МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2001

УДК 539.375

© 2001 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ, Д.А. ПОЖАРСКИЙ

К ЗАДАЧЕ О ТРЕЩИНЕ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА УПРУГИХ ПОЛОСЫ И ПОЛУПЛОСКОСТИ

Изучается плоская задача о трещине, возникающей на границе раздела упругой полосы, сцепленной с упругой полуплоскостью из другого материала, когда к поверхности такого двухслойного тела приложена нормальная нагрузка (сосредоточенная сила). Для решения системы интегральных уравнений относительно скачков компонент вектора перемещений в зоне трещины применяется регулярный асимптотический метод [1], эффективный для достаточно узкой трещины. После решения указанной системы уравнений для определения истинных размеров трещины предлагается использовать интегральный критерий разрушения типа критерия В.В. Новожилова [2].

Ранее аналогичные плоские задачи исследовались для случая трещин на границе двух упругих полуплоскостей, например [3]; также изучались задачи о круговых дефектах типа трещины или включения в плоскости смены упругих свойств материалов [4, 5].

1. В декартовых координатах x, y рассмотрим двухслойное упругое тело, состоящее из полосы толщины h с упругими характеристиками G_1 (модуль сдвига) и ν_1 (коэффициент Пуассона), сцепленной с полуплоскостью с характеристиками G_2 и ν_2. Пусть в точке $x = 0$, $y = h$ границы полосы приложена нормальная нагрузка в виде сосредоточенной силы P, направленной в положительном направлении оси y (во вне тела). Остальная поверхность этого тела предполагается не нагруженной.

Предположим, что под действием этой нормальной нагрузки на линии смены упругих свойств $y = 0$ в силу недостаточной адгезионной прочности между полосой (покрытием) и полуплоскостью (подложкой) образуется трещина $|x| \leqslant a$. На трещине терпят разрыв обе компоненты вектора перемещений. Считая сперва величину a известной, получим систему интегральных уравнений относительно скачков перемещений на трещине. Впоследствии, после решения этой системы, используя интегральный критерий разрушения типа критерия В.В. Новожилова [2], можно определить истинный размер трещины $2a$ в зависимости от силы P и механических характеристик упругой пары материалов.

Граничные условия задачи запишем в форме (верхний индекс 1 соответствует полосе, верхний индекс 2 – полуплоскости):

$$\begin{gathered}
y=h: \quad \sigma_y^{(1)} = P\delta(x), \quad \tau_{xy}^{(1)}=0 \\
y=0: \quad u^{(1)}-u^{(2)}=u(x) \quad (|x|\leqslant a), \quad v^{(1)}-v^{(2)}=v(x) \quad (|x|\leqslant a) \\
u^{(1)}=u^{(2)} \quad (|x|>a), \quad v^{(1)}=v^{(2)} \quad (|x|>a) \\
\sigma_y^{(1)}=\sigma_y^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)}=\tau_{xy}^{(2)}, \quad \sigma_y^{(1)}=\tau_{xy}^{(1)}=0 \quad (|x|\leqslant a)
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\delta(x)$ – импульсная функция Дирака. Кроме того, при $y \to -\infty$ перемещения и напряжения исчезают.

Для решения краевой задачи (1.1) используем четыре функции Папковича – Нейбера $\Phi_n^m(r, z)$ $(n, m = 1, 2)$: по две для полосы (верхний индекс 1) и полуплоскости (верхний индекс 2). Перемещения и напряжения выражаются через эти функции по формулам [6, с. 37] $(m = 1, 2)$:

$$u^{(m)} = -\frac{\partial \Phi_1^{(m)}}{\partial x} - y\frac{\partial \Phi_2^{(m)}}{\partial x}, \quad v^{(m)} = (3-4\nu_m)\Phi_2^{(m)} - \frac{\partial \Phi_1^{(m)}}{\partial y} - y\frac{\partial \Phi_2^{(m)}}{\partial y}$$

$$\frac{\sigma_y^{(m)}}{2G_m} = 2(1-\nu_m)\frac{\partial \Phi_2^{(m)}}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi_1^{(m)}}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2 \Phi_2^{(m)}}{\partial y^2} \tag{1.2}$$

$$\frac{\tau_{xy}^{(m)}}{2G_m} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-2\nu_m)\Phi_2^{(m)} - \frac{\partial \Phi_1^{(m)}}{\partial y} - y\frac{\partial \Phi_2^{(m)}}{\partial y}\right]$$

В силу симметрии задачи по x используем cos-преобразование Фурье и положим

$$\Phi_1^{(1)} = \int_0^\infty [A\,\mathrm{sh}\,\alpha y + B\,\mathrm{ch}\,\alpha y]\cos\alpha x\,d\alpha$$

$$\Phi_2^{(1)} = \int_0^\infty [C\,\mathrm{sh}\,\alpha y + D\,\mathrm{ch}\,\alpha y]\alpha\cos\alpha x\,d\alpha \tag{1.3}$$

$$\Phi_1^{(2)} = \int_0^\infty E\,\mathrm{e}^{\alpha y}\cos\alpha x\,d\alpha, \quad \Phi_2^{(2)} = \int_0^\infty F\,\mathrm{e}^{\alpha y}\,\alpha\cos\alpha x\,d\alpha$$

Тогда на основании условий (1.1) (кроме последних двух равенств) получим систему шести линейных алгебраических уравнений относительно шести неизвестных функций A, B, C, D, E, F параметра α $(u = \alpha h)$:

$$2(1-\nu_1)(C\,\mathrm{ch}\,u + D\,\mathrm{sh}\,u) - A\,\mathrm{sh}\,u - B\,\mathrm{ch}\,u - u(C\,\mathrm{sh}\,u + D\,\mathrm{ch}\,u) = \frac{P}{2\pi G_1\alpha^2}$$

$$(1-2\nu_1)(C\,\mathrm{sh}\,u + D\,\mathrm{ch}\,u) - A\,\mathrm{ch}\,u - B\,\mathrm{sh}\,u - u(C\,\mathrm{ch}\,u + D\,\mathrm{sh}\,u) = 0$$

$$B = E + U, \qquad (3-4\nu_1)D - A = (3-4\nu_2)F - E + V \tag{1.4}$$

$$G_1[2(1-\nu_1)C - B] = G_2[2(1-\nu_2)F - E]$$

$$G_1[(1-2\nu_1)D - A] = G_2[(1-2\nu_2)F - E]$$

где трансформанты преобразования Фурье

$$U = \frac{2}{\pi\alpha}\int_0^\alpha u(x)\sin\alpha x\,dx, \quad V = \frac{2}{\pi\alpha}\int_0^\alpha v(x)\cos\alpha x\,dx \tag{1.5}$$

Определитель системы (1.4) – известная функция [7], равная (с точностью до множителя)

$$\Delta(u) = M - (1 + 4u^2 + LM)\mathrm{e}^{-2u} + L\,\mathrm{e}^{-4u}$$

$$L = \frac{G_1\varkappa_2 - G_2\varkappa_1}{G_1\varkappa_2 + G_2}, \quad M = \frac{G_1 + G_2\varkappa_1}{G_1 - G_2}, \quad \varkappa_m = 3 - 4\nu_m \quad (m = 1, 2) \tag{1.6}$$

После решения системы (1.4), удовлетворив оставшимся двум последним условиям (1.1), получим систему интегральных уравнений относительно функций $u(x)$, $v(x)$

($|x| \leqslant a$):

$$-\int_{-a}^{a} u(\xi) K_{11}^{c}\left(\frac{\xi-x}{h}\right) d\xi+\int_{-a}^{a} v(\xi) K_{12}^{s}\left(\frac{\xi-x}{h}\right) d\xi=-\frac{hP}{\theta_1} F_1^{s}\left(\frac{x}{h}\right)$$

$$\int_{-a}^{a} u(\xi) K_{12}^{s}\left(\frac{\xi-x}{h}\right) d\xi+\int_{-a}^{a} v(\xi) K_{13}^{c}\left(\frac{\xi-x}{h}\right) d\xi=-\frac{hP}{\theta_1} F_2^{c}\left(\frac{x}{h}\right) \qquad (1.7)$$

$$K_{mn}^{c}(t)=\int_0^{\infty} \frac{u^m}{\Delta(u)} K_n(u) \cos ut\, du, \quad K_{mn}^{s}(t)=\int_0^{\infty} \frac{u^m}{\Delta(u)} K_n(u) \sin ut\, du \qquad (1.8)$$

$$\theta_1=G_1/(1-\nu_1), \quad K_1(u)=A_0+(A_1+A_2 u+2A_1 u^2) e^{-2u}-$$

$$-(A_0+A_1) e^{-4u}, \quad K_2(u)=B_0+(B_1+B_2 u^2) e^{-2u}+B_0 e^{-4u}$$

$$K_3(u)=A_0+(A_1-A_2 u+2A_1 u^2) e^{-2u}-(A_0+A_1) e^{-4u}$$

$$A_0=\frac{1+M(L-2)}{2}, \quad A_1=M-L, \quad A_2=2(L-1)(M-1)$$

$$B_0=\frac{LM-1}{2}, \quad B_1=1-\frac{L^2+M^2}{2}, \quad B_2=4-2(L+M)$$

$$F_m^{c}(t)=\int_0^{\infty} \frac{f_m(u)}{\Delta(u)} \cos ut\, du, \quad F_m^{s}(t)=\int_0^{\infty} \frac{f_m(u)}{\Delta(u)} \sin ut\, du$$

$$f_1(u)=[LM-1+2(M-1)u] e^{-u}-[LM-1-2(L-1)u] e^{-3u}$$

$$f_2(u)=[2M-LM-1+2(M-1)u] e^{-u}+[2L-LM-1-2(L-1)u] e^{-3u}$$

2. С учетом условий $u(\pm a)=v(\pm a)=0$ проинтегрируем по частям по переменной ξ левые части системы (1.7). Получившуюся систему, вводя безразмерные обозначения по формулам

$$x_*=\frac{x}{a}, \quad \xi_*=\frac{\xi}{a}, \quad \lambda=\frac{h}{a}, \quad \varphi_1(\xi_*)=\frac{u'(\xi)\theta_1 a}{P}, \quad \varphi_2(\xi_*)=\frac{v'(\xi)\theta_1 a}{P} \qquad (2.1)$$

запишем, опуская звездочки, в форме ($|x| \leqslant 1$):

$$\int_{-1}^{1} \varphi_1(\xi) K_{01}^{s}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi+\int_{-1}^{1} \varphi_2(\xi) K_{02}^{c}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi=-F_1^{s}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$-\int_{-1}^{1} \varphi_1(\xi) K_{02}^{c}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi+\int_{-1}^{1} \varphi_2(\xi) K_{03}^{s}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi=F_2^{c}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \qquad (2.2)$$

Решение системы (2.2) должно удовлетворить дополнительным условиям

$$\int_{-1}^{1} \varphi_m(x) dx=0 \quad (m=1,2) \qquad (2.3)$$

поскольку искомые размерных функций выражаются формулами

$$\frac{\theta_1}{P} u(ax)=\int_{-1}^{x} \varphi_1(\xi) d\xi, \quad \frac{\theta_1}{P} v(ax)=\int_{-1}^{x} \varphi_2(\xi) d\xi \qquad (2.4)$$

Для решения системы (2.2) применим асимптотический метод "больших λ" [1, 8], эффективный для относительно узкой трещины (относительно толстой полосы; при $\lambda \geqslant 2$). Выделяя в символах ядер (1.8) главные при $u \to \infty$ части по формулам

$$\frac{K_m(u)}{\Delta(u)} = \frac{A_0}{M} + L_m(u) \quad (m = 1, 3), \qquad \frac{K_2(u)}{\Delta(u)} = \frac{B_0}{M} + L_2(u) \tag{2.5}$$

и используя понимаемые в смысле теории обобщенных функций значения интегралов

$$\int_0^\infty \sin ut\, du = \frac{1}{t}, \qquad \int_0^\infty \cos ut\, du = \pi\delta(t) \tag{2.6}$$

разложим ядра и правые части системы (2.2) в ряды по степеням параметра λ^{-1}:

$$K_{0m}^s\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) = \frac{A_0}{M}\left[\frac{\lambda}{\xi - x} + \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)^{2n+1} \frac{(-1)^n c_m^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \quad (m = 1, 3)$$

$$K_{02}^c\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) = \frac{A_0}{M}\left[\pi\varepsilon\delta\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) + \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)^{2n} \frac{(-1)^n c_2^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$F_1^s\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{A_0}{M}\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{2n+1} \frac{(-1)^n f_1^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{2.7}$$

$$F_2^c\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{A_0}{M}\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{2n} \frac{(-1)^n f_2^{2n}}{(2n)!}, \qquad \varepsilon = \frac{B_0}{A_0}$$

$$c_m^n = \frac{A_0}{M}\int_0^\infty u^n L_m(u)\,du, \qquad f_m^n = \frac{A_0}{M}\int_0^\infty u^n \frac{f_m(u)}{\Delta(u)}\,du$$

Искомые функции также разложим в ряды

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\varphi_m^n(x)}{\lambda^n} \quad (m = 1, 2) \tag{2.8}$$

Внося представления (2.7), (2.8) в уравнения (2.2) и приравнивая члены при одинаковых степенях λ^{-1}, получим цепочку систем уравнений вида ($|x| \leqslant 1$, $n = 1, 2 \ldots$):

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \frac{\varphi_1^n(\xi)}{\xi - x}\,d\xi + \pi\varepsilon\varphi_2^n(\xi) = F_1^n(x) \\ &\int_{-1}^1 \frac{\varphi_2^n(\xi)}{\xi - x}\,d\xi - \pi\varepsilon\varphi_1^n(\xi) = F_2^n(x) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь правые части $F_m^n(x)$ ($m = 1, 2$) – известные функции, зависящие, в частности, от функций $\varphi_m^k(x)$ ($k < n$, $m = 1, 2$). Пренебрегая в разложении (2.8) членами порядка λ^{-4} и выше и учитывая вытекающие из (2.3) условия

$$\int_{-1}^1 \varphi_m^n(x)\,dx = 0 \quad (m = 1, 2, \ n = 1, 2, \ldots) \tag{2.10}$$

имеем левые части уравнений (2.9) при $n = 1, 2, 3$ в форме

$$\begin{aligned} &F_1^1(x) = 0, \quad F_2^1(x) = f_2^0, \quad F_1^2(x) = -xf_1^1, \quad F_2^2(x) = 0 \\ &F_1^3(x) = -c_1^1\int_{-1}^1 \xi\varphi_1^1(\xi)\,d\xi, \quad F_2^3(x) = -\frac{x^2}{2}f_2^2 - c_3^1\int_{-1}^1 \xi\varphi_2^1(\xi)\,d\xi \end{aligned} \tag{2.11}$$

Систему (2.9) запишем в форме одного комплексного уравнения ($|x|) \leqslant 1$):

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi^n(\xi)}{\xi - x} d\xi + i\pi\, \mathrm{th}(\pi A)\varphi^n(x) = \pi F^n(x), \quad A = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$\varphi^n(x) = \varphi_1^n(x) + i\varphi_2^n(x), \quad F^n(x) = \pi^{-1}[F_1^n(x) + iF_2^n(x)] \tag{2.12}$$

Решение интегрального уравнения (2.12) может быть получено путем решения соответствующей задачи Римана [1, 9] и при условиях (2.10) будет иметь вид

$$\varphi^n(x) = -\frac{\mathrm{ch}^2(\pi A)}{\pi S(x)} \int_{-1}^{1} \frac{F^n(\xi)S(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{i}{2} \mathrm{sh}(2\pi A) F^n(x)$$

$$S(x) = (1+x)^{1/2+iA}(1-x)^{1/2-iA} \tag{2.13}$$

Необходимые нам интегралы, содержащие функцию $S(x)$, вычисляются приемом, предложенным Н.И. Мусхелишвили [10, § 110], а именно

$$\int_{-1}^{1} \frac{\xi^m S(\xi)}{\xi - x} d\xi = i\pi\, \mathrm{th}(\pi A) S(x) x^m - \frac{\pi}{\mathrm{ch}(\pi A)} a_m(x) \quad (|x| < 1) \tag{2.14}$$

$$a_0(x) = i2A + x, \quad a_1(x) = -\frac{1+4A^2}{2} + x a_0(x), \quad a_2(x) = -i\frac{A+4A^3}{3} + x a_1(x)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^m}{S(x)} dx = \frac{\pi}{\mathrm{ch}(\pi A)} b_m, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = -i2A, \quad b_2 = \frac{1-4A^2}{2}$$

В итоге получим ($n = 1, 2, 3$):

$$\varphi^n(x) = \frac{\mathrm{ch}(\pi A)}{\pi S(x)} \psi_n(x), \quad \psi_1(x) = f_2^0(-2A + ix)$$

$$\psi_2(x) = f_1^1\left(\frac{1+4A^2}{2} - i2Ax - x^2\right), \quad F_1^3(x) \equiv 0 \tag{2.15}$$

$$\psi_3(x) = \left(c_3^1 f_2^0 - \frac{f_2^2}{6}\right)(A + 4A^3) + i\left(\frac{f_2^2}{4} - \frac{c_3^1 f_2^0}{2}\right)(1+4A^2)x + f_2^2 A x^2 - i\frac{f_2^2}{2} x^3$$

и на основании (2.4) первые члены разложений раскрытия трещины представим в виде

$$\frac{\theta_1}{P} u(ax) = \frac{\mathrm{ch}(\pi A)}{\pi} \int_{-1}^{x} \frac{R_1(\xi) c_A(\xi) + R_2(\xi) s_A(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi$$

$$\frac{\theta_1}{P} v(ax) = \frac{\mathrm{ch}(\pi A)}{\pi} \int_{-1}^{x} \frac{R_1(\xi) s_A(\xi) - R_2(\xi) c_A(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \tag{2.16}$$

$$R_1(x) = -\frac{2f_2^0 A}{\lambda} + \frac{f_1^1}{\lambda^2}\left(\frac{1+4A^2}{2} - x^2\right) + \frac{1}{\lambda^3}\left[\left(c_3^1 f_2^0 - \frac{f_2^2}{6}\right)(A+4A^3) + f_2^2 A x^2\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)$$

$$R_2(x) = -\frac{f_2^0 x}{\lambda} + \frac{2f_1^1 Ax}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3}\left[\left(\frac{f_2^2}{4} - \frac{c_3^1 f_2^0}{2}\right)(1+4A^2)x - \frac{f_2^2}{2} x^3\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right) \tag{2.17}$$

$$c_A(x) = \cos\left(A \ln \frac{1-x}{1+x}\right), \quad s_A(x) = \sin\left(A \ln \frac{1-x}{1+x}\right)$$

Таблица 1

N	ε	A	f_2^0	f_1^1	f_2^2	c_3^1
1	–0.0586	0.0187	–5.32	–4.90	–17.8	–1.26
2	0.0586	–0.0187	–3.26	–3.37	–14.6	–1.66

Отметим, что при

$$R_1(x)=\frac{\theta_1}{p}2p_*A, \quad R_2(x)=\frac{\theta_1}{p}p_*x, \quad p_*=\frac{\pi p}{G_1G_2}\left(\frac{1}{G_1\varkappa_2+G_2}+\frac{1}{G_1+G_2\varkappa_1}\right)^{-1} \tag{2.18}$$

формулы (2.16) дают точное решение аналогичной задачи о трещине на границе раздела двух полуплоскостей, граничные условия которой отличаются от (1.1) тем, что $\sigma_y^{(1)}=-p$ при $y=0$ и $|x|\leqslant a$, и отсутствуют условия при $y=h$. Для постоянной ε, связанной с A формулой (2.12), в этой задаче имеем выражение

$$\varepsilon=\frac{G_1(1-\varkappa_2)-G_2(1-\varkappa_1)}{G_1(1+\varkappa_2)+G_2(1+\varkappa_1)} \tag{2.19}$$

совпадающее с выражением для ε из (2.7), (1.8), (1.6). Если же в решении (2.16), (2.18) положить $G_1=G_2$, $\varkappa_1=\varkappa_2$, то $\varepsilon=A=0$ и $u(ax)=0$, $v(ax)=2ap\sqrt{1-x^2}/\theta_1$, что совпадает с известным решением о трещине в однородной плоскости [11].

В табл. 1 для случаев упругих пар $N=1$ сталь на латуни и $N=2$ латунь на стали приведены значения постоянных, входящих в формулы (2.15), включая постоянную ε вида (2.7). При этом значения упругих характеристик материалов взяты, как в [12]. Несложно доказать.

Утверждение. Если коэффициенты Пуассона упругих тел $\nu_m\in(0,\tfrac12]$ $(m=1,2)$, то постоянная ε вида (2.19) находится в интервале $\varepsilon\in(-\tfrac12,\ \tfrac12)$. Следовательно, для постоянной A вида (2.12) имеем $\max|A|=(\ln 3)/(2\pi)\approx 0.175$.

Сильные осцилляции функций $\varphi_m(x)$ $(m=1,2)$ вида (2.8), (2.12), (2.15) в малых окрестностях точек $x=\pm1$ приводят к смене знака у функций (2.4), (2.16) в малых окрестностях концов трещины, то есть к перехлестыванию берегов трещины (в реальности к налеганию берегов друг на друга), а также осцилляции напряжений при подходе извне к концам трещины. Этот эффект аналогичен эффекту осцилляций контактных давлений в очень малых окрестностях концов области контакта $x=\pm1$ в задаче о сцепленном штампе [10], где в худшем случае (также при $A=0.175$) наблюдаются осцилляции напряжений в очень малых областях $0.9997\leqslant|x|<1$ с растущей при $x\to\pm1$ амплитудой.

Для точного решения (2.16), (2.18) в худшем случае $A=0.175$ осцилляций нет по крайней мере при $|x|\leqslant 0.9999$, причем амплитуда осцилляций перемещений стремится к нулю при $x\to\pm1$. Таким образом, для любой пары упругих материалов при достаточно больших значениях λ, когда в разложении (2.8) можно удержать только первый член, размер зоны осцилляций перемещений и напряжений в окрестности точки $x=\pm1$ очень мал: менее 0,01% от полудлины трещины a.

Численный анализ решения (2.16), (2.17) для случаев 1 и 2 упругих пар при $\lambda\geqslant4$ показал, что при $0<x\leqslant0.9999$ вертикальное перемещение $v(ax)$ не меняет знака. Продольное перемещение $u(ax)$ в случае 1 в интервале $0<x\leqslant0.999$ обращается один раз в нуль при $8{,}1\leqslant\lambda\leqslant12.2$ (например при $\lambda=10$, $x=0.718$); при $4\leqslant\lambda\leqslant8$ перемещение $u(ax)<0$, а при $\lambda\geqslant12.3$ перемещение $u(ax)>0$, то есть меняется

Таблица 2

N	$\lambda = 4$	6	10	15
1	–0.0138 (0,649)	–0.00429 (0.597)	$6.53 \cdot 10^{-4}$ (0.974)	0.00108 (0.939)
2	–0.0217 (0.735)	–0.0108 (0.746)	–0.00482 (0.763)	–0.00265 (0.777)

направление сдвига берегов трещины. При $\lambda \leqslant 4$ следует ожидать увеличения размера зоны осцилляций вертикального перемещения в обоих случаях.

Поскольку $u(0) = u(a) = 0$, то в интервале $0 < x < 1$ всегда найдется точка x_*, в которой $\varphi_1(x_*) = 0$ и имеет место максимальный (по модулю) сдвиг берегов трещины $u_* = u(ax_*)$. Для точного решения (2.16), (2.18) в случае материалов сталь – латунь $x_* = 0.833$, причем при $x \in (0;\, 0.9999)$ этот экстремум – единственный. Для решения (2.16), (2.17) значения u_* и x_* (в скобках) приведены в табл. 2 при разных λ. Для случая 2 при уменьшении λ точка x_* смещается к центру трещины, а значение $|u_*|$ возрастает. В случае 1 при изменении λ, как видно из табл. 2, значение u_* меняет знак.

3. Поскольку в выражения для напряжений входят одновременно члены вида $c_A(x)/\sqrt{1-x^2}$ и $s_A(x)/\sqrt{1-x^2}$, здесь нельзя ввести традиционные понятия коэффициентов интенсивности напряжений и использовать силовые критерии разрушения.

После решения системы интегральных уравнений (2.2) и построения асимптотики напряжений в полосе и полуплоскости по x в окрестности границы трещины $x = a + 0$ вопрос об определении размера трещины $2a$ в зависимости от силы P может быть решен следующим образом.

Пусть значение λ настолько велико, что максимальный размер δ_0 зоны осцилляции напряжений в окрестности точки $x = a + 0$ удовлетворяет неравенству $\delta_0 \ll a$. Отметим, что между полосой (покрытием) и полуплоскостью (подложкой) всегда существует переходная зона [13] – переходный слой толщины $\delta \ll h$ (обычно несколько микрон), более хрупкий, чем основные материалы, с упругими характеристиками G_3 и ν_3, получаемыми некоторым осреднением G_1, G_2, и ν_1, ν_2. Пусть также $\delta > \delta_0$.

Поскольку трещина образовалась на границе $y = 0$ из-за недостаточной прочности указанного переходного слоя, то при увеличении силы P она весьма вероятно будет и далее распространяться вдоль линии $y = 0$. Поэтому для определения величины a можно, например, использовать следующее дополнительное условие при $y = 0$:

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_a^{a+\delta} U\,dr = A_* \tag{3.1}$$

являющееся некоторым аналогом интегрального критерия разрушения В.В. Новожилова [2]. Здесь U – упругая энергия единицы объема переходного слоя, а именно ($E_3 = 2G_3(1 + \nu_3)$ – модуль Юнга)

$$\begin{gathered} U = \frac{1}{2E_3}[(\sigma_x^*)^2 + (\sigma_y^*)^2 + (\sigma_z^*)^2 - 2\nu_3(\sigma_x^*\sigma_y^* + \sigma_x^*\sigma_z^* + \sigma_y^*\sigma_z^*)] + \frac{1}{2G_3}(\tau_{xy}^*)^2 \\ \sigma_x^* = \tfrac{1}{2}(\sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}), \quad \sigma_y^* = \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)} \\ \sigma_z^* = \tfrac{1}{2}(\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}), \quad \tau_{xy}^* = \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)} \end{gathered} \tag{3.2}$$

где A_* – экспериментально определяемая физическая постоянная пары материалов (критическая величина упругой энергии единицы объема переходного слоя).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в соответствии с программой гранта № 99-01-00038.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М.* О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 246–257.
2. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
3. *Александров В.М., Сумбатян М.А.* Периодическая система трещин на границе контакта двух упругих полуплоскостей // Тр. 3-ей Межд. конф. "Современные проблемы механики сплошной среды". Т. 1. Ростов-на-Дону: ООО "МП Книга", 1997. С. 26–29.
4. *Моссаковский В.И., Беркович П.Е., Рыбка В.М.* Смешанная осесимметричная задача теории упругости для кусочно-однородного пространства с круговой щелью в плоскости соединения // Докл. АН УССР. Сер. А. 1978. № 9. С. 812–816.
5. *Ефимов В.В., Кривой А.Ф., Попов Г.Я.* Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 42–58.
6. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 367 с.
7. *Александрова Г.П.* Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 97–106.
8. *Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 222 с.
9. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
10. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Физматгиз, 1966. 647 с.
11. *Панасюк В.В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 248 с.
12. *Александров В.М., Kalker J.J., Пожарский Д.А.* Пространственная контактная задача для двухслойного упругого основания с заранее неизвестной областью контакта // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С. 51–55.
13. *Гнесин Г.Г., Фоменко С.Н.* Износостойкие покрытия на инструментальных материалах // Порошковая металлургия. 1996. № 9/10. С. 17–28.

Москва

Поступила в редакцию
17.12.1999