

УДК 539.375

© 2001 г. Р.В. ГОЛЬДШТЕЙН, М.Н. ПЕРЕЛЬМУТЕР

ТРЕЩИНА НА ГРАНИЦЕ СОЕДИНЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ СО СВЯЗЯМИ МЕЖДУ БЕРЕГАМИ

В работе рассматривается модель трещины, расположенной на границе соединения различных материалов, при наличии областей, в которых берега трещины взаимодействуют. Полагается, что эти области (далее в тексте – концевые области) примыкают к вершине трещины, а их размеры могут быть сравнимы с размером трещины. Взаимодействие берегов трещины в концевых областях моделируется путем введения между берегами трещины связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. Физическая природа таких связей и размеры областей, в которых осуществляется взаимодействие берегов трещины, зависят от вида соединяемых материалов и масштаба трещины. Причем на различных расстояниях от вершины трещины возможна реализация различных механизмов взаимодействия ее берегов. Высокая концентрация напряжений вблизи вершины трещины приводит также к разупрочнению материала, окружающего трещину, что может проявляться в образовании микротрещин и пор, а также областей пластического течения. Анализ условий равновесия и развития трещины с учетом взаимодействия ее берегов и образования зон разупрочнения приводит к рассмотрению модели трещины с концевой областью, в которой действуют силы сцепления (связи), препятствующие раскрытию трещины. Такие модели предложены в [1, 2] для хрупких материалов, а в [3, 4] рассматривались модели, в которых принимается, что в концевых зонах имеет место пластическое течение при постоянном напряжении. При введении зоны действия сил сцепления итоговый коэффициент интенсивности напряжений (КИН), определяемый как разность между КИН от действия внешних растягивающих напряжений и КИН от сжимающих нагрузок (сил сцепления), приложенных к концевой области трещины, равен нулю. Размер зоны действия сил сцепления при росте трещины полагается неизменным, причем в модели Г.И. Баренблатта [1, 2] вводится допущение, что этот размер мал по сравнению с размером трещины. Аналитические и численные решения ряда задач механики разрушения, основанные на таких моделях, рассмотрены в [5–7]. В композиционных материалах и конструкциях, содержащих соединения различных материалов (например, полимер-керамика, полимер-металл), процессы деформирования и разрушения следует рассматривать на различных структурных масштабах, начиная с анализа локального разрушения на границе двух компонентов [8]. В таких материалах процесс локального разрушения вблизи вершины трещины определяется различными механизмами, реализующимися на разных участках концевой области трещины (многомасштабное разрушение), размер которой, вообще говоря, меняется в процессе роста трещины и не является малым в сравнении с характерным размером последней. В моделях трещины с концевой областью для таких материалов полагается, что нагрузки, препятствующие раскрытию трещины, снижают КИН в ее вершине, но итоговый КИН не равен нулю [9, 10]. Решение задачи о предельном равновесии трещины при рассмотрении таких моделей состоит из формулировки закона деформирования связей в концевой области трещины и анализа напряженного состояния вблизи трещины с учетом соответствующего критерия разрушения. Будем полагать, что закон деформирования связей задан (уравнения деформирования связей для различных материалов рассматриваются в [11–13]). Задачи об определении напряженного состояния в концевой области трещины и КИН в двумерной постановке для изотропных материалов рассматривались в [14–17], для трансверсально-изотропных

в – [18], для ортотропных в – [19], для изотропных осесимметричных областей с круговой трещиной в – [20]. Пространственная задача для изотропного тела с плоской трещиной и линейно-упругими связями рассмотрена в [21]. Численное моделирование развития трещины на границе соединения материалов с учетом разупрочнения в концевой области рассматривается в [22, 23] для случая, когда один из материалов деформируется пластически и в [24] для трещины между вязко-упругим и жестким телом.

В данной работе задача о равновесии трещины на границе соединения материалов при действии внешних растягивающих нагрузок и усилий в связях, препятствующих ее раскрытию, сводится к системе нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядром типа Коши. Из решения этой системы уравнений определяются нормальные и касательные усилия в связях. Коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины вычисляются с учетом компенсирующего внешние нагрузки действия связей в концевой области трещины. Рассматриваются энергетические характеристики трещины с концевой областью: скорость высвобождения энергии деформации и скорость поглощения энергии деформации связями. Условие предельного равновесия трещины с концевой областью формулируется с учетом критерия предельной вытяжки связей. Выполнен параметрический анализ зависимости силовых и энергетических характеристик трещины от размера ее концевой области и физико-механических параметров связей.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трещину длины $2l$, расположенную на отрезке $|x| \leq l, y = 0$ (фиг. 1) границы соединения двух полуплоскостей из различных материалов. Положим, что на удаленной границе области действуют равномерно распределенные напряжения σ_0 , нормальные к плоскости трещины. Выделим части трещины длиной d (концевые области), примыкающие к ее вершинам ($l - d \leq |x| \leq l, y = 0$), в которой берега трещины взаимодействуют, так что это взаимодействие сдерживает раскрытие трещины. Для математического описания взаимодействия берегов трещины предположим, что в концевых областях между берегами трещины имеются связи, закон деформирования которых, в общем случае – нелинейный, задан.

При действии внешних нагрузок в связях, соединяющих берега трещины на границе соединения различных материалов, возникают усилия $Q(x)$, имеющие нормальную $q_y(x)$ и касательную $q_x(x)$ составляющие:

$$Q(x) = q_y(x) - iq_x(x), \quad i^2 = -1 \quad (1.1)$$

К берегам трещины приложены нормальные и касательные напряжения численно равные $q_y(x)$ и $q_x(x)$, соответственно.

Граничные условия на берегах трещины для плоской задачи теории упругости с исчезающими на бесконечности напряжениями записываются, с учетом принципа суперпозиции, в виде

$$\sigma_{yy}(x, 0) - i\sigma_{xy}(x, 0) = -\sigma_0, \quad |x| < l - d \quad (1.2)$$

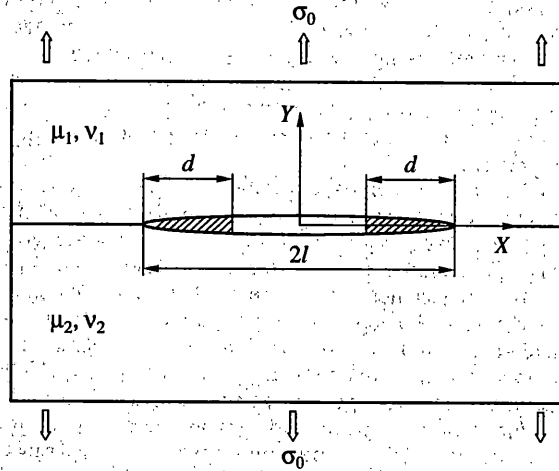
$$\sigma_{yy}(x, 0) - i\sigma_{xy}(x, 0) = (-\sigma_0 + q_y(x)) - iq_x(x), \quad l - d \leq |x| \leq l$$

Раскрытие трещины, расположенной на границе между двумя различными материалами, $u(x, 0) = u(x)$, можно, ввиду линейности задачи теории упругости, представить так

$$u(x) = u_\infty(x) + u_Q(x) \quad (1.3)$$

$$u(x) = u_y(x) - iu_x(x), \quad u_\infty(x) = u_{\infty y}(x) - iu_{\infty x}(x), \quad u_Q(x) = u_{Qy}(x) - iu_{Qx}(x) \quad (1.4)$$

где $u_y(x)$ и $u_x(x)$ – проекции раскрытия трещины на оси координат OX и OY (фиг. 1), $u_\infty(x)$ – раскрытие трещины от действия напряжений $-\sigma_0$ на берегах трещины, $u_Q(x)$ –



Фиг. 1

раскрытие трещины, обусловленное напряжениями на берегах трещины в концевой области, возникающими при действии внешних нагрузок.

Уравнения (1.1)–(1.4) необходимо дополнить соотношением, связывающим раскрытие трещины и усилия в связях, которое представим, без потери общности, в виде

$$u_y(x) - iu_x(x) = c_y(x, \sigma)q_y(x) - ic_x(x, \sigma)q_x(x) \quad (1.5)$$

где функции $c_{y,x}(x, \sigma)$ можно рассматривать как эффективные податливости связей, зависящие от натяжения связей, $\sigma = \sqrt{q_y^2 + q_x^2}$ – модуль вектора усилий в связях.

Эффективные податливости связей в (1.5) можно представить из соображений размерности так

$$c_y(x, \sigma) = \gamma_1(x, \sigma)(H/E_B), \quad c_x(x, \sigma) = \gamma_2(x, \sigma)(H/E_B) \quad (1.6)$$

где $\gamma_{1,2}(x, \sigma)$ – безразмерные функции, H – линейный размер, пропорциональный толщине зоны неоднородности на участке соединения материалов, E_B – эффективный модуль упругости связей.

Так как длина трещины мала по сравнению с размерами тела и внешние нагрузки однородны, то компоненты раскрытия трещины (см. (1.4)) представим, с учётом (1.5) и (1.6), в форме

$$u_{y,x}(x) = c_0 \gamma_{1,2}(x, \sigma) q_{y,x}(x) (l/E_B), \quad c_0 = H/l \quad (1.7)$$

где c_0 – параметр связей в концевой области трещины, который ниже будем называть относительной податливостью связей. Отметим, что при постоянных значениях $\gamma_{1,2}(x, \sigma)$ имеем в (1.6) и (1.7) линейный закон деформирования связей. Усилия в связях $q_{y,x}(x)$ подлежат определению из решения задачи при заданной внешней нагрузке σ_0 и известном законе деформирования связей. Заметим, что в рассматриваемой постановке задачи размер концевой области d не предполагается малым по сравнению с длиной трещины и вид функции $q_{y,x}(x)$ зависит как от принятого закона деформирования связей, так и от размера концевой области.

Уравнения для определения усилий $Q(x)$ в концевой области трещины получим исходя из выражений (1.3)–(1.7).

Компоненты раскрытия трещины $u_{\infty}(x)$ при действии внешних напряжений σ_0 , нор-

мальных k плоскости трещины, определяются выражением [25]:

$$u_{\infty y}(x) - iu_{\infty x}(x) = 2A\sigma_0 \sqrt{\alpha(l^2 - x^2)} \left(\frac{l-x}{l+x} \right)^{-i\beta} \quad (1.8)$$

$$A = \frac{1}{4(1+\alpha)} \left(\frac{k_1+1}{\mu_1} + \frac{k_2+1}{\mu_2} \right), \quad \alpha = \frac{\mu_2 k_1 + \mu_1}{\mu_1 k_2 + \mu_2}, \quad \beta = \frac{\ln \alpha}{2\pi}$$

где $k_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}$ или $k_{1,2} = (3 - \nu_{1,2})/(1 + \nu_{1,2})$ для плоской деформации или плоского напряженного состояния, соответственно, $\nu_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$ – коэффициенты Пуассона и модули сдвига материалов под областей 1 ($y > 0$) и 2 ($y < 0$).

Представления для раскрытия трещины при произвольной нагрузке на ее берегах могут быть получены на основе решения для раскрытия трещины при действии сосредоточенной силы, приложенной на поверхности трещины [26]. Однако, в случае кусочно-однородного тела более удобно использование выражений для производных раскрытия трещины. Из формулы (1.3) получаем

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{\partial u_{\infty}(x)}{\partial x} + \frac{\partial u_Q(x)}{\partial x} \quad (1.9)$$

Производную раскрытия трещины при действии однородных внешних напряжений ($\partial u_{\infty}(x)/\partial x$) получаем из выражения (1.8). Выражение для производной раскрытия трещины, вызванного действием напряжений, смыкающих берега трещины и обусловленных присутствием связей ($\partial u_Q(x)/\partial x$), получим исходя из представления для производных перемещений берегов трещины при действии произвольных нагрузок на ее берегах [25].

Учитывая, что (см. выражение (1.8)):

$$u_{\infty}(x) \sim \left(\frac{l-x}{l+x} \right)^{-i\beta} \quad (1.10)$$

представим усилия в связях $Q(x)$ в форме

$$Q(x) = q_y(x) - iq_x(x) = (p_y(x) - ip_x(x)) \left(\frac{l-x}{l+x} \right)^{-i\beta} \quad (1.11)$$

где функции $p_{y,x}(x)$ подлежат определению из решения задачи.

Заметим, что $q_y(x)$, $p_y(x)$ – четные, а $q_x(x)$, $p_x(x)$ – нечетные функции. Выражение для производных перемещений берегов трещин при действии произвольных нагрузок на ее берегах, приведенное в [25], после преобразований с учетом представлений (1.11) и симметрии искомых функций, принимает вид ([27, 28]):

$$\frac{\partial u_Q(x)}{\partial x} = A(1-\alpha)(q_x(x) + iq_y(x)) - \frac{2A(1+\alpha)}{\pi\sqrt{l^2-x^2}} \left(\frac{l-x}{l+x} \right)^{-i\beta} \times \quad (1.12)$$

$$\times \int_{l-d}^l \frac{\sqrt{l^2-\xi^2}}{\xi^2-x^2} (xp_y(\xi) - i\xi p_x(\xi)) d\xi$$

Подставим выражения (1.5)–(1.8) и (1.12) в (1.9) и, после перехода к безразмерным переменным

$$s = x/l, \quad t = \xi/l, \quad q_{y,x}(s) = q_{y,x}(x)/\sigma_0, \quad p_{y,x}(s) = p_{y,x}(x)/\sigma_0 \quad (1.13)$$

и преобразований, получаем систему нелинейных интегродифференциальных урав-

нений (СИДУ) относительно неизвестных функций $p_y(s)$ и $p_x(s)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} [\gamma_1(s, \sigma) q_y(s) - i\gamma_2(s, \sigma) q_x(s)] - \frac{\pi \varepsilon (1 - \alpha)}{2(1 + \alpha)} (q_x(s) + iq_y(s)) + \\ & + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - s^2}} \left(\frac{1 - s}{1 + s} \right)^{-i\beta} \int_{1-d/l}^1 R(s, t) [s p_y(t) - i t p_x(t)] dt = \frac{\pi \varepsilon \sqrt{\alpha}}{(1 + \alpha) \sqrt{1 - s^2}} (2\beta i - s) \left(\frac{1 - s}{1 + s} \right)^{-i\beta} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ядро $R(s, t)$ интегрального оператора в (1.14) имеет вид

$$R(s, t) = \frac{\sqrt{1 - t^2}}{t^2 - s^2} \quad (1.15)$$

Параметр ε в уравнении (1.14) определяется так

$$\varepsilon = \frac{2AE_B(1 + \alpha)}{\pi c_0} = \frac{E_B l}{2\pi H} \left(\frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right) \quad (1.16)$$

где c_0 – относительная податливость связей (см. (1.7)).

Параметр ε характеризует отношение податливости участка соединения материалов, содержащего трещину без связей, к податливости связей в концевой области трещины.

В уравнении (1.14) и далее в работе все функции безразмерных переменных s и t также являются безразмерными.

2. Коэффициенты интенсивности напряжений и энергетические характеристики для трещины со связями. Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) K_I и K_{II} при наличии связей в концевой области трещины на границе соединений материалов определяем так

$$K_I + iK_{II} = (K_I^{\text{ext}} + K_I^{\text{int}}) + i(K_{II}^{\text{ext}} + K_{II}^{\text{int}}), \quad (2.1)$$

где $K_{I,II}^{\text{ext}}$ – КИН от действия внешних напряжений, $K_{I,II}^{\text{int}}$ – КИН от действия напряжений, возникающих в концевой области трещины.

КИН $K_{I,II}^{\text{ext}}$ при действии внешних напряжений σ_0 определяется выражением [26]:

$$K_I^{\text{ext}} + iK_{II}^{\text{ext}} = \sigma_0 (1 + 2i\beta) (2l)^{-i\beta} \sqrt{\pi l} \quad (2.2)$$

Выражения для КИН $K_{I,II}^{\text{int}}$ определяются исходя из распределений напряжений на продолжении трещины ($x > l$), вызванных усилиями в связях.

Для трещины, расположенной на границе соединения материалов, значения КИН $K_{I,II}$ связаны с распределением напряжений на ее продолжении [29]:

$$K_I + iK_{II} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\delta} (\sigma_{yy}(\delta) + i\sigma_{xy}(\delta)) \delta^{-i\beta} \quad (2.3)$$

где $\sigma_{yy}(\delta)$, $\sigma_{xy}(\delta)$ – напряжения на продолжении трещины, l – полудлина трещины, $\delta = x - l$ – расстояние до вершины трещины, $x \geq l$.

Используя для вычисления $K_{I,II}^{\text{int}}$ формулу (2.3) и выражения для напряжений за вершиной трещины [25], получим [27, 28]:

$$K_I^{\text{int}} + iK_{II}^{\text{int}} = - \frac{\text{ch}(\pi\beta)}{(2l)^{0.5+i\beta}} \sqrt{\frac{2+l}{\pi}} \int_{-l}^l \left(\frac{l+\xi}{l-\xi} \right)^{0.5+i\beta} (q_y(\xi) + iq_x(\xi)) d\xi \quad (2.4)$$

Преобразуя это соотношение с учетом условия (1.11) и подставляя вместе с (2.2) в (2.1), получим [28]:

$$K_I + iK_{II} = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi l}}{(2l)^{\beta}} \left[\left(1 - \frac{2 \operatorname{ch}(\pi\beta)}{\pi} \int_{1-d/l}^1 \frac{p_y(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) + i \left(2\beta - \frac{2 \operatorname{ch}(\pi\beta)}{\pi} \int_{1-d/l}^1 \frac{tp_x(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) \right] \quad (2.5)$$

Наличие связей в концевой области трещины приводит к снижению КИН, зависящему от свойств связей и размера концевой области трещины. Для количественной характеристики этого эффекта будем использовать относительные значения КИН

$$K_r(d/l) = K_B / K_0, \quad K_B = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}, \quad K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi l (1 + 4\beta^2)} \quad (2.6)$$

где K_B – модуль КИН при наличии связей в концевой области трещины и K_0 – модуль КИН от действия внешних нагрузок.

Выражение для скорости высвобождения энергии деформации для трещины, расположенной на границе различных материалов (см. [30, 31]), остается справедливым и при наличии связей в концевой области трещины, так как влияние связей выражается в приложении нагрузок $q_y(x)$ и $q_x(x)$ к берегам трещины в ее концевой области. Таким образом, независимо от формы закона деформирования связей, скорость высвобождения энергии деформации определяется выражением (модуль КИН K_B определяется из (2.6)):

$$G_{\text{тр}}(d, l) = \left(\frac{k_1 + 1}{\mu_1} + \frac{k_2 + 1}{\mu_2} \right) \frac{K_B^2}{16 \operatorname{ch}(\pi\beta)} \quad (2.7)$$

Введем теперь скорость потребления энергии деформации связями в концевой области трещины:

$$G_{\text{bond}}(d, l) = \partial U_{\text{bond}}(d, l) / b \partial l \quad (2.8)$$

$$U_{\text{bond}}(d, l) = b \int_{l-d}^l \phi(u) dx, \quad \phi(u) = \int_0^{u_y(x)} q_y(u_y) du_y + \int_0^{u_x(x)} q_x(u_x) du_x$$

где b – толщина тела, $U_{\text{bond}}(d, l)$ – работа по деформированию связей, $\phi(u)$ – плотность энергии деформации связей в концевой области трещины.

Дифференцирование в (2.8) выполняется по верхнему пределу интегрирования в выражении для работы по деформированию связей $U_{\text{bond}}(d, l)$, что соответствует предположению об увеличении размера концевой области только за счет продвижения вершины трещины. Предположению об изменении размера концевой области трещины при одновременном продвижении вершины трещины и разрыве связей на краю концевой области ($x_0 = l - d$) соответствует дифференцирование в (2.8) по верхнему и нижнему пределам интегрирования. В таком случае возможно выполнение условия автономности концевой области трещины.

Из выражений (2.8) с учетом того, что $u_y(l) = u_x(l) = 0$, получим

$$G_{\text{bond}}(d, l) = b \int_{l-d}^l \frac{\partial u_y(x)}{\partial l} q_y(u_y) dx + \int_{l-d}^l \frac{\partial u_x(x)}{\partial l} q_x(u_x) dx \quad (2.9)$$

Выражение для производной нормального раскрытия трещины получим с учетом

представления (1.7):

$$\frac{\partial u_y(t)}{\partial t} = c_0 \frac{\sigma_0}{E_B} \left[\gamma_1(t, \sigma) q_1(t) - r \gamma_1(t, \sigma) \frac{\partial q_1(t)}{\partial t} - t q_1(t) \frac{\partial \gamma_1(t, \sigma)}{\partial t} \right] \quad (2.10)$$

Выражение для производной раскрытия трещины в касательном направлении имеет аналогичную форму.

Состоянию предельного равновесия вершины трещины соответствует выполнение условия

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial l} = -\frac{\partial}{\partial l} \left[\int_V w(\epsilon_{ij}) dV - \int_{S_e} f_i u_i ds \right] - \frac{\partial}{\partial l} \int_{S_i} \phi(u) ds = 0 \quad (2.11)$$

где Π – потенциальная энергия деформации, $w(\epsilon_{ij})$ – плотность энергии деформации в объеме тела V ; ϵ_{ij} – тензор деформаций; f_i , u_i – силы и перемещения, заданные на внешней поверхности тела S_e ; S_i – поверхность концевой области трещины.

Первые два слагаемых в (2.11) представляют собой скорость высвобождения энергии деформации при образовании новой поверхности трещины (см. (2.7)), а последнее слагаемое определяет скорость потребления энергии деформации связями (см. (2.8)).

Таким образом, состоянию предельного равновесия соответствует выполнение условия

$$G_{\text{tip}}(d, l) = G_{\text{bond}}(d, l) \quad (2.12)$$

Условие (2.12) является необходимым, но недостаточным для состояния предельного равновесия трещины с концевой областью. Для определения предельного равновесия вершины трещины и концевой области необходимо рассмотрение дополнительного критического условия. В качестве такого дополнительного условия выберем условие предельного раскрытия трещины. Будем полагать, что разрыв связей на краю концевой области ($x_0 = l - d$) происходит при выполнении условия

$$u(x_0) = [u_x^2(x_0) + u_y^2(x_0)]^{1/2} = u_{\text{cr}} \quad (2.13)$$

где u_{cr} – предельная длина связи.

Совместное решение уравнений (2.12), (2.13) (если оно существует) позволяет (при заданных длине трещины и характеристиках связей) определить критическую внешнюю нагрузку σ_0^m и размер концевой области d_{cr} для состояния предельного равновесия вершины трещины и края концевой области. Скорость потребления энергии деформации $G_{\text{bond}}(d_{\text{cr}}, l)$, полученная из этого решения, является энергетической характеристикой сопротивления адгезионному разрушению, $G_{\text{cr}} = G_{\text{bond}}(d_{\text{cr}}, l)$. Заметим, что величина G_{cr} не остается постоянной при изменении длины трещины.

Для заданных размеров трещины и концевой области, используя критические значения u_{cr} и G_{cr} , можно выделить режимы равновесия и роста трещины при монотонном нагружении.

При выполнении для заданного размера концевой области d условий

$$G_{\text{tip}}(d, l) \geq G_{\text{cr}}, \quad u(l-d) < u_{\text{cr}} \quad (2.14)$$

происходит продвижение вершины трещины с одновременным возрастанием длины концевой области без разрыва связей. Этот этап роста трещины можно рассматривать как процесс приспособляемости к заданному уровню внешних нагрузок. Продвижение вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой области происходит при одновременном выполнении первого из условий (2.14) и

$$u(l-d) \geq u_{\text{cr}} \quad (2.15)$$

При выполнении условия (2.15) и условия

$$G_{\text{ип}}(d, l) < G_{\text{кр}} \quad (2.16)$$

происходит разрыв связей без продвижения вершины трещины и размер концевой области сокращается, стремясь к предельному значению для данного уровня нагрузки. В рамках рассматриваемой модели положение концевой области и вершины трещины не меняется при одновременном выполнении второго из условий (2.14) и условия (2.16).

Таким образом, величина внешней нагрузки σ_0 и критические параметры $u_{\text{кр}}$, $G_{\text{кр}}$ определяют характер разрушения: продвижение вершины трещины с ростом концевой области; сокращение размера концевой области без продвижения вершины трещины; продвижение вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой области. Условие автономности концевой области [1,2] выполняется, если скорости разрыва связей согласно первому из условий (2.14) и условию (2.15) совпадают. Если же уравнение (2.12) не имеет решения, то приложение любой внешней нагрузки может вызвать продвижение вершины трещины, которое сопровождается разрывом связей на краю концевой области при выполнении условия (2.15).

Заметим, что при рассмотрении линейно-упругих связей выполнение условия (2.12) зависит только от относительных геометрических характеристик концевой области и трещины (H/l , d/l). Критическое значение размера концевой области, полученное из этого условия, может быть отнесено к трещине любой длины. Определение фактического размера трещины, соответствующего состоянию предельного равновесия, происходит при учете дополнительного условия (2.13). Этот факт является очевидным подтверждением недостаточности условия (2.12) для полного описания предельного равновесия трещины.

3. Методика численного решения. Уравнения (1.14) представляют собой систему нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядрами типа Коши и могут быть решены только численно. Для их решения используем коллокационную схему с кусочно-квадратичной аппроксимацией неизвестных функций. Если закон деформирования связей является нелинейным, то для определения усилий в связях используется итерационная схема, подобная методу упругих решений [32]. Преобразуем систему уравнений (1.14) к форме удобной для численного решения. Неизвестные функции $p_y(s)$ и $p_x(s)$ представим в форме

$$p_{y,x}(s) = f_{1,2}(s)\sqrt{1-s} \quad (3.1)$$

и выполним дифференцирование по переменной s в левой части уравнений (1.14). После соответствующих преобразований, умножения обеих частей уравнений на $(\sqrt{1-s})/\cos\varphi(s)$ и разделения действительных и мнимых частей, получим

$$T_{ij}(s, \sigma) \frac{df_j(s)}{ds} + W_{ij}(s, \sigma) f_j(s) + \varepsilon \int_{1-d/l}^1 G_{ij}(s, t) f_j(t) dt = Z_i(s) \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.2)$$

$$T_{ij}(s, \sigma) = (1-s)\gamma_i(s, \sigma)[\delta_{ij} + \lambda_{ij} \operatorname{tg}\varphi(s)] \quad (3.3)$$

$$W_{ij}(s, \sigma) = \gamma_i(s, \sigma) \left[\delta_{ij} \left(\frac{2\beta}{1+s} \operatorname{tg}\varphi(s) - \frac{1}{2} \right) - \lambda_{ij} \left(\frac{\operatorname{tg}\varphi(s)}{2} - \frac{2\beta}{1+s} \right) \right] - (1-s) \left[\frac{\pi\varepsilon(1-\alpha)}{2(1+\alpha)} (\delta_{ij} \operatorname{tg}\varphi(s) - \lambda_{ij}) - \frac{d\gamma_i(s, \sigma)}{ds} (\delta_{ij} + \lambda_{ij} \operatorname{tg}\varphi(s)) \right] \quad (3.4)$$

$$G_{ij}(s, t) = \frac{H(s, t)}{\sqrt{1+s}} [s(2-j) + t(j-1)] (\delta_{ij} + \lambda_{ij} \operatorname{tg}\varphi(s)), \quad H(s, t) = \frac{(1-t)\sqrt{1+t}}{t^2 - s^2} \quad (3.5)$$

$$Z_i(s) = \frac{\pi \varepsilon \sqrt{\alpha}}{(1 + \alpha) \sqrt{1 + s}} [(2\beta \cdot \operatorname{tg} \varphi(s) - s)(2 - i) - (2\beta + s \cdot \operatorname{tg} \varphi(s))(i - 1)] \quad (3.6)$$

$$\lambda_{ij} = (1 - \delta_{ij}) \cdot \operatorname{sgn}(i - j) \quad (3.7)$$

Будем полагать, что закон деформирования связей является линейным при $u \leq u_m$. Первый шаг итерационного процесса состоит в решении уравнения (3.2) для линейно-упругих связей. Последующие итерации выполняются в том случае, если на части концевой области трещины $u(x) > u_m$. На каждой такой итерации решается уравнение (3.2) для квазиупругих связей вида (1.5) с эффективной податливостью, переменной вдоль концевой области трещины и зависящей от величины модуля вектора усилий в связях, полученного на предыдущем шаге решения. Вычисление эффективной податливости выполняется подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [33]. Процесс последовательных приближений заканчивается, когда усилия в связях, полученные на двух последовательных итерациях, мало отличаются друг от друга.

Для дискретизации уравнения (3.2) разместим на отрезке, содержащем связи в концевой области трещины, M узловых точек с координатами:

$$s_n = \lambda + h(n - 1) \quad (n = 1, 2, \dots, M) \quad (3.8)$$

$$M = 2N + 1, \quad N \geq 1, \quad \lambda = 1 - d/l, \quad h = d/((M - 1)l) \quad (3.9)$$

На отрезке $\lambda \leq s \leq 1$ каждые последовательные три узла с номерами $2k-1, 2k, 2k+1$ ($k = 1, 2, \dots, N$) будем рассматривать как одномерный квадратичный изопараметрический конечный элемент с параметрическими координатами в пределах элемента ($|\eta| \leq 1$):

$$\eta(s) = -1 + (s - s_{2k-1})/h \quad (3.10)$$

Неизвестные функции $f_j(s)$ аппроксимируем разложением по кусочно-непрерывным квадратичным полиномам. Аналогичные представления используем также для аппроксимации функций $\gamma_{1,2}(s, \sigma)$ и вычисления координат произвольной точки на элементе $s^{(k)}(\eta)$.

Для элемента с номером k имеем

$$\begin{Bmatrix} f_j^{(k)}(\eta) \\ \gamma_j^{(k)}(\eta, \sigma) \\ s^{(k)}(\eta) \end{Bmatrix} = N_m(\eta) \begin{Bmatrix} f_{j,n} \\ \gamma_{j,n} \\ s_n \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

где $n = 2(k-1) + m$ ($m = 1, 2, 3$) – номера узлов в пределах элемента, $f_{j,n}$ – неизвестные значения функций $f_j(s)$ в узлах элемента, $\gamma_{j,n}$ – значения функций $\gamma_{1,2}(s, \sigma)$ в узлах элемента, $N_m(\eta)$ – базисные функции одномерного квадратичного элемента

$$N_1(\eta) = -0.5\eta(1 - \eta), \quad N_2(\eta) = 1 - \eta^2, \quad N_3(\eta) = 0.5\eta(1 + \eta) \quad (3.12)$$

В (3.2), (3.11) и везде ниже по повторяющимся индексам выполняется суммирование.

Выражения для производных функций $f_j(s)$ на элементе имеют вид:

$$\frac{df_j^{(k)}(s)}{ds} = \frac{dN_m(\eta)}{d\eta} \frac{f_{j,2(k-1)+m}}{J_m^k(\eta)} \quad (3.13)$$

где $J_m^k(\eta) = h$ при выборе координат узлов согласно (3.9).

Производные функций $f_j(s)$ в узлах элемента представим с учетом выражений (3.11)–(3.13). Предварительно заметим, что для узлов с четными номерами $n = 2k$

(k – номер элемента) производная в узловой точке s_n однозначно определяется из (3.13). Для узлов с нечетными номерами (кроме первого и последнего) выражение (3.13) дает в узле с номером n два значения производной каждой функции, соответствующих элементам с номерами $(n-1)/2$ и $(n+1)/2$. Будем полагать, что производные функций $f_j(s)$ непрерывны на стыках элементов (в нечетных узловых точках). При таком предположении выражения для производных функций $f_j(s)$ в узлах элемента с номером k принимают вид:

$$\left. \frac{df_j^{(k)}(s)}{ds} \right|_{s=s_n} = \sum_{m=1}^3 D_{m,n}^{(k)} f_{j,2(k-1)+m} \quad (3.14)$$

$$D_{m,n}^{(k)} = \delta_{k,n/2} L_{2,m} + \alpha (\delta_{k,(n-1)/2} L_{3,m} + \delta_{k,(n+1)/2} L_{1,m}) \quad (3.15)$$

где $m = 1, 2, 3$ – номера узлов в пределах элемента, n – номер узла, $\delta_{k,n/2}$, $\delta_{k,(n-1)/2}$, $\delta_{k,(n+1)/2}$ – символы Кронекера, $\alpha = 0.5$ при $n \neq 1$ и $n \neq M$ и $\alpha = 1$ при $n = 1$ или $n = M$.

Элементы матрицы $L_{i,m}$ в (3.15) имеют вид

$$[L] = \frac{1}{h} \begin{vmatrix} -1.5 & 2.0 & -0.5 \\ -0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & -2.0 & 1.5 \end{vmatrix} \quad (3.16)$$

Вычисление производных функций $\gamma_j(s, \sigma)$ выполняется аналогично.

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных узловых значений функции $f_j(s_n)$. Перед решением системы выполняется учет граничных условий при $s_n = 1$: $f_{1,2}(s_n) = 0$ (это соответствует условию $u_{y,x}(s_n) = 0$).

Рассмотрим вычисление интегралов в дискретном представлении (3.2). Интегрирование выполняется в параметрических координатах элемента $|\eta| \leq 1$, а каждый из интегралов имеет вид

$$I_{ij,m}^{(k)}(s_n) = \int_{-1}^{+1} G_{ij}(s_n, t^{(k)}(\eta)) N_m(\eta) J^{(k)}(\eta) d\eta \quad (3.17)$$

где k – номер элемента, $m = 1, 2, 3$ – номера узлов элемента.

Ядро в интеграле (3.17) имеет вид

$$G_{ij}(s, t) = U_{ij}(s, t) H(s, t) \quad (3.18)$$

где $U_{ij}(s, t)$ – гладкие функции, а функция $H(s, t)$ имеет особенность при $s = t$ (см. 3.5). Интегрирование в (3.17) выполняется с учетом указанной особенности функции $H(s, t)$ и рассматриваются два случая расположения узловой точки s_n : (а) точка s_n расположена вне элемента, по которому выполняется интегрирование; (б) точка s_n принадлежит элементу, по которому выполняется интегрирование. В первом случае функции в (3.17) являются ограниченными и интегрирование выполняется по квадратурным формулам Гаусса. Во втором случае выполняется регуляризация подынтегральной функции [34], позволяющая определить главное значение интеграла. Пусть $e = 1, 2, 3$ локальные номера узловой точки s_n на элементе с номером k . Согласно известному свойству функций формы: $N_m(\xi_e) = \delta_{m,e}$. Ввиду этого, регуляризация выполняется только для тех узлов элемента, содержащего узловую точку s_n , для которых номер функции формы совпадает с локальным номером узловой точки ($m = e$). Для узловых точек s_n с четными номерами ($n/2 = k$, $m = 2$) для интеграла (3.17) после регуляризации

получим

$$I_{ij,2}^{(k)}(s_n) = \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(s_n, t^{(k)}(\eta)) - \phi(s_n, s_n)}{t^{(k)}(\eta) - s_n} N_2(\eta) J^{(k)}(\eta) d\eta, \quad (3.19)$$

$$\phi(s_n, t^{(k)}(\eta)) = \frac{(1 - t^{(k)}(\eta))\sqrt{1 + t^{(k)}(\eta)}}{t^{(k)}(\eta) + s_n} U_{ij}(s_n, t^{(k)}(\eta)) \quad (3.20)$$

$$\phi(s_n, s_n) = \frac{(1 - s_n)\sqrt{1 + s_n}}{2s_n} U_{ij}(s_n, s_n) \quad (3.21)$$

Узловые точки с нечетными номерами n принадлежат одновременно двум соседним элементам с номерами $k_1 = (n-1)/2$ и $k_2 = (n+1)/2$. Параметрическое представление координаты на этих элементах $t_1(\eta) \equiv t^{(k_1)}(\eta)$ и $t_2(\eta) \equiv t^{(k_2)}(\eta)$ соответственно. Сумма интегралов по соседним элементам ($m=1$ и $m=3$) после регуляризации принимает вид:

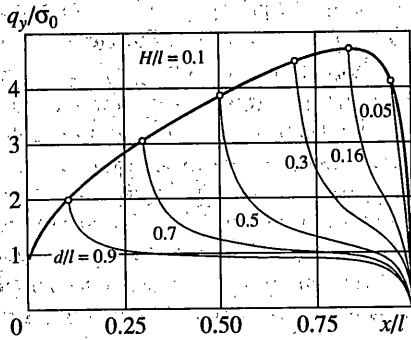
$$I_{ij,3}^{(k_1)}(s_n) + I_{ij,1}^{(k_2)}(s_n) = \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(s_n, t_1(\eta)) - \phi(s_n, s_n)}{t_1(\eta) - s_n} N_3(\eta) J^{(k_1)}(\eta) d\eta + \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(s_n, t_2(\eta)) - \phi(s_n, s_n)}{t_2(\eta) - s_n} N_1(\eta) J^{(k_2)}(\eta) d\eta \quad (3.22)$$

где функции $\phi(\dots)$ определяются выражениями (3.20) и (3.21). Выражения (3.19) и (3.22) не содержат особенности в подынтегральной функции и вычисляются по квадратурным формулам Гаусса. Для повышения точности вычисления интегралов после регуляризации выполняется квадратичное преобразование параметрических координат, позволяющее разместить узлы гауссовых точек вблизи узловой точки s_n , причем для узлов с четными номерами интеграл предварительно разделяется на сумму двух интегралов по подэлементам $(-1, 0)$ и $(0, +1)$. Логарифмическое слагаемое в (3.22) отсутствует ввиду эквидистантного расположения узловых точек.

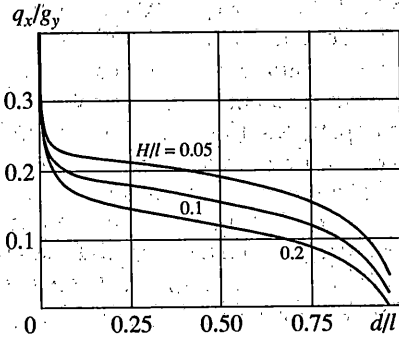
4. Анализ модели трещины со связями. Анализ модели трещины со связями в концевой области сводится к параметрическому исследованию решения СИДУ (1.14) при различных законах деформирования связей, размерах концевой области трещины и упругих постоянных материалов. Непосредственно из решения СИДУ (1.14) определяются нормальные и касательные усилия в связях. Раскрытие трещины в пределах концевой области определяется согласно (1.5), а значения КИН, скоростей высвобождения и поглощения энергии определяются из выражений (2.6), (2.7) и (2.11).

Для определенности положим, что существует значение раскрытия трещины u_m такое, что при $u \leq u_m$ соотношение (1.5) соответствует упругому деформированию с постоянной вдоль концевой области трещины податливостью связей, а при $u > u_m$ это соотношение описывает нелинейную часть кривой деформирования связей. Положим также, что внешняя нагрузка и параметры связей таковы, что на всей концевой области выполняется условие $u \leq u_m$, и рассмотрим распределения усилий в связях и раскрытия трещины при упругом законе деформирования связей. С одной стороны, эти результаты интересны как первый шаг в анализе модели концевой области трещины на границе соединения материалов, а с другой стороны, анализ модели при линейном законе деформирования связей необходим, так как является первым этапом итерационного решения СИДУ (1.14).

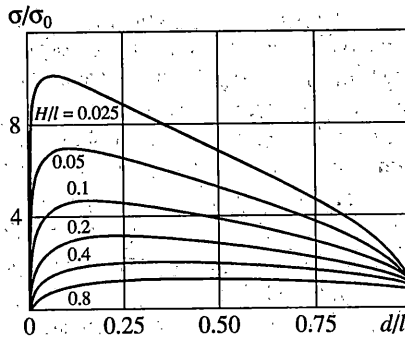
При линейном законе деформирования связей и заданном относительном размере концевой области d/l распределение напряжений вдоль концевой области трещины определяется параметрами ε (см. (1.14)) и β (см. (1.8)), содержащими все основные характеристики рассматриваемой модели. При заданных значениях упругих постоян-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ных материалов подобластей и связей, распределение напряжений зависит только от величины относительной податливости связей $c_0 = H/l$.

Приведенные ниже результаты получены, если специально не оговорено, при следующих постоянных материалов: модули упругости $E_1 = 135$ ГПа, $E_2 = 25$ ГПа, коэффициенты Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.35$, модуль упругости связей $E_B = E_2$. При выбранных значениях постоянных материалов: $\beta = -0.0509313$. Податливости связей в нормальном и касательном направлениях полагались равными и постоянными вдоль концевой области трещины, $\gamma_{1,2}(s) = 1$ (см. формулу (1.6)).

4.1. *Усилия в связях и раскрытие трещины.* На фиг. 2 приведены распределения нормальных усилий в связях (q_y/σ_0) вдоль концевой области трещины ($(H/l) = 0.1$) для различных относительных размеров концевой области (d/l), а также огибающая всех таких кривых при $0 < d/l < 1$. Усилия в связях всегда максимальны на краю области ($s = (d/l)$) при постоянной вдоль концевой области податливости связей, причем при определенном размере концевой области $s_m = (d_m/l)$ этот максимум достигает абсолютного значения. При снижении относительной податливости связей положение этого абсолютного максимума смещается в сторону меньших значений $s_m = (d_m/l)$, а его абсолютная величина возрастает. Например, при $(H/l) = 0.1$ этот максимум достигается при $s_m = (d_m/l) \approx 0.158$ и составляет $(q_y/\sigma_0) = 4.66$ (фиг. 2), а при $(H/l) = 0.025 - s_m = (d_m/l) \approx 0.0682$ и $q_y/\sigma_0 = 9.807$. Ввиду различия упругих постоянных материалов, окружающих трещину, в связях возникают заметные касательные усилия даже при действии нормальных внешних нагрузок. Характер изменения касательных усилий вдоль концевой области подобен изменению нормальных усилий, но абсолютные значения этой составляющей усилий существенно ниже, а максимальные значения достигаются при меньших размерах концевой области. Например, при

$(H/l) = 0.1$ этот максимум достигается при $s_m = (d_m/l) \approx 0.102$ и составляет $q_x/\sigma_0 = 0.876$, а при $(H/l) = 0.025 - s_m = (d_m/l) \approx 0.0537$ и $q_x/\sigma_0 = 2.568$. Представление об изменении отношения q_x/q_y на краю концевой области дает фиг. 3, на котором представлены зависимости этой величины от относительного размера концевой области трещины ($0 < d/l < 1$) при $(H/l) = 0.05; 0.10; 0.20$. При уменьшении размера концевой области касательные усилия в связях существенно возрастают, а их значения становятся сравнимыми со значениями нормальных усилий. Зависимости модуля вектора усилий на краю концевой области (фактически, это коэффициенты концентрации напряжений (ККН) на крайней связи, σ/σ_0) от относительного размера концевой области (d/l) при различных значениях относительной податливости связей (H/l) приведены на фиг. 4. При $(H/l) \rightarrow 0$ ($\epsilon \rightarrow \infty$) положение максимума модуля вектора усилий смещается к $s_m = (d_m/l) \rightarrow 0$ и $(\sigma/\sigma_0) \rightarrow \infty$ (связи большой жесткости). При относительно мягких связях максимум на фиг. 4 выражен слабо и усилия на краю концевой области слабо изменяются при изменении ее размера.

Ввиду прямой пропорциональности между компонентами перемещений и усилий, распределения составляющих раскрытия трещины аналогичны распределениям усилий. Размер концевой области, $s_m = (d_m/l)$, при котором достигается абсолютный максимум раскрытия трещины, совпадает с соответствующим значением для усилий, но при снижении относительной податливости связей его абсолютная величина уменьшается [27]. Например, при $(H/l) = 0.1$ этот максимум для нормальной компоненты раскрытия трещины составляет $(u_y/u_0) = 0.27$, а для касательной $-(u_x/u_0) = 0.0427$, а при $H/l = 0.025$ имеем $(u_y/u_0) = 0.123$ и $(u_x/u_0) = 0.0313$, соответственно. При $(H/l) \rightarrow \infty$ ($\epsilon \rightarrow 0$, мягкие связи) положение максимума раскрытия трещины смещается к $s_m = (d_m/l) \rightarrow 1$ (здесь $u_0 = u_\infty(0)$, см. (1.8)).

Рассмотрим влияние величин модулей упругости материалов и связей на концентрацию напряжений в последней связи (на краю концевой области). Из выражения (1.16) видно, что возрастание модуля упругости связей ведет к возрастанию параметра ϵ и, соответственно, росту ККН (при фиксированных упругих постоянных материалов). Возрастание податливости одного из материалов ($E_1/E_2 \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow \infty$) также приводит к увеличению ККН. Такое изменение ККН связано с тем, что при $E_2 = E_B = \text{const}$ следствием возрастания податливости первого материала является увеличение раскрытия трещины и, для сдерживания такого раскрытия, усилия в связях значительно возрастают. При возрастании относительной жесткости материалов ($E_1/E_2 \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow (E_B/(k_2 + 1))/2\pi H\mu_2$) усилия в крайней связи (ККН) снижаются и стремятся к некоторой величине, определяемой значением параметра ϵ . Если жесткость одного из материалов существенно увеличивается, то уменьшение раскрытия трещины приводит к снижению сдерживающих это раскрытие усилий в связях.

Изменение упругих свойств материалов приводит не только к изменению параметра ϵ , но и к изменению биупругой постоянной β (см. (1.8)). Отметим, что $-0.175 \leq \beta \leq 0.175$ и $\beta = 0$ соответствует однородному телу или несжимаемым материалам ($\nu_1 = \nu_2 = 0.5$) с различными модулями упругости. Возрастание абсолютной величины параметра β приводит к увеличению эффектов, связанных со сдвиговыми деформациями. Для анализа влияния величины β на распределение усилий в связях проведены расчеты при фиксированном значении параметра ϵ . Полагая $\nu_1 = \nu_2 = 0$ (при таком выборе коэффициентов Пуассона зависимость от параметра β проявляется наиболее сильно), имеем

$$\epsilon = \frac{4E_B l}{\pi H} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \quad (4.1)$$

При $E_1 = E_2 = E_B = 25$ ГПа и $H/l = 0.1$ получаем $\epsilon = 23.465$. Далее, изменим отношение модулей упругости материалов так, чтобы значение параметра ϵ оставалось

θ	$ \beta $	σ/σ_0	q_y/σ_0	q_x/σ_0
1	0	6.888	6.888	0
2	0.0533512	6.827	6.651	1.556
5	0.1103178	6.626	5.915	2.998
10	0.1383117	6.489	5.436	3.581
50	0.1666333	6.314	4.840	4.067
100	0.1706748	6.295	4.798	4.128
1000	0.1744259	6.271	4.722	4.182

постоянным. Пусть $\theta = E_1/E_2$, где E_1, E_2 – новые значения модулей упругости материалов, тогда при заданном значении θ определим E_1 и E_2 :

$$E_1 = 0.5E_B(1+\theta), \quad E_2 = 0.5E_B(1+\theta)/\theta \quad (4.2)$$

Такой выбор модулей упругости материалов сохраняет значение параметра ϵ постоянным. Значения абсолютных максимумов модуля вектора усилий и его компонент для различных значений параметров θ и β ($H/l = 0.1, E_B = 25$ ГПа) приведены в таблице. Анализ численных результатов позволяет установить, что с увеличением параметра θ ($1 \leq \theta \leq 1000$) происходит перераспределение компонент усилий: касательные усилия в связях существенно возрастают, а нормальные снижаются. При $\theta \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0.175$) нормальные и касательные компоненты усилий сравнимы по величине, а их относительные изменения незначительны.

Рассмотрим влияние нелинейной части кривой деформирования связей на напряженное состояние в концевой области трещины. Нелинейный участок кривой деформирования связей при $u(x) > u_m$ будем представлять монотонной убывающей или возрастающей функцией, форма которой зависит от типа и свойств связей в концевой области трещины. Отметим, что параметр u_m не является постоянным и зависит, в частности, от свойств связей и размера трещины. Будем исходить из критерия предельной вытяжки связей (2.13), т.е. разрыв связи происходит при достижении ею предельной вытяжки u_{cr} . Этому значению вытяжки связи соответствует натяжение связи σ_{cr} , причем, в зависимости от типа связей, эта величина может быть и равна нулю. Простейшую кривую такого рода можно представить в форме билинейной зависимости, восходящий участок которой соответствует упругому деформированию связей ($0 < u(x) \leq u_m$) с максимальным натяжением связи

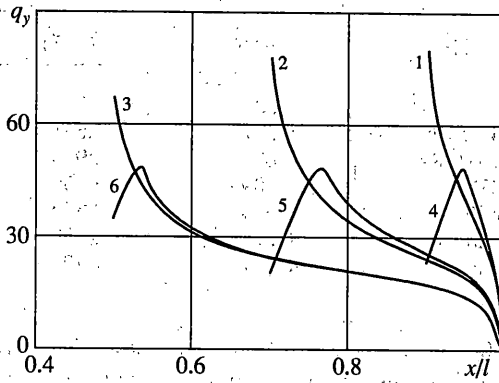
$$\sigma_m = u_m/c_B(x) \quad (4.3)$$

где $c_B(x) = c_y(x) = c_x(x)$ – эффективная податливость связей в точке концевой области с координатой x .

При $u(x) > u_m$ закон деформирования описывается линейной зависимостью, определяемой точками (u_m, σ_m) и (u_{cr}, σ_{cr}) , причем при $\sigma_{cr} < \sigma_m$ имеем убывающую (разупрочнение связей при возрастании раскрытия трещины), а при $\sigma_{cr} \geq \sigma_m$ – возрастающую линейную зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей). Пусть $k_B(x) = 1/c_B(x)$ – жесткость связей, тогда билинейная зависимость между натяжением связи $\sigma(x)$ и ее вытяжкой $u(x)$ может быть представлена так:

$$\sigma(u) = \begin{cases} k_B(x)u(x), & 0 \leq u(x) \leq u_m \\ \sigma_{cr} + \frac{\sigma_m - \sigma_{cr}}{u_{cr} - u_m}(u_{cr} - u(x)), & u_m < u(x) \leq u_{cr} \end{cases} \quad (4.4)$$

Если податливости упругих связей $c_{x,y}(x)$ изменяются вдоль концевой области трещины, то эффективная податливость $c_B(x)$ также является переменной, что соответ-



Фиг. 5

вует изменению закона деформирования связей вдоль концевой области трещины. Подобным образом можно построить и степенные зависимости, описывающие закон деформирования связей [35].

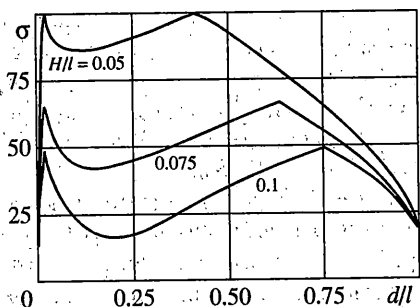
Рассмотрим результаты расчета усилий и раскрытия в концевой области трещины при билинейной кривой деформирования связей для трещины длины $2l = 10^{-3}$ м. Предельную вытяжку связей оценим в предположении, что один из материалов соединения — полимер ($E_2 = 25$ ГПа), а связи в концевой области трещины образованы цепями полимерных молекул с индексом полимеризации N и размером мономерного звена a_0 . Максимальная длина полимерной цепи в таком случае $L = Na_0$. С учетом этого можно предположить, что $u_{cr} \sim Na_0$. Пусть $N = 400$, $a_0 = 0.5 \cdot 10^{-9}$ м. Тогда $u_{cr} = 2 \cdot 10^{-7}$ м. Будем полагать, что изменение закона деформирования связей происходит при $u_m = 10^{-7}$ м, а $\sigma_{cr}/\sigma_m = 2$. Натяжение связи σ_m , соответствующее раскрытию трещины, равному u_m , зависит от относительной податливости связей $c_0 = (H/l)$. Например, при $c_B = c_X = c_Y = \text{const}$ (см. (1.6)) и $c_0 = 0.1$, получаем $c_B = c_0(l/E_B) = 2 \cdot 10^{-9}$ МПа $^{-1}$, $\sigma_m = 50$ МПа.

На фиг. 5 приведены распределения нормальных усилий в связях (q_y , МПа) вдоль концевой области трещины при внешней нагрузке $\sigma_0 = 17.5$ МПа и $c_0 = 0.1$ (кривые 1, 2, 3 — для линейных связей при $(d/l) = 0.1, 0.3, 0.5$; а кривые 4, 5, 6 — для билинейной кривой деформирования связей (4.4) и соответствующих значений (d/l)). При возрастании размера концевой области уровень упругих напряжений в связях снижается и, соответственно, уменьшается зона нелинейного деформирования связей.

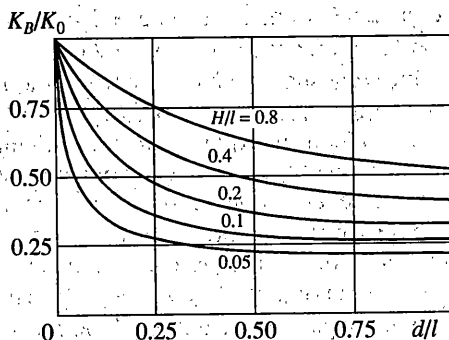
При заданных внешней нагрузке и размере концевой области трещины размер зоны нелинейного деформирования связей зависит от относительной податливости $c_0 = H/l$ линейного участка кривой деформирования, т.к. при уменьшении параметра c_0 упругие напряжения в связях возрастают, что приводит к увеличению зоны нелинейной деформации связей.

Изменение параметра $\varepsilon = (u_{cr}/u_m)$ оказывает заметное влияние на распределение усилий в зоне нелинейного деформирования связей. При $(u_{cr}/u_m) \rightarrow \infty$ распределение усилий в области, где $u(x) > u_m$ стремится к однородному $\sigma(x) \rightarrow \sigma_m$. Возрастание внешней нагрузки при фиксированных параметрах концевой области трещины и кривой деформирования связей приводит к увеличению зоны нелинейной деформации связей.

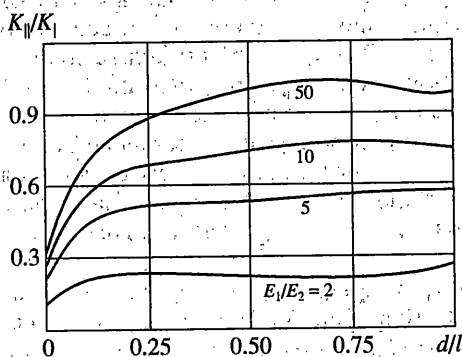
Зависимости модуля вектора усилий на краю концевой области (σ , МПа) от относительного размера концевой области d/l при $\sigma_0 = 17.5$ МПа и $H/l = 0.075, 0.05, 0.1$ приведены на фиг. 6. При линейном законе деформирования связей, как уже отмечено, усилия в связях всегда максимальны на краю концевой области. При использо-



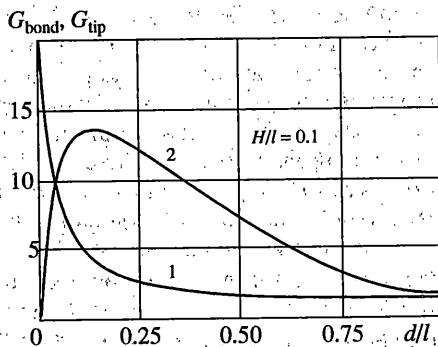
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

вании закона деформирования связей с нелинейной падающей ветвью именно в этой области происходит наиболее значительное перераспределение усилий и их величина достигает абсолютного минимума. Следует отметить, что раскрытие трещины на краю концевой области при нелинейном законе деформирования связей имеет, как и в случае линейных связей, абсолютный максимум, причем чем выше относительная податливость связей, тем значительнее увеличение раскрытия трещины.

4.2. Коэффициенты интенсивности напряжений и энергетические характеристики трещины. Рассмотрим влияние параметров связей в концевой области трещины на величину коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещины.

На фиг. 7 представлены зависимости относительного модуля КИН $K_r = K_B/K_0$ (коэффициента упрочнения) от размера концевой области трещины при различных значениях относительной податливости связей $c_0 = H/l$ (линейный расчет). При уменьшении параметра c_0 коэффициент упрочнения снижается, причем при малых значениях относительной податливости связей имеется зона слабого изменения коэффициента упрочнения и размер этой зоны возрастает при уменьшении параметра c_0 . При использовании билинейного закона деформирования связей (4.4) происходит незначительное возрастание коэффициента упрочнения в зоне нелинейного деформирования связей. Размер этой зоны легко оценить из фиг. 6.

Отношение КИН для касательных и нормальных напряжений (K_{II}/K_I) зависит от параметра β . Зависимости отношения K_{II}/K_I от размера концевой области трещины представлены на фиг. 8. Расчеты выполнены так же, как и при анализе касательных напряжений, при $\epsilon = 24.465$ и изменении относительной жесткости материалов согласно выражению (4.2). Отметим, что $K_{II}/K_I \rightarrow 2\beta$ при $d/l \rightarrow 0$ (отсутствие связей). Влияние сдвиговой составляющей КИН наиболее существенно при $d/l \geq 0.1$ и боль-

ших значениях параметров β и $\theta = E_1/E_2$. Увеличение этих параметров при фиксированных значениях параметров d/l и ϵ приводит к заметному возрастанию K_{II} (примерно линейно) и незначительному снижению K_I . В итоге модуль КИН возрастает примерно на 10% при изменении параметра θ ($1 \leq \theta \leq 1000$). Отметим, что величина модуля вектора усилий на краю концевой области при возрастании параметра β снижается (см. таблицу), однако происходящее при этом перераспределение напряжений в концевой области приводит к возрастанию модуля КИН и КИН K_{II} .

Рассмотрим влияние параметров связей на энергетические характеристики трещины. На фиг. 9 представлены зависимости скоростей высвобождения $G_{\text{tip}}(d, l)$ (кривая 1) и поглощения $G_{\text{bond}}(d, l)$ (кривая 2) энергии деформации связями от относительного размера концевой области, полученные в предположении, что связи деформируются линейно при любом уровне внешней нагрузки, ($H/l = 0.1$). Скорость высвобождения энергии деформации связана с модулем КИН выражением (2.7) и, соответственно, эта величина монотонно уменьшается при возрастании размера концевой области трещины и снижении относительной податливости связей. При малой податливости связей, как и при рассмотрении КИН, можно выделить зону относительно малого изменения скорости высвобождения энергии деформации (фиг. 9). Скорость потребления энергии деформации связями изменяется немонотонно, достигая максимального значения при определенной величине размера концевой области. Аналогичный факт отмечен также в [15] для трещины с концевой областью в однородном теле. При увеличении параметра ϵ (см. (1.16)) максимальное значение скорости потребления энергии деформации возрастает, а положение максимума смещается в сторону меньших значений d/l .

Рассмотрим, для примера, оценку параметров предельного равновесия трещины длины $2l = 10^{-3}$ м с концевой областью. Размер равновесной концевой области трещины определяется условием (2.12). Для случая $c_0 = H/l = 0.1$ это условие выполняется при $d_{\text{cr}}/l \approx 0.044$ (см. фиг. 9). Подчеркнем, что относительный размер концевой области, получаемый при рассмотрении линейных связей из условия (2.12), не зависит от длины трещины и внешней нагрузки и определяется только параметром ϵ . Определить критическую нагрузку σ_0^m и энергетическую характеристику сопротивления адгезионному разрушению $C_{\text{cr}} = G_{\text{bond}}(d_{\text{cr}}, l)$ для заданного размера трещины можно только при учете дополнительного условия (2.13). Наложение этого условия при $u(l-d_{\text{cr}}) = u_{\text{cr}} = 2 \cdot 10^{-7}$ м (предельная вытяжка полимерной цепи) позволяет получить значение критической нагрузки $\sigma_0 = \sigma_0^m = 25$ МПа и определить по формулам (2.6), (2.7) модуль КИН и скорость высвобождения энергии деформации: $K_0(d_{\text{cr}}) = 0.71$ МПа м^{1/2} и $G_{\text{tip}}(d_{\text{cr}}, l) = 10.2$ Дж/м². Так как при $d_{\text{cr}}/l \approx 0.044$ выполняется условие (2.12), то полученное значение G_{tip} является характеристикой адгезионного сопротивления материала и $G_{\text{cr}} = G_{\text{bond}}(d_{\text{cr}}, l) = 10.2$ Дж/м². Решение уравнения (2.12) при постоянных значениях H и u_{cr} и изменении длины трещины позволяет получить зависимость критической нагрузки от длины трещины [36].

Рассмотрим теперь результаты расчетов для билинейной кривой деформирования связей ($c_0 = 0.1$; $u_{\text{cr}}/u_m = 2$; $\sigma_{\text{cr}}/\sigma_m = 2$). Условие (2.12) в этом случае выполняется при $d_{\text{cr}}/l \approx 0.055$, а одновременное выполнение условия (2.13) для этого значения d_{cr}/l позволяет получить величину критической нагрузки $\sigma_0^m = 20$ МПа. Аналогично линейному случаю получаем модуль КИН и скорость высвобождения энергии деформации: $K_0(d_{\text{cr}}) = 0.56$ МПа м^{1/2}, $G_{\text{tip}}(d_{\text{cr}}, l) = G_{\text{cr}} = 6.37$ Дж/м². Как и следовало ожидать, разупрочнение связей приводит к снижению адгезионной прочности соединения.

Расчеты, выполненные для трещин различной длины при постоянных значениях H и u_{cr} , показывают, что при малых размерах трещины возможна ситуация, при которой уравнение (2.12) не имеет решения и $G_{\text{tip}}(d, l) > G_{\text{bond}}(d, l)$ при любом размере концевой области трещины. В этом случае продвижение вершины трещины происходит при

любом уровне внешних нагрузок (субкритический рост) и сопровождается разрывом связей при выполнении условия (2.15). Этот этап развития трещины происходит до достижения трещиной такой длины, при которой существует состояние предельного равновесия, т.е. относительная податливость связей c_0 достигает такого значения ($H = \text{const}$), при котором уравнение (2.12) имеет решение и возможно определить величину G_{cr} . С возрастанием длины трещины значение G_{cr} уменьшается и стремится к предельному значению, соответствующему макроскопической трещине.

При возрастании параметра H при фиксированной длине трещины (т.е. разупрочнении связей, возрастании относительной податливости) также возможна ситуация, при которой уравнение (2.12) не имеет решения, что соответствует возможности субкритического роста микротрещины. Аналогичная ситуация при рассмотрении микротрещины свидетельствует о слабой адгезии.

Таким образом, предложенная модель трещины позволяет оценить, исходя из микромеханических параметров связей, критическую нагрузку, адгезионное сопротивление материала для трещины заданного размера и выделить режимы равновесия и роста трещины на основе анализа условий (2.14)–(2.16).

5. Заключение. Модель трещины на границе соединения материалов со связями между берегами позволяет исследовать основные закономерности распределения усилий в связях при различных законах их деформирования, оценить эффекты упрочнения, вызванные присутствием связей в концевой области трещины, проводить анализ предельного равновесия трещины с учетом энергетического и кинематического критериев. Такой анализ позволил оценить предельный размер концевой области трещины, допустимую нагрузку и характеристики адгезионного сопротивления соединения, двух материалов. Подчеркнем, что модель дает возможность с единых позиций рассматривать процесс адгезионного разрушения, включая стадии зарождения дефекта, формирования и роста микро- и микротрещины.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 00-15-96066).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 434–444; Вып. 4. С. 706–721; Вып. 5. С. 893–900.
2. Баренблатт Г.И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–53.
3. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5. № 4. С. 391–401.
4. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. 1960. V. 8. No. 2. P. 100–108.
5. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
6. Huang N.C. On the size of the cohesive zone at the crack tip // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. V. 52. No. 2. P. 490–492.
7. Ungsuwarungsri T., Knauss W.G. A nonlinear analysis of an equilibrium craze Part I and II // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1988. V. 55. No. 1. P. 44–58.
8. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
9. McCartney L.N. Mechanics of matrix cracking in brittle-matrix fiber-reinforced composites // Proc. Royal Soc. 1987. No. A409. P. 329–350.
10. Cox B.N. and Marshall D.B. Concepts for bridged cracks in fracture and fatigue // Acta Met. Mater. 1994. V. 42. No. 2. P. 341–363.
11. Budiansky B., Evans A.G., Hutchinson J.W. Fiber-matrix debonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites // Int. J. Solid Structures. 1995. V. 32. No. 3–4. P. 315–328.
12. Ji H., de Gennes P.G. Adhesion via Connector Molecules: The Many-Stitch Problem // Macromolecules. 1993. V. 26. P. 520–525.

13. Goldstein R.V., Bakirov V.F., Perelmuter M.N. Modeling of the adhesion strength and fracture kinetics of the microelectronic package polymer-polymer joints // In: Proc. Inst. Phys. Technol. Russian Ac. of Sci. V. 13. Modeling and Simulation of Submicron Technology and Devices, 1997. P. 115-125.
14. Ентов В.М., Салганик Р.Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // Изв. АН СССР. МТТ. 1968. № 6. С. 87-99.
15. Weitsman Y. Nonlinear analysis of crazes // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1986. V. 53. P. 97-102.
16. Rose L.R.F. Crack reinforcement by distributed springs // J. Mech. Phys. Solids. 1987. V. 35. No. 4. P. 383-405.
17. Budiansky B., Amazigo J.C., Evans A.G. Small-scale crack bridging and the fracture toughness of particulate-reinforced ceramics // J. Mech. Phys. Solids. 1988. V. 36. No. 2. P. 167-187.
18. Nemat-Nasser S., Hori M. Toughening by partial or full bridging of cracks in ceramics and fiber reinforced composites // Mech. Mater. 1987. No. 6. P. 245-269.
19. Morozov N., Pauksho M., Ponikarov N. On the problem of equilibrium length of bridged crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1997. V. 64. P. 427-430.
20. Movchan N.V., Willis J.R. Penny-shaped crack bridged by fibers // Quart. Appl. Math. 1998. No. 2. P. 327-340.
21. Шифрин Е.И. Плоская трещина нормального разрыва, берега которой взаимодействуют по линейному закону // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 94-100.
22. Tvergaard V., Hutchinson J.W. The influence of plasticity on mixed mode interface toughness // J. Mech. Phys. Solids. 1993. V. 41. No. 6. P. 1119-1135.
23. Wei Y., Hutchinson J.W. Models of interface separation accompanied by plastic dissipation at multiple scales // Int. J. Fracture. 1999. V. 95. No. 1. P. 1-17.
24. Needleman A. An analysis of decohesion an imperfect interface // Int. J. Fracture. 1990. V. 42. No. 1. P. 21-40.
25. Слепня Л.И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
26. Rice J.R., Sih G.C. Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. P. 218-224.
27. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Трещина со связями на границе раздела материалов: Препринт № 568. ИПМ РАН, М.: 1996. 72 с.
28. Goldstein R.V., Perelmuter M.N. Modeling of bonding at the interface crack // Int. J. Fracture. 1999. V. 99. No. 1-2. P. 53-79.
29. Rice J.R. Elastic fracture mechanics concepts for interface cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1988. V. 55. P. 98-103.
30. Салганик Р.Л. О хрупком разрушении клеенных тел // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 5. С. 957-962.
31. J.W. Hutchinson, Z. Suo. Mixed mode cracking in layered materials / Eds. J.W. Hutchinson, T.Y. Wu. Adv. Appl. Mech. 1992. V. 29. P. 63-191.
32. Ильюшин А.А. Пластичность. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. 376 с.
33. Биргер И.А. Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести. Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 113-119.
34. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1975. 320 с.
35. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Трещина на границе раздела материалов с нелинейным взаимодействием берегов: Препринт N 619. ИПМ РАН, М.: 1998. 42 с.
36. Perelmuter M.N. Polymer interface crack and adhesion resistance // In Proc. of Workshop 'Mechanical Reliability of Polymeric Materials and Plastic Packages of IC Devices.', Paris, France, 1998. P. 231-236.

Москва

Поступила в редакцию
12.10.2000