

© 2001 г. Ю.М. УРМАН

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЕПРИВОДИМЫХ ТЕНЗОРОВ В ЗАДАЧАХ ВРАЩЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА В НЕОДНОРОДНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Существенной особенностью пондеромоторного взаимодействия движущегося проводящего тела с неоднородным магнитным полем, является взаимосвязь механических степеней свободы посредством вихревых токов, приводящая к "перекачиванию" энергии от одних степеней свободы к другим. При этом появляются различные дестабилизирующие факторы, непривычные с точки зрения традиционного представления о взаимодействии проводника с магнитным полем: торможение тела сменяется его разгоном, выталкивающая сила сменяется притягивающей, появляются "отрицательное трение" и "циркуляционная сила".

Чтобы получить полное представление о взаимодействии движущегося проводящего тела с полем, необходимо решить уравнения электродинамики и механики совместно. Однако эта задача очень сложна и аналитически неразрешима в общей постановке даже для тел простой геометрии. Существует ряд работ [1–3], в которых, используя асимптотические методы, она решается в предположениях малой или большой глубины проникновения магнитного поля в проводник. Для сферических по форме проводящих тел (шар, сферическая оболочка) при некоторых заданных типах их движения удается в довольно общей постановке решить граничную задачу и найти пондеромоторное взаимодействие тела с полем. Несмотря на то, что это – частная задача, анализ пондеромоторного взаимодействия позволяет здесь выявить ряд характерных эффектов, интересных как физические явления, а также с точки зрения их влияния на устойчивость удержания тела полем. Кроме того, эта задача имеет и самостоятельное значение, поскольку вихревые токи, возникающие при движении проводящего тела в магнитном поле, являются (наряду с вязким трением) весьма распространенным источником диссипативных сил.

В [4] было показано, что момент сил общего вида может быть разложен на консервативную и неконсервативную части. При этом консервативная часть момента порождается с помощью одной скалярной функции, а неконсервативная – с помощью двух скалярных функций, зависящих от величины и направления кинетического момента.

В публикуемой работе проводится конкретный расчет этих функций для случая вращения проводящего шара в неоднородном магнитном поле, а также показывается, что главный вектор силы, действующий на тело, может быть также разложен на консервативную и неконсервативную части аналогично моменту сил.

1. Главный вектор силы и главный момент сил, действующих на тело в магнитном поле. Пусть тело произвольной формы помещено в квазистационарное магнитное поле. Предположим, что поле на поверхности некоторой сферы, охватывающей тело, известно и равно¹

$$\mathbf{H} = \sum_n [(a_n \cdot Y_n(\hat{\mathbf{r}}))\mathbf{r} + \nabla_{\perp}(\beta_n \cdot Y_n(\hat{\mathbf{r}}))] \quad (1.1)$$

¹ Для квазистационарного магнитного поля представление [1] всегда возможно (см., например, [5]).

где α_n, β_n – неприводимые тензоры ранга n [6], характеризующие амплитуды радиальной и поперечной компонент поля, $Y_n(\hat{\mathbf{r}})$ – сферическая функция (зависящая от радиуса вектора \mathbf{r}), которая также является неприводимым тензором, $\hat{\mathbf{r}}$ – единичный вектор в направлении \mathbf{r} , ∇_{\perp} – поперечная часть градиента, (\cdot) – означают скалярное произведение неприводимых тензоров [6].

Равнодействующую силу и момент, действующие на тело в магнитном поле, можно найти интегрированием тензора натяжений Максвелла [5]:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} \oint \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{2} H^2 \mathbf{n} \right\} ds \quad (1.2)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4\pi} \oint \left\{ [\mathbf{r} \times \mathbf{H}](\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{2} H^2 [\mathbf{r} \times \mathbf{H}] \right\} ds \quad (1.3)$$

где \mathbf{F} и \mathbf{M} – сила и момент, \mathbf{n} – вектор нормали к поверхности S , охватывающей тело и не содержащей источников, создающих поле.

Подставляя формулы (1.1) в (1.2) и (1.3) и проводя вычисления, получим силу и момент сил, выраженные через неприводимое произведение [6] амплитуд радиальной и поперечной компонент поля

$$M_1 = iR^3 \sum_n \frac{(-1)^n}{2n+1} \sqrt{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}} \{\alpha_n \otimes \beta_n\}_1 \quad (1.4)$$

$$F_1 = R^2 \sum_n (-1)^n \sqrt{\frac{(n+1)}{3(2n+1)(2n+3)}} [\{\alpha_n \otimes \alpha_{n+1}\}_1 - \quad (1.5)$$

$$-n(n+2)\{\beta_n \otimes \beta_{n+1}\}_1 - n\{\beta_n \otimes \alpha_{n+1}\}_1 + (n+2)\{\beta_{n+1} \otimes \alpha_n\}_1]$$

Индекс 1 в формулах (1.4) и (1.5) и далее означает "неприводимый тензор первого ранга", т.е. вектор.

Формулы (1.4) и (1.5) представляют собой весьма общие выражения. При их выводе не использовались никакие предположения относительно формы тела или электромагнитных свойств его. Необходимо лишь иметь представление поля в форме (1.1). Однако именно эта задача представляет большие сложности, если форма тела произвольна, но она может быть в принципе решена численно.

В случае если внешнее поле имеет заданную структуру, т.е. создается токами, текущими в тонких проводниках, или источниками, достаточно удаленными от тела, полное поле вне тела складывается из внешнего поля и возмущения (или реакции), обусловленного вносимым телом. Выражения (1.4) и (1.5) можно преобразовать к такому виду, чтобы они содержали зависимость от амплитуд внешнего поля и поля реакции, а не от амплитуд полного поля.

Вне источников и вне тела поля удовлетворяют уравнению Лапласа и в сферической системе координат могут быть найдены в виде

$$\mathbf{H}^n = -\nabla U^n, \quad U^n = \sum_n (b_n \cdot \mathcal{F}_n(\mathbf{r})) \quad (1.6)$$

$$\mathbf{H}^{\text{Re}} = -\text{rot}[\mathbf{r} \times \nabla] \phi^{\text{Re}}, \quad \phi^{\text{Re}} = \sum_n (B_n \cdot \mathfrak{H}_n(\mathbf{r})) \quad (1.7)$$

где скалярный потенциал внешнего поля U^n считается заданным, а коэффициенты B_n поля реакции ϕ^{Re} находятся из граничных условий на поверхности тела, $\mathcal{F}_n(\mathbf{r})$, $\mathfrak{H}_n(\mathbf{r})$ – соответственно регулярная и иррегулярная шаровые функции. Сравнивая продольные и поперечные компоненты полей (1.1) и (1.6), (1.7) найдем, что

$$\alpha_n = -nR^{n-1}b_n + \frac{n(n+1)}{R^{n+2}}B_n \quad \beta_n = -R^{n-1}b_n - \frac{n}{R^{n+2}}B_n \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в формулы (1.4) и (1.5), после преобразований получим неприводимый вектор момента и силы:

$$M_1 = i \sum_n (-1)^n n \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}} \{b_n \otimes B_n\}_1 \quad (1.9)$$

$$F_1 = \sum_n (-1)^{n+1} l \sqrt{\frac{n(2n+1)(2n+3)}{3}} \{b_{n+1} \otimes B_n\}_1 \quad (1.10)$$

Выражения (1.9) и (1.10) определяются коэффициентами разложения скалярного потенциала внешнего поля в отсутствие тела и от коэффициентов разложения поля реакции. Таким образом, вычисление силы и момента силы, действующих на тело в заданном внешнем поле, сводится к вычислению реакции внешнего поля на внесенное тело. Отыскание поля реакции для тел произвольной геометрии представляет довольно сложную проблему, так как требует решения граничной задачи для уравнений квазистатики со сложной границей. Рассмотрим эту задачу для тела, имеющего форму шара, и покажем, что в этом случае удается получить аналитическое решение.

2. Задача для шара. Пусть шар радиуса R , имеющий проводимость σ и магнитную проницаемость μ , вращается во внешнем неоднородном магнитном поле произвольной конфигурации, меняющейся по гармоническому закону с частотой ω .

Выберем две неподвижные системы координат OX_i и OX'_i ($i = 1, 2, 3$) с общим началом. Первую из них свяжем с источниками магнитного поля, а во второй ось OX'_3 направим вдоль оси вращения шара.

Потенциал внешнего поля в системе OX_i зададим разложением

$$U^0 = \cos \omega t \sum_n (a_n \mathcal{F}_n(\mathbf{r})) \quad (2.1)$$

Этот же потенциал в системе координат OX'_i будет иметь вид

$$U^0 = \cos \omega t \sum_n (b_n \mathcal{F}_n(\mathbf{r})) \quad (2.2)$$

где связь между компонентами тензоров a_n и b_n определяется формулой преобразования их из одной системы координат в другую

$$b_{n\lambda} = \sum_n D_{m\lambda}^n(\mathbf{e}) a_{nm} \quad (2.3)$$

где \mathbf{e} – орт вектора $\boldsymbol{\Omega}$ угловой скорости тела, $D_{m\lambda}^n(\mathbf{e})$ – матрица конечных вращений, зависящая от направления вектора \mathbf{e} [6, 7].

Поле, индуцируемое в движущемся проводнике, удовлетворяет уравнениям [8]:

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (2.4)$$

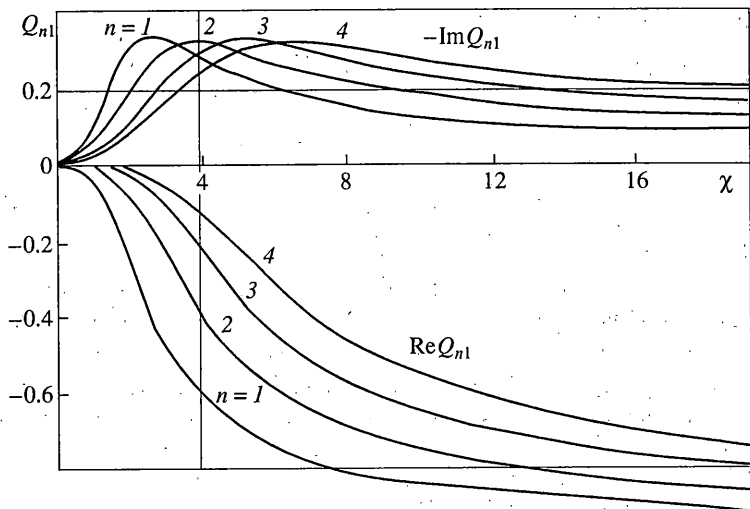
Решение этого уравнения с учетом граничных условий получено в [9], где для коэффициентов B_{nm} поле реакции получено соотношение

$$B_{nm} = -\frac{R^{2n+1} b_{nm}}{n+1} \{B_n^s + B_n^d Q_n(z)\} \quad (2.5)$$

$$B_n^s = \frac{(\mu-1)(n+1)}{(\mu-1)n+2n+1} \quad (2.6)$$

$$B_n^d = \frac{\mu(n+1)}{(\mu-1)n+2n+1}, \quad Q_n(z) = \frac{(2n+1)\zeta_n(z)}{(\mu-1)n+2n+1+n(\mu-1)\zeta_n(z)}, \quad \zeta_n(z) = \frac{j_{n+1}(z)}{j_{n-1}(z)} \quad (2.7)$$

$$z = Rk_{mv} = \frac{(1-i)}{c} R \sqrt{2\pi\mu\sigma(m\Omega + v\omega)} = (1-i)\chi \quad (2.8)$$



Фиг. 1

Первое слагаемое в формуле (2.5) представляет собой статистическую часть, независимую от скорости вращения и частоты внешнего поля; второе слагаемое представляет собой динамическую часть, зависящую от скорости вращения и частоты поля; j_n – сферические функции Бесселя n -го порядка от комплексного аргумента z .

Функция $Q_n(z)$ комплексна и удовлетворяет соотношению $Q_n(-z) = Q_n^*(z)$, откуда следует, что $\text{Re } Q_n(z)$ – четная, а $\text{Im } Q_n(z)$ – нечетная функция z . Ее можно трактовать как Фурье-преобразованный линейный оператор, переводящий внешнее поле в поле реакции шара.

На фиг. 1 дан вид реальной и мнимой части $Q_n(z)$ (при $\omega = 0$ и $\mu = 1$) для $n = 1-4$. Реальная часть ее – монотонная ограниченная функция, а мнимая имеет один минимум на частоте Ω^+ . Частота Ω^+ называется характерной электродинамической частотой проводящего тела для данной гармоники h_{mn} возбуждающего поля.

Приведем выражения для асимптотического поведения $Q_n(z)$ при малых и больших значениях аргумента

$$Q_n[(1-i)\chi] = \Lambda_n \chi^4 + i \lambda_n \chi^2, \quad \chi \gg n\mu$$

$$\Lambda_n = -\frac{4[n(\mu-1) + 2(2n+3)]}{(2n+3)^2(2n+5)[2n+1+n(\mu-1)]^2}$$

$$\lambda_n = -\frac{2[(2n+1) + n(\mu+1)]}{(2n+3)[2n+1+n(\mu-1)]^2} \quad (2.9)$$

$$Q_n[(1-i)\chi] = -1 + \frac{2n+1+n(\mu-1)}{2\chi} - i \frac{(2n+1)+n(\mu-1)}{2\chi}, \quad \chi \gg n\mu \quad (2.10)$$

При больших χ стремление к предельным значениям определяется зависимостями

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} \text{Re } Q_n[(1-i)\chi] = -1, \quad \lim_{\chi \rightarrow \infty} \text{Im } Q_n[(1-i)\chi] = 0$$

3. Главный вектор силы, действующий на сферическое проводящее тело, вращающееся в постоянном неоднородном магнитном поле. Подставим в формулу (1.10) вы-

ражение для тензора B_n (2.5) поля реакции. Получим

$$F_1 = \sum_n (-1)^n \frac{n}{n+1} R^{2n+1} \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}} B_n^s \{b_{n+1} \otimes b_n\}_1 +$$

$$+ \sum_n (-1)^n \frac{n}{n+1} R^{2n+1} \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}} B_n^d \{b_{n+1} \otimes b_n Q_n\}_1. \quad (3.1)$$

Рассмотрим сначала первый член формулы (3.1), представляющий собой статическую силу, исчезающую при $\mu = 1$. Эта сила представлена в виде тензорного произведения компонент тензоров поля b_n , определенных в системе координат OX'_i , связанной с угловой скоростью Ω . В силу её инвариантности она будет иметь тот же вид, если ее представить через тензоры поля a_n , определенные в системе OX_i , связанной с источником поля

$$F_1 = \sum_n (-1)^n \frac{n}{n+1} R^{2n+1} \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}} B_n^d \{a_{n+1} \otimes a_n\}. \quad (3.2)$$

Если внешнее поле имеет ось симметрии, совпадающую с осью x_3 системы координат OX_i , то из (3.2) следует, что сила направлена по оси симметрии поля и равна

$$F_{x_3} = \sum_n n R^{2n+1} B_n^s a_n a_{n+1}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим теперь второй член формулы (3.1), представляющий собой силу, обусловленную вращением шара. Она имеет конечное значение n при $\mu = 1$. Представим ее через тензоры a_n поля, определенные в системе OX_i , и найдем векторное представление. Для этого спроектируем $\{b_{n+1} \otimes b_n Q_n\}_1$ на оси координат OX_i и используем формулу преобразования компонент тензора поля при повороте системы координат (2.3) (в дальнейшем будем считать поле постоянным и второй индекс Q_n не будем учитывать).

После преобразований получим

$$F = - \sum_{n,j,l,p} (-1)^{n+j+l} \frac{n R^{2n+1}}{n+1} (2l+1) \sqrt{(n+1)(2n+3)} B_n^d$$

$$(\{a_{n+1} \otimes a_n\}_j Y_j^l) Q_{np}(z) C_{np10}^{np} \begin{Bmatrix} j(n+1)n \\ n \quad l \quad 1 \end{Bmatrix}$$

$$(3.4)$$

где $Y_j^l(\mathbf{e})$ – шаровой вектор, зависящий от единичного направления вектора Ω , а выражение в фигурных скобках представляет собой коэффициент Рака, значение которого можно найти в [7]. Индекс l принимает три значения $j+1, j, j-1$, которым соответствуют три шаровых вектора $Y_{jm}^{j+1}, Y_{jm}^j, Y_{jm}^{j-1}$. Используя связь этих векторов с векторами $\nabla Y_{jm}, [\mathbf{r} \times \nabla] Y_{jm}, \hat{r} Y_{jm}$ [7], преобразуем (3.4) к следующему виду:

$$F = [\mathbf{e} \times \nabla] V_1 + \nabla_\Omega V_2 + \mathbf{e} V_3 \quad (3.5)$$

где V_1, V_2, V_3 после некоторых преобразований с учетом свойств функции $Q_n(z)$ можно представить в виде

$$V_1 = \sum_{n,j} (-1)^{n+1} \frac{n R^{2n+1}}{n+1} B_n^d (\{a_{n+1} \otimes a_n\}_{2j+1} \cdot Y_{2j+1}(\mathbf{e})) F_{nj}^{(1)}(z) \quad (3.6)$$

$$V_2 = \sum_{n,j} (-1)^n \frac{n R^{2n+1}}{n+1} B_n^d (\{a_{n+1} \otimes a_n\}_{2j+1} \cdot Y_{2j+1}(\mathbf{e})) F_{nj}^{(2)}(z) \quad (3.7)$$

$$V_3 = \sum_{nj} (-1)^n \frac{nR^{2n+1}}{n+1} B_n^d(\{a_{n+1} \otimes a_n\}_{2j+1}) Y_{2j+1}(\mathbf{e}) F_{nj}^3(z) \quad (3.8)$$

$$F_{nj}^{(1)} = \sqrt{\frac{(2n+1+2j+3)(2n-2j)(4j+3)}{(2j+1)(2j+2)(2n+1)}} \sum_{p=1}^n c_{np,2j+10}^{np} \operatorname{Im} Q_{np}(z) \quad (3.9)$$

$$F_{nj}^{(2)} = \sum_{p=1}^n \left[\sqrt{\frac{(2n-2j-1)(2n-2j)(2j+1)}{(2n+1)(4j+3)(2j+2)}} c_{np,2j+20}^{np} + \right. \quad (3.10)$$

$$\left. + \sqrt{\frac{(2n+2j+2)(2n+2j+3)(2j+2)}{(2n+1)(4j+3)(2j+1)}} c_{np,2j,0}^{np} \right] \operatorname{Re} Q_{np}(z)$$

$$F_{nj}^3 = \sum_{p=1}^n \left[\sqrt{\frac{(2n+2j+2)(2n+2j+3)(2j+1)(2j+2)}{(2n+1)(4j+3)}} c_{np,2j,0}^{np} - \right. \quad (3.11)$$

$$\left. - \sqrt{\frac{(2n-2j-1)(2n-2j)(2j+1)(2j+2)}{(2n+1)(4j+3)}} c_{np,2j+20}^{np} \right] \operatorname{Re} Q_{np}(z)$$

Формулы (3.5) представляют собой разложение силы, действующей на вращающийся проводящий шар в магнитном поле, на три перпендикулярных друг к другу направления: вдоль оси вращения $\mathbf{e}V_3$ и два ортогональных направления, лежащих в плоскости, перпендикулярной к оси вращения $\mathbf{\Omega} - [\mathbf{e} \times \nabla]V_1$ и $\nabla_{\Omega}V_1$. При этом составляющая силы $[\mathbf{e} \times \nabla]V_1$ имеет диссипативный характер, так как при обращении знака времени $t = -t$ она меняет знак из-за свойства нечетности. Составляющие $\nabla_{\Omega}V_2$ и $\mathbf{e}V_3$ при замене $t = -t$ знак не меняют.

Функции V_1, V_2, V_3 , имеющие одинаковую структуру, зависят от положения вектора $\mathbf{\Omega}$ относительно опорной системы координат OX_i . Обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ проекции единичного вектора \mathbf{e} на оси системы OX_i , орты которой $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Тогда функции V_i будут зависеть от γ_i и сила может быть представлена формулой

$$\mathbf{F} = \left[\mathbf{e} \times \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{r}} \right] + \left[\mathbf{e} \times \frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{r}} \right] \times \mathbf{e} + \mathbf{e}V_3 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial r_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial r_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial r_3}$$

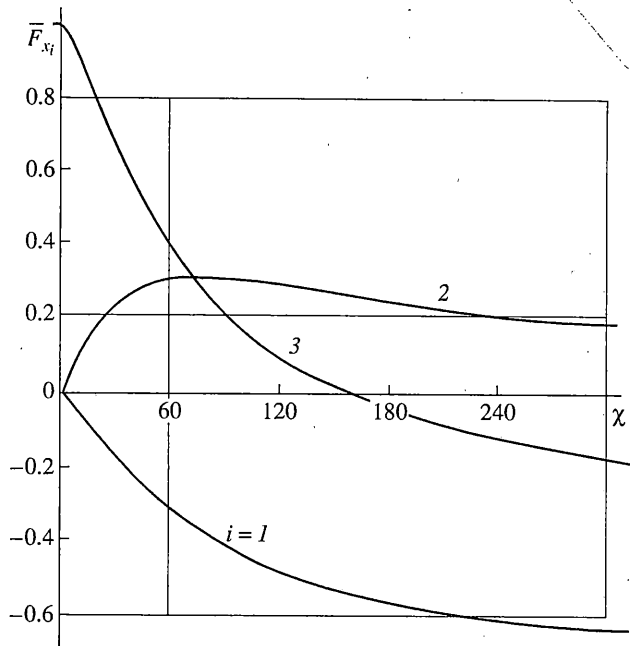
Если внешнее поле имеет ось симметрии, совпадающую с координатной осью OX_3 , то функции V_i зависят только от угла γ_3 и тогда (3.12) переходит в формулу

$$\mathbf{F} = [\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3] \frac{\partial V_1}{\partial \gamma_3} + [\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3] \times \mathbf{e} \frac{\partial V_2}{\partial \gamma_3} + \mathbf{e}V_3 \quad (3.13)$$

Приведем выражения для функций V_i и силы в осесимметричном поле двух первых гармоник a_1 и a_2 . Из формул имеем

$$V_1 = -\frac{R^3}{2} B_1^d a_1 a_2 \gamma_3 \operatorname{Im} Q_{11}, \quad V_2 = -\frac{R^3}{2} B_1^d a_1 a_2 \gamma_3 (\gamma_3 - 2) \operatorname{Re} Q_{11} \quad (3.14)$$

$$V_3 = -\frac{3R^3}{2} B_1^d a_1 a_2 \gamma_3 (\gamma_3^2 - 1) \operatorname{Re} Q_{11}$$



Фиг. 2

Используя формулы (3.13) и (3.14), получим

$$\mathbf{F} = R^3 a_1 a_2 \{ (B_1^s + B_1^d \gamma_1^2 \operatorname{Re} Q_{11}) \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2} B_1^d (\gamma_1 \gamma_3 \operatorname{Re} Q_{11} \mathbf{e}_1 + \gamma \operatorname{Im} Q_{11} \mathbf{e}_2) \} \quad (3.15)$$

Сила, обусловленная вращением, носит диамагнитный характер ($\operatorname{Re} Q_{11} < 0$, $I_m Q_{11} < 0$), поэтому, если $B_1^s > 0$, то по мере увеличения скорости вращения величина проекции силы F_{x_3} уменьшается и может обратиться в нуль. В рассмотренном выше случае это происходит, если $\gamma_1^2 \operatorname{Re} Q_{11} = \frac{B_1^s}{B_1^d}$. На фиг. 2 показано изменение проекции силы F в зависимости от скорости вращения в том случае, когда она переходит через нуль ($\bar{F}_{x_i} = F_{x_i} / (R^3 a_1 a_2)$). Кривые соответствуют магнитной проницаемости $\mu = 100$ и $\beta = 75^\circ$. Если тело вращается достаточно медленно в произвольном осесимметричном поле, то с точностью до квадратичных членов по скорости вращения формула силы принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} R^{2n+1} \{ \mathbf{e}_3 [n B_n^s + \frac{1}{2} n^2 B_n^d (n+1) \Lambda_n \Omega^2 \gamma_1^2] + \\ + \frac{1}{2} \Omega^2 \Lambda_n \gamma_1 \gamma_2 n^2 B_n^d \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} n^2 B_n^d \Omega \Lambda_n \gamma_1 \mathbf{e}_2 \} \end{aligned} \quad (3.16)$$

В случае предельно больших скоростей вращения формула силы принимает следующий вид:

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} R^{2n+1} \{ [-1 + B_n^d (P_n(\gamma_3))^2] \mathbf{e}_3 - B_n^d \frac{P_n(\gamma_3)}{n+1} \mathbf{e}_1 \} \quad (3.17)$$

Хотя быстро вращающийся проводник экранирует внутренние области от проникновения внешнего поля и этим похож на сверхпроводник, однако, в отличие от сверх-

проводника, магнитное поле, параллельное оси вращения, не экранируется. Поэтому и возникает сила.

4. Главный момент силы, действующий на вращающееся в магнитном поле сферическое проводящее тело.

Подставляя (2.5) в формулу (1.9) и проводя преобразования, аналогичные тем, которые были выполнены при исследовании силы, получим

$$\mathbf{M} = -i \sum_{njl} (-1)^{n+j+l} (2l+1) \sqrt{n(n+1)} \frac{R^{2n+1}}{n+1} B_n^d \times \quad (4.1)$$

$$\times \begin{Bmatrix} n & n & j \\ 1 & l & n \end{Bmatrix} (\{a_n \times a_n\}_l \cdot \mathbf{Y}_l^j) \cdot \sum_q c_{nq,10}^{nq} Q_{nq}(z)$$

Расписывая коэффициент Рака и принимая во внимание связь шаровых векторов \mathbf{Y}_l^j с векторами eY_{jm} , $\nabla_{\Omega} Y_{jm}$, $[e \times \nabla] Y_{jm}$ найдем, что момент можно представить в виде

$$\mathbf{M} = [e \times \nabla_{\Omega}] \tilde{V}_1 + \nabla_{\Omega} \tilde{V}_2 + e \tilde{V}_3 \quad (4.2)$$

$$\tilde{V}_1 = \sum_{n,j} (-1)^q n \frac{R^{2n+1}}{n+1} B_n^d (\{a_n \times a_n\}_{2j} \cdot Y_{2j}) \cdot M_{nj}^{(1)} \quad (4.3)$$

$$\tilde{V}_2 = - \sum_{n,q} (-1)^q n \frac{R^{2n+1}}{n+1} B_n^d (\{a_n \times a_n\}_{2j} \cdot Y_{2j}) \cdot M_{nj}^{(2)} \quad (4.4)$$

$$\tilde{V}_3 = -2 \sum_{n,q} (-1)^q n \frac{R^{2n+1}}{n+1} B_n^d (\{a_n \times a_n\}_{2j} \cdot Y_{2j}) \cdot M_{nj}^{(3)} \quad (4.5)$$

$$M_{n,q}^1 = \sum_{q=0}^n c_{nq,n-q}^{2j,0} \operatorname{Re} Q_{nq} \quad (4.6)$$

$$M_{nq}^{(2)} = \sum_{q=0}^n \left[\sqrt{\frac{(2n+2j+2)(2n-2j)}{(4j+1)(4j+3)}} c_{nq,n-q}^{2j+10} - \sqrt{\frac{(2n+2j+1)(2n-2j+1)}{(4j+1)(4j-1)}} c_{nq,n-q}^{2j-10} \right] \operatorname{Im} Q_{nq} \quad (4.7)$$

$$M_{nj}^{(3)} = \sum_{q=0}^n q c_{nq,n-q}^{2j,0} \operatorname{Im} Q_{nq} \quad (4.8)$$

Сравнение формул сил и момента показывает, что они имеют аналогичный вид. Однако в формуле момента в отличие от силы составляющие $\nabla_{\Omega} \tilde{V}_2$ и $e \tilde{V}_3$ имеют диссипативный характер, а составляющая $[e \times \nabla_{\Omega}] V_1$ – консервативный, кроме того тензор поля, присутствующий в моменте, всегда имеет четный порядок, поэтому момент не зависит от знака коэффициентов поля a_n . Так же как и сила, момент определяется положением вектора Ω относительно системы координат, связанной с источниками поля и может быть представлен формулой

$$\mathbf{M} = \left[\mathbf{e} \times \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial \gamma} \right] + \left[\mathbf{e} \times \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial \gamma} \right] \times \mathbf{e} + e \tilde{V}_3 \quad (4.9)$$

В случае осесимметричного поля функция \tilde{V}_i зависит только от одного угла γ_3 и

тогда, аналогично формуле для силы имеем

$$\mathbf{M} = [\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3] \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial \gamma_3} + [\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3] \times \mathbf{e} \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial \gamma_3} + \mathbf{e} \tilde{V}_3 \quad (4.10)$$

откуда следует, что часть момента $[\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3] \partial \tilde{V}_1 / \partial \gamma_3$ вызывает прецессию ротора, а оставшаяся часть момента тормозит его. Если шар вращается в однородном поле, то формула (4.2) для функции \tilde{V}_i следует

$$\tilde{V}_1 = \frac{R^3 a_1^2}{4} B_1^d \operatorname{Re} Q_{11} (\gamma_3^2 - 1), \quad \tilde{V}_2 = \frac{R^3 a_1^2}{4} B_1^d \operatorname{Im} Q_{11} (1 + \gamma_3^2), \quad \tilde{V}_3 = \frac{R^3 a_1^2}{4} B_1^d \operatorname{Im} Q_{11} (\gamma_3^2 - 1)$$

и момент сил будет иметь вид

$$\mathbf{M} = -\frac{R^3 a_1^2}{4} B_1^d \operatorname{Im} Q_{11} \gamma_1 \mathbf{e}_1 - \frac{R^3 a_1^2}{4} B_1^d \operatorname{Re} Q_{11} \gamma_1 \gamma_3 \mathbf{e}_2$$

При медленном вращении тела в поле произвольной конфигурации функции \tilde{V}_i принимают форму

$$\tilde{V}_1 = \frac{\Omega^2}{6} \sum_n (-1)^n \frac{n}{n+1} \sqrt{\frac{2n+1}{5}} R^{2n+1} \Lambda_n B_n^d \sqrt{(2n-1)n(n+1)(2n+3)} (\{a_n \times a_n\}_2 \cdot Y_2)$$

$$\tilde{V}_2 = \frac{\Omega}{6} \sum_n (-1)^n \frac{n}{n+1} \sqrt{\frac{(2n+3)(2n-1)(2n+1)n(n+1)}{5}} \Lambda_n B_n^d (\{a_n \times a_n\}_2 \cdot Y_2)$$

$$\tilde{V}_3 = -\frac{1}{3} \Omega \sum_n (-1)^n \frac{n}{n+1} R^{2n+1} B_n^d \Lambda_n \left[\sqrt{\frac{(2n+1)(2n-1)(2n+3)n(n+1)}{5}} (\{a_n \times a_n\}_2 \cdot Y_2) + \right. \\ \left. + n(n+1) \sqrt{2n+1} \{a_n \times a_n\}_0 \right]$$

В случае предельно больших частот вращения диссипативная часть момента стремится к нулю, и остается только его консервативная часть. Так в осесимметричном поле момент будет равен

$$\mathbf{M} = [\mathbf{e} \times \mathbf{e}_3] \frac{\partial V_1}{\partial \gamma_3}, \quad \tilde{V}_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1} a_n^2 R^{2n+1} B_n^d P_n^2(\gamma_3)$$

Это связано с тем, что из быстро вращающегося шара выталкивается магнитное поле, перпендикулярное к оси вращения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-01-00129).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобрин А.Н., Мартыненко Ю.Г. Динамика проводящего твердого тела в высокочастотном магнитном поле // Докл. АН СССР. 1980. Т. 255. № 5. С. 1063–1065.
2. Кобрин А.И., Мартыненко Ю.Г. Движение проводящего твердого тела около центра масс в медленно изменяющемся магнитном поле // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 5. С. 1070–1073.
3. Мартыненко Ю.Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
4. Урман Ю.М. Применение метода неприводимых тензоров в задачах об эволюционных движениях твердого тела с неподвижной точкой // Изв. РАН. МТГ. 1997. № 4. С. 10–20.
5. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.

6. *Урман Ю.М.* Неприводимые тензоры и их применение в задачах движения твердого тела в силовых полях // *Механика твердого тела*. Киев: Наук. думка, 1983. Вып. 15. С. 75–87.
7. *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
8. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
9. *Линьков Р.В., Урман Ю.М.* Вращающийся шар в магнитном поле // *Ж. техн. физики*. 1973. Т. 43. № 12. С. 2472–2480.

Н.-Новгород

Поступила в редакцию
22.10.1998