуля только один из КИН. Предложен способ аппроксимации полученной предельной поверхности в пространстве КИН. Теоретические результаты сопоставления с соответствующими экспериментальными данными других авторов. В качестве примера решена задача о несущей способности прямоугольной пластины с центральной наклонной трещиной, находящейся под действием равномерно распределенных одноосных растягивающих сил.

1. По мере роста параметра внешнего нагружения растет и зона процесса разрушения в окрестности вершины трещины. Предельное состояние тела с макротрещиной имеет место тогда, когда эта зона достигает своих предельных размеров. Согласно принятой здесь расчетной модели на границе зоны процесса разрушения с упругой областью тела при любом ненулевом значении параметра внешнего нагружения выполняется следующее равенство:

$$u = u_* \quad (1.1)$$

$$u = [\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + 2(1+\nu)(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)]/(2E) \quad (1.2)$$

где u – удельная потенциальная энергия упругой деформации, u_* – предельное значение этой энергии. Для изотропных материалов u_* является характеристикой, не зависящей от вида напряженно-деформированного состояния; она может быть определена из простых экспериментов. Например, при линейном напряженном состоянии тела без трещин

$$u_* = \sigma_*^2/(2E) \quad (1.3)$$

В этих формулах σ_{ij} ($i, j = x, y, z$) – компоненты тензора напряжений, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, σ_* – предельное значение нормальных напряжений при одноосном растяжении.

Если при нагружении тела не происходит смыкания берегов трещины и они сво-

бодны от напряжений, то в малой упругой области вблизи вершины трещины напряжения σ_{ij} определяются известными формулами (см., например, [5]):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] / \sqrt{2\pi r} \\ \dots, \sigma_{z\infty} &= -K_{III} \sin \frac{\theta}{2} / \sqrt{2\pi r} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь K_I, K_{II}, K_{III} – коэффициенты интенсивности напряжений; θ, r – полярные координаты точки, где определяются напряжения; системы координат $Oxuz$ и $Or_0\theta$ связаны с вершиной O трещины [5]. В полярной системе $Or_0\theta$ напряжения определяются аналогичными (1.4) формулами. Например,

$$\sigma_\theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos \frac{\theta}{2} - 3K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \right) / \sqrt{2\pi r} \quad (1.5)$$

Используя (1.4) и (1.2), условие (1.1) для предельного состояния тела с макротрещиной можно записать в следующем виде:

$$(a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_IK_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2) / (2\pi E r_*) = u_* \quad (1.6)$$

$$a_{11} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 - \nu - 2\nu^2 + (1 + \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (1.7)$$

$$a_{12} = \frac{1}{2} \sin \theta [2\nu^2 + \nu - 1 + (1 + \nu) \cos \theta]$$

$$a_{22} = 1 + \nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[1 - \nu - 2\nu^2 - 3(1 + \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$a_{33} = 1 + \nu$$

Если имеет место обобщенное плоское напряженное состояние ($\sigma_{zz} = 0$), то в формулах (1.7) слагаемые, содержащие в качестве множителя ν^2 , следует принять равными нулю. В (1.6) $r_* = r_*(\theta)$ – граница зоны процесса разрушения в предельном состоянии тела, когда трещина получает возможность роста.

Случай, когда только один из КИН отличен от нуля, условно назовем простым деформированием трещины, а разрушение в этом случае – простым разрушением; в противном случае деформирование трещины и разрушение назовем сложными. Из (1.6), записанного для различных случаев простого разрушения, следуют равенства

$$\frac{a_{11}K_{IC}^2}{r_{I*}} = \frac{a_{22}K_{IIc}^2}{r_{II*}} = \frac{a_{33}K_{IIIc}^2}{r_{III*}} = 2\pi E u_* \quad (1.8)$$

Здесь K_{iC} ($i = I, II, III$) – характеристики трещиностойкости материала, $r_{i*} = r_{i*}(\theta)$ – границы зон процесса разрушения при простых разрушениях; значения r_{i*} могут быть определены с использованием соотношений (1.3) и (1.8).

Разделим обе части равенства (1.6) на u_* ; при этом учтем равенства (1.8). Тогда получим

$$\frac{K_I^2}{K_{IC}^2} r_{I*} + \frac{2a_{12}K_IK_{II}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}K_{IC}K_{IIc}} \sqrt{r_{I*}r_{II*}} + \frac{K_{II}^2}{K_{IIc}^2} r_{II*} + \frac{K_{III}^2}{K_{IIIc}^2} r_{III*} = r_* \quad (1.9)$$

Равенство (1.9) является критерием разрушения, основанным на условии (1.1). Чтобы различать критерий (1.9) от других аналогичных критериев (таких, как S -критерий S_i , S_d -критерий [1]), обозначим его S_e -критерием. Этот критерий относится к так называемым "простым" [1], т.е. учитывает только сингулярные составляющие напряже-

ний. Сложный критерий разрушения, учитывающий и регулярные составляющие напряжений, можно получить, разделив обе части (1.9) на r_* и добавив в левую часть полученного соотношения слагаемое σ_a^2/σ_*^2 ; где σ_a – номинальное эквивалентное напряжение.

Определим в (1.6) u_* по формуле

$$u_* = (1 - \nu - 2\nu^2)K_{IC}^2 / (2\pi E r_{I*})$$

коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{33}$ определим согласно (1.7), используя равенства

$$r_{I*} = r_{II*} = r_{III*} = r_* \quad (1.10)$$

Угол θ_* , соответствующий направлению роста трещины, определим из условия достижения минимума выражения, записанного в числителе левой части равенства (1.6) и примем $K_{III} = 0$. В результате получится критерий разрушения S_i , приведенный в [1,3] как критерий S_i для плоского напряженного состояния.

2. Пусть внешняя нагрузка растет пропорционально одному параметру p :

$$K_I = b_I p, \quad K_{II} = b_{II} p, \quad K_{III} = b_{III} p \quad (2.1)$$

Здесь b_I, b_{II}, b_{III} – коэффициенты, зависящие от геометрий тела и трещины, от конфигурации внешней нагрузки. Подставив (2.1) в (1.9), получим уравнение для определения предельного значения p_* параметра внешней нагрузки. В общем случае это уравнение содержит две неизвестные величины: p_* и r_* . Дополнительное уравнение, необходимое для решения рассматриваемой задачи, может быть получено путем использования равенств (1.10) в уравнении (1.9). Уравнение (1.9) описывает некоторую предельную поверхность (поверхность разрушения) в пространстве КИН. Использование равенств (1.10) в уравнении (1.9) соответствует определенной аппроксимации этой предельной поверхности: вдоль осей OK_i ($i = I, II, III$), она будет "растянута" в $\sqrt{r_* / r_{I*}}$ раз, поворот ее главных осей в плоскости $K_I OK_{II}$ относительно оси OK_I также изменится на определенную величину, зависящую от отношения r_{I*} / r_{II*} . Равенства (1.10) противоречат соотношениям (1.8), (1.6), (1.3) линейной механики разрушения. Тем не менее равенства (1.10) в неявном виде присутствуют при выводе известных критериев разрушения (S -критерия S_i , S_d -критерия и др., см., например, [1]). Это не противоречит современным концепциям в механике разрушения. Как отмечено в [4], основные гипотезы современных теорий разрушения связаны с концепцией критического расстояния, которое считается фундаментальной характеристикой, устанавливающей взаимосвязь между процессами, происходящими на микро- и макроуровне по отношению к структуре материала. Это критическое расстояние часто отождествляют с предельным размером зоны процесса разрушения, в которой происходит накопление и рост микроповреждений, приводящих к развитию макротрещин. Предельный размер зоны процесса разрушения считают параметром материала. В работе [6] приведены, в частности, экспериментальные данные, свидетельствующие о том, что критический размер зоны процесса разрушения не зависит от вида напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины. Следует также отметить, что решение рассматриваемой задачи с применением соотношений линейной механики разрушения является приближенным. Как будет показано ниже, аппроксимация критерия (1.9) с использованием равенств (1.10) не приводит к большим расхождениям теоретических результатов с соответствующими экспериментальными данными.

Чем ближе разрушение по своему характеру к простому, тем точнее осуществляется аппроксимация предельной поверхности, описываемой уравнением (1.9), с использованием равенств (1.10). Для улучшения аппроксимации этой поверхности в тех случаях, когда два или все три КИН вносят существенный вклад в процесс раз-

рушения, можно взять аппроксимирующую поверхность, описываемую следующим уравнением:

$$\frac{K_I^{2m}}{K_{IC}^{2m}} + \frac{2a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \cdot \frac{K_I^m K_{II}^m}{K_{IC}^m K_{IIc}^m} + \frac{K_{II}^{2m}}{K_{IIc}^{2m}} + \frac{K_{III}^{2m}}{K_{IIIc}^{2m}} = 1 \quad (0 < m < \infty) \quad (2.2)$$

Здесь значение параметра m выбирается, исходя из условия удовлетворительной аппроксимации экспериментальных данных. Если по характеру решаемой задачи в (2.2) могут присутствовать и некоторые отрицательные значения КИН, то значение m следует округлять до ближайшего целого числа.

Из критерия (1.9) и его аппроксимации (2.2) следуют, как частные случаи, критерии разрушения для всех видов простого деформирования трещины ($K_i = K_{iC}$ ($i = I, II, III$)). Значение предельной нагрузки p_* , определенное с использованием S_c -критерия, не зависит от значения угла θ . В этом отношении он аналогичен критериям разрушения для простых случаев деформирования трещины. А приближенный критерий (2.2) необходимо записать для критического направления с углом $\theta = \theta_*$ (аналогично S -критерию Си), в котором возможен рост трещины. Угол θ_* определим из условия достижения минимума функции $r_*(\theta)$, определяемой соотношением (1.9). Так как u_* является постоянной величиной, то в той точке, где имеет место минимум функции $r_*(\theta)$, выражение, записанное в числителе левой части равенства (1.6), также будет иметь минимальное значение. Следовательно, принятый здесь критерий определения направления роста трещины по существу совпадает с соответствующим критерием в концепции Си. Согласно формулам (1.4), (1.5) напряжения в окрестности вершины трещины имеют особенность типа $1/\sqrt{r}$. Как будет показано ниже, в точке с минимальным значением $r_*(\theta)$, где одновременно выполняется условие $\sigma_\theta > 0$, окружные напряжения σ_θ близки к своему предельному значению.

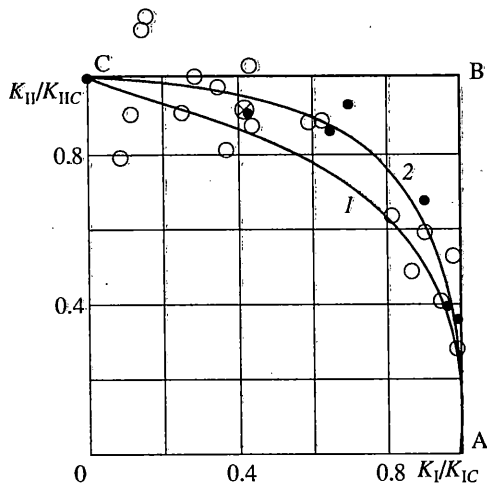
На фиг. 1 приведены кривая 1, построенная с использованием уравнения (2.2) при $m = 1$, и кривая 2 – построенная при $m = 2$. Здесь рассматривается плоское напряженное состояние, $\nu = 0.3$, $K_{IC}/K_{IIc} = 0.67$. На этой же фигуре приведены экспериментальные данные, взятые из [1, с. 110] (темные точки – для алюминиевых сплавов, светлые – для полиуретана). Проведенные нами расчеты показывают, в частности, что изменение отношения K_{IC}/K_{IIc} в пределах от 0.5 до 1.5 не очень существенно влияет на соответствующие теоретические результаты (точка, обозначенная на фиг. 1 крестом, соответствует уравнению (2.2) при $m = 1$, $K_{IC}/K_{IIc} = 1.5$). Как видно, уравнение (2.2) позволяет вполне удовлетворительно аппроксимировать экспериментальные данные. Отметим, также, что замена оси ординат на фиг. 1 с K_{II}/K_{IC} (принятой в [1]) на K_{II}/K_{IIc} позволила так обработать экспериментальные данные, что их разброс по оси ординат уменьшился (когда эти данные сравниваются для разных материалов).

Можно показать, что при $m \rightarrow \infty$ кривые, построенные согласно уравнению (2.2), неограниченно приближаются к ломаной линии ABC (фиг. 1).

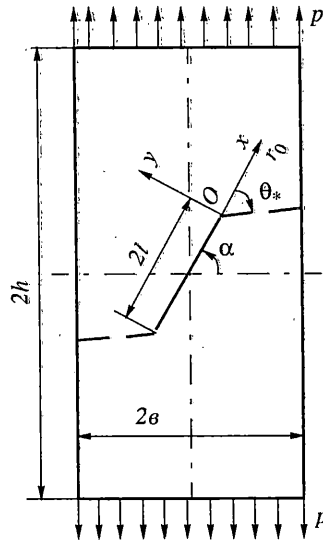
3. В качестве примера рассмотрим задачу о предельном состоянии прямоугольной пластины с центральной наклонной трещиной, находящейся под действием равномерно распределенных одноосных растягивающих сил (фиг. 2). Материал пластины – алюминиевый сплав 2024 – T4 с характеристиками трещиностойкости $K_{IC} = 34.7$ МПа $\sqrt{м}$, $K_{IIc} = 51.8$ МПа $\sqrt{м}$ [7]; $\sigma_* = 490$ МПа, $\nu = 0.3$. Пусть пластина и трещина имеют следующие геометрические характеристики: $\alpha = 60^\circ$ // $b = 0.6$, $h/b = 2$, $l = 6$ см. Для рассматриваемой задачи имеют место следующие формулы (см., например, [8]): $K_I = F_I p \sqrt{\pi l}$, $K_{II} = F_{II} p \sqrt{\pi l}$.

Для рассматриваемого варианта задачи $F_I = 0.3332$, $F_{II} = 0.5022$.

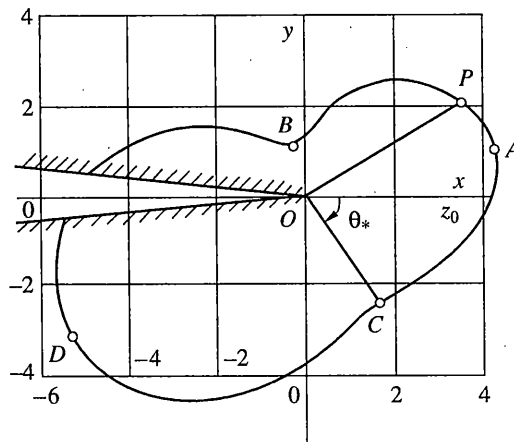
Функция $r_*(\theta)$, определяемая уравнением (1.9), при $n = |K_{II}/K_I| = 1.507$ имеет экстремумы при углах $\theta_1 = 13.05^\circ$, $\theta_2 = 105.45^\circ$, $\theta_3 = -149.65^\circ$, $\theta_4 = -56.76^\circ$. Правая



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

часть формулы (1.5) для σ_θ , умноженная на $\sqrt{2\pi r}$, достигает своего максимума при $\theta = -58.53^\circ$, что близко к θ_4 . Отсюда делаем вывод, что трещина имеет возможность роста в направлении с углом $\theta_* = \theta_4 = -56.76^\circ$.

Как видно из фиг. 1, кривая 2, соответствующая уравнению (2.2) при $m = 2$, удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные данные для алюминиевых сплавов. Используя уравнение (2.2) при $m = 2$, находим предельную нагрузку для рассматриваемой пластинки $p_* = 201.4$ МПа.

Если при выводе критерия Си для плоского напряженного состояния учесть условие $\sigma_{zz} = 0$, то он имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & (\cos^2 \frac{\theta_*}{2} + \kappa \sin^2 \theta_*) K_I^2 + (2\kappa \sin 2\theta_* - \sin \theta_*) K_I K_{II} + \\
 & + (4\kappa + \sin^2(\theta_*/2) - 3\kappa \sin^2 \theta_*) K_{II}^2 = K_{IC}^2
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $\kappa = 0.25(1 + \nu)/(1 - \nu)$. Согласно (3.1) для рассматриваемой пластины значение предельной нагрузки получается равным 126.5 МПа.

Предельная нагрузка для рассматриваемой пластины с трещиной без учета концентрации напряжений, обусловленной наличием макротрещины, равна 343 МПа.

На фиг. 3 приведен график функции $r_*(\theta)$ согласно уравнению (1.9) для значения предельной нагрузки, равного 201.4 МПа (x, y [мм]). В тех точках, где функция $r_*(\theta)$ имеет экстремумы, найдем компоненты тензора напряжений в полярной системе координат θ, r . В точке C (фиг. 3) имеем: $\sigma_\theta = 512.1$ МПа, $\sigma_r = 185.2$ МПа, $\tau_{\theta r} = 12.9$ МПа. Главные напряжения в точке C : $\sigma_1 = 512.6$ МПа, $\sigma_2 = 184.7$ МПа. Эти напряжения удовлетворяют соотношению

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 = \sigma_*^2 \quad (3.2)$$

которое следует из условия (1.1) и формул (1.2), (1.3). В точке B графика $r_*(\theta)$ имеем: $\sigma_\theta = -392.2$ МПа, $\sigma_r = -31.9$ МПа, $\tau_{\theta r} = -189.1$ МПа, $\sigma_1 = 49.1$ МПа, $\sigma_3 = -473.1$ МПа. В точке A на фиг. 3 σ_θ равна 84.7 МПа, в точке D σ_θ равна 47.3 МПа. Согласно формуле (3.2) имеем:

$$\max \sigma_1 = \sigma_* / \sqrt{1 - \nu^2} = 513.7 \text{ МПа}$$

Как видно из фиг. 3, направление роста трещины ОС почти перпендикулярно направлению растягивающих внешних сил ОР (угол между этими линиями равен 86.8°).

Развитие концепции Си в настоящей работе заключается в следующем: вывод точного (в рамках рассматриваемой концепции) критерия разрушения (1.9); рациональная аппроксимация теоретического критерия (1.9) равенством (2.2) путем введения в рассмотрение единственного эмпирического параметра m .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1988. 488 с. (Механика разрушения и прочность материалов. Т. 1).
2. Sih G.C. Some basic problems in fracture mechanics and new concepts // Eng. Fract. Mech. 1973. V. 5. № 2. P. 365-377.
3. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232 с.
4. Шлянников В.Н. Плотность энергии деформации и зона процесса разрушения. Сообщ. 1. Теоретические предпосылки // Проблемы прочности. 1995. № 10. С. 3-17.
5. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наукова думка, 1988. 620 с. (Механика разрушения и прочность материалов. Т. 2).
6. Ву Э. Прочность и разрушение композитов // Композиционные материалы / Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока Т. 5. Разрушение и усталость. М.: Мир, 1978. С. 206-266.
7. Ковчик С.Е., Морозов Е.М. Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения. Киев: Наукова думка, 1988. 436 с. (Механика разрушения и прочность материалов. Т. 3).
8. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т. 2 / Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир, 1990. 1016 с.

Набережные Челны

Поступила в редакцию
27.07.1998