МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2001

*К 90-й годовщине со дня рождения
Алексея Антоновича Ильюшина*

УДК 539.374

© 2001 г. Д.В. ГЕОРГИЕВСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ НЕОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ: ЖЕСТКИЕ ЗОНЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ (ОБЗОР)

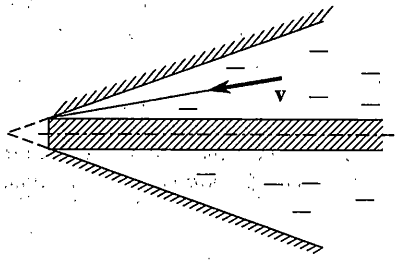
Дан обзор основных работ за последние пятьдесят лет по некоторым неодномерным задачам вязкопластического течения: течение в плоском конфузоре и диффузоре; качение цилиндра по поверхности со слоем смазки; движение пленки над вращающимся диском; неодномерный сдвиг; сдавливание слоя между сближающимися жесткими плоскостями; удар стержня о жесткую преграду. Особое внимание уделено поведению жестких зон (ядер) в области, занятой материалом. Приведен обзор работ по устойчивости процессов деформирования вязкопластических тел под действием нагрузки. Сформулированы перспективные направления фундаментальных исследований в области вязкопластичности.

1. Введение. Общая формулировка определяющих соотношений вязкопластической среды для одномерных и плоских процессов деформирования связана с именами таких выдающихся ученых XIX века как А.Ж.К. Сен-Венан, Н.П. Петров, Ф.Н. Шведов, Э.К. Бингам (Бингхэм). Точные аналитические решения задач о вязкопластическом течении получены, в основном, для случаев чистого сдвига и чистого растяжения – сжатия, когда интенсивность скоростей деформаций равна по модулю одной из компонент либо линейной комбинации компонент тензора скоростей деформации. Характеристики всех таких стационарных решений известны довольно давно (в частности, они собраны в обзорном докладе [1] по истории реологии и состоянию дел к началу 50-х годов[1], а также в более поздних монографиях и обзорных статьях [2–8], посвященных тем или иным аспектам теории вязкопластического течения). Более сложные течения, пусть даже и стационарные, в которых в отличие от линейно вязкого случая автомодельности уже нет, допускают аналитико-численные решения. В силу физической нелинейности модели каждое новое исследование в этой области представляет определенный интерес.

Остановимся в данном обзоре на некоторых характерных задачах, моделирующих технологические процессы обработки материалов, качение жесткого тела по слою смазки, поведение пластов земной коры при длительной нагрузке, динамическое взаимодействие элементов вязкопластических конструкций. Особое внимание будем уделять наличию или отсутствию жестких зон (стопорных зон; ядер течения) и устойчивости процесса.

2. Вязкопластическое течение в диффузоре и конфузоре. Известно, что поиск стационарного решения в задаче о вязкопластическом течении под действием давления на бесконечности в плоском диффузоре или конфузоре в виде $v(r, \theta) = V(\theta)/r$, как это делается для вязких жидкостей, и в коническом диффузоре или конфузоре в виде $v(r, \theta) = V(\theta)/r^2$, приводит к противоречиям. С трудностями такого рода впервые столк-

[1] Так же, как и работа [1], многие отечественные статьи 40–60-х годов, посвященные математическому моделированию вязкопластических течений, опубликованы в "Коллоидном журнале".



Фиг. 1

нулись авторы работ [9, 10]. Еще ранее в [11, 12] проведено кинематическое исследование процесса течения в конусе методом просвечивания рентгеновскими лучами, найдено экспериментальное распределение скоростей в конусах с растворами 10°–25° и установлена формула для зависимости расхода от давления. Отмечено, что сдвиг скорее всего происходит по боковой поверхности цилиндра с диаметром, равным диаметру выходного отверстия (следовательно, этот цилиндр является жестким ядром (фиг. 1)). Аналитический же поиск решения в таком виде опять не привел к результату. Это говорит о том, что линии тока непрямолинейны, и их семейство представляет собой сложную картину на плоскости либо внутри конуса.

В [13] в случае плоского конфузора функция тока $\psi(r, \theta)$ искалась в виде

$$\psi = -\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i(\theta) r^{1-i} \tag{2.1}$$

Основная функция $\omega_1(\theta)$ в (2.1) определяет величину расхода; $\omega_2(\theta)$ и $\omega_3(\theta)$ на расход не влияют, а лишь корректируют форму профиля. Доказано, что ядра потока в данном случае не будет. Аналогичный подход в задаче о вязкопластическом течении между двумя коаксиальными конусами использован в [14]. Факт малого влияния корректирующих функций ω_2, ω_3 подтвержден и экспериментально на примере движения торфа в конической насадке с углами раствора 5°–10°. В торфяную массу помещались свинцовые реперы, и с помощью рентгеновской установки фотографировалось их положение в процессе движения. Снимки показали, что линии тока очень близки к прямым, проведенным из вершины конуса. Экспериментальная кривая говорит о том, что при движении вязкопластической массы имеет место пристенное скольжение.

Медленное вязкопластическое течение в коническом и плоском конфузорах при малом угле раствора исследовано в [15]. В качестве основного взято решение для пуазейлевского течения в цилиндрической трубе либо в плоском слое. Далее допущено, что течение происходит не в цилиндре, а в конусе с малым углом раствора β. Получена следующая формула для расхода Q в первом приближении по β:

$$Q = \frac{9\pi \operatorname{tg}^2 \beta}{32\mu\tau_s}\left(p_1 - p_2 - \frac{2\tau_s}{\operatorname{tg}\beta}\ln\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \frac{r_1^3 r_2^3}{(r_2^{3/2} - r_1^{3/2})^2} \tag{2.2}$$

где μ и τ_s – динамическая вязкость и предел текучести при сдвиге материала, p_1 и p_2 – давления во входном и выходном сечениях, r_1 и r_2 – радиусы этих сечений. Для плоского диффузора формула аналогичная (2.2) выглядит следующим образом:

$$Q = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\mu\tau_s}\left(p_1 - p_2 - \frac{\tau_s}{\operatorname{tg}\beta}\ln\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \frac{a_1^2 a_2^2}{(a_2 - a_1)^2} \tag{2.3}$$

где $2a_1$ и $2a_2$ – расстояния между стенками диффузора во входном и выходном сечениях. Такой же метод в случае материала Балкли – Гершеля избран и в [16].

Движение вязкопластической среды в плоском параболическом конфузоре вариационным методом изучено в [17]. Минимум функционала энергии реализуется на действительном поле скоростей. В [18] исследовано сложное вязкопластическое течение внутри клина, а в [19, 20] внутри двугранного угла и соосных конусов. Высокоскоростное вязкопластическое течение, в котором безразмерный предел текучести много меньше безразмерной вязкости, и происходящее в коническом конфузоре, рассмотрено в [21].

В [22] решена задача медленного установившегося течения вязкопластического материала в сходящемся коническом канале применительно к процессам экструзии и литья под давлением. Параметры найденного процесса деформирования близки к соответствующим параметром ньютоновского течения в конусе под действием давления на бесконечности.

В монографии [8] исследована задача о движении в плоском конфузоре с прямолинейными стенками материала, в котором пластические свойства выражены слабо, т.е. близкого к ньютоновской жидкости. Решение начально-краевой задачи для такой среды сводится к решению соответствующей "вязкой" задачи и линеаризованной по безразмерному пределу текучести задачи первого приближения. Выписаны уравнения асимптотических границ жестких зон, появляющихся при возмущении предела текучести. Решение данной задачи позволяет судить об устойчивости основного процесса (исходного вязкого течения) по отношению к возмущению материальных функций (появлению предела текучести).

3. Качение цилиндра по поверхности со слоем вязкопластической смазки. Впервые уравнения движения для случая качения цилиндра по поверхности, покрытой слоем пластической смазки, проинтегрированы в [23], а вязкопластической – в [24]. Получены выражения для распределения давления в слое смазки, грузоподъемности смазочной прослойки и мощности, затрачиваемой на преодоление силы трения при качении. Отмечено, что в случае экспоненциальной зависимости предельного напряжения сдвига и вязкости от давления существует предельная минимальная толщина смазочного слоя.

Результаты экспериментов [25] в работе [26] даны в виде зависимости коэффициента сопротивления течению λ от обобщенного числа Рейнольдса Re построенного по эффективной вязкости смазочного слоя: $\lambda \approx 64/\mathrm{Re}$ в диапазоне $2 \cdot 10^{-4} < \mathrm{Re} < 6$.

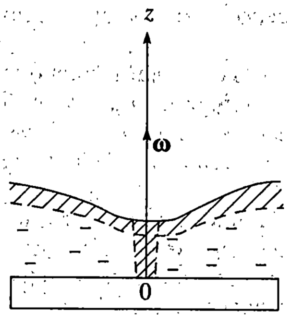
В [27, 28] приведены эксперименты по определению зависимости момента трения от нагрузки, скорости вращения вала в роликовом подшипнике скольжения, размеров подшипника и реологических свойств вязкопластического (консистентного) материала, из которого изготовлена смазка.

Реодинамическая теория вязкопластической смазки развита в [29]. Течение в плоском подшипнике рассмотрено в области между бесконечной плоскостью, движущейся с постоянной скоростью, и наклонной к ней неподвижной плоскостью. Вся область разбита на три зоны со своими граничными условиями и со своим распределением скоростей и давлений. Доказано существование у поверхностей обеих пластин жестких зон в случае $k \approx h_1/h_2 \geqslant 2$, где h_1 – ширина входного, а h_2 – ширина выходного отверстий. Найдены ширина h слоя, движущегося с постоянной скоростью

$$h = \frac{k-2}{k+1} h_2 \qquad (3.1)$$

и условия устойчивости жестких зон. Вязкопластическая смазка имеет свои преимущества по сравнению с вязкой. Для вязкой смазки происходит разрыв масляной пленки, что приводит к вытеканию масла из зазора, в вязкопластической же среде, как следует из (4), при $k \neq 2$ этого не происходит вследствие более равномерного распределения давлений на плоскость вкладыша подшипника. Кроме того существование сплошных твердых стопоров обеспечивает полноту течения, причем входной стопор ограждает от попадания в смазочный слой воздуха. На особенности поведения пластичных смазок в зоне трения по сравнению с ньютоновскими средами обращено внимание и в [30].

Плоское течение вязкопластической смазки в малом зазоре между изделием и внутренней поверхностью насадки при волочении рассмотрено в [31]. Приведены пять качественно различных схем течения в зависимости от скорости волочения, расхода и реологии смазочного материала.



Фиг. 2

Экспериментальное изучение деформирования вязкопластических смазок при сложном сдвиге для разных температур приведено в [32]. Методы и результаты лабораторных испытаний вязкопластических масел и смазок при трении, а также принципы подбора последних для снижения трения и изнашивания трибосопряжений изложены в справочнике [33].

С использованием метода конечных элементов в [34] выполнено численное моделирование течения билинейной неньютоновской жидкости (жидкости с кусочно-линейной вязкостью) в смазочном слое опорного подшипника. В качестве предельного случая обсужден бингамовский предел. Результаты расчетно-экспериментального исследования нелинейно-вязкопластической смазки в гидростатическом упорном подшипнике представлены в [35]. Для снижения потерь на нагнетание смазки следует увеличивать как эффективную вязкость, так и предельное напряжение сдвига.

4. Движение вязкопластической пленки над вращающимся диском. К вопросам деформирования слоя смазки тесно примыкают и задачи о движении вязкопластического слоя над вращающимся диском. В [36] найдено распределение $v_r(r, z)$ для такого движения и получено уравнение в частных производных первого порядка, из которого определяется толщина слоя $h(r)$. Аналогичная задача о равновесии и течении вязкопластического материала над вращающимся конусом рассмотрена в [37]. Здесь определена максимальная толщина слоя смазки, который может оставаться в покое на поверхности конуса.

Определению толщины вязкопластической пленки над вращающимся диском посвящены работы [38, 39]. В [40] даны приближенные аналитические решения для двух типов такого течения. В случае, когда вязкость и предел текучести не зависят от радиуса, толщина пленки уменьшается с удалением от центра. Для среды с меняющимися параметрами картина может быть обратной.

В [41] рассмотрена задача о нанесении такой пленки из вязкопластического материала на вращающийся диск. В качестве определяющего соотношения использована модель с кусочнолинейной вязкостью, где предельным случаем является вязкопластическая модель. На основе конечноразностного моделирования установлено, что вся область состоит из трех зон (фиг. 2): жесткой зоны у оси вращения; области сдвигового течения, примыкающей к диску; жесткой зоны вблизи свободной поверхности.

Если в центре вращающегося диска имеется отверстие, то на кинематическое поле осесимметричного вращения накладывается также осесимметричное поле, соответствующее стоку в начале координат. Для такого течения в [42] получены распределения тангенциальной скорости и ее циркуляции.

Большой интерес представляло бы численно-аналитическое решение вязкопластического аналога задачи Кармана. Поиск решения в том же виде, как это делается в случае линейной вязкой жидкости, не приводит к результату из-за отсутствия автомодельности. Наиболее интересны здесь три вопроса: каково распределение жестких зон при стационарном движении?; с какой скоростью "подсасывает" вращающийся диск среду из бесконечности ($z \to \infty$) и наблюдается ли этот эффект в данной задаче вообще?; существует ли предельный переход в решении вязкопластической задачи Кармана к решению соответствующей вязкой задачи при устремлении предела текучести при сдвиге к нулю? Последний вопрос тесно связан с проблемой устойчивости процессов деформирования относительно возмущений материальных функций [43].

5. Неодномерный и нестационарный сдвиг вязкопластической среды. Задача о вязкопластическом течении в зазоре между двумя круглыми коаксиальными трубами при совместном действии момента, приложенного к внутреннему цилиндру, и градиента давления вдоль оси рассмотрена в [44, 45]. Приведены общие условия осуществимости течения. Решение справедливо, когда напряжение сдвига на стенках цилиндра в результате поступательного течения намного превышает напряжение сдвига, возникающего вследствие вращения цилиндров. Это частный случай течения бурового раствора в кольцевом канале обсадных труб, при котором градиент скорости на стенке трубы, связанный с поступательным движением, намного превышает градиент скорости, возникающий в результате вращения внутренней штанги.

Экспериментальное изучение течения жирового солидола на сдвоенном ротационном вискозиметре с коаксиальными цилиндрами, позволяющем исследовать взаимное влияние осевого и окружного течений с учетом концевых эффектов, приведено в [25]. Показано, что осевое течение повышает сопротивление деформированию при окружном течении. Суперпозиция же двух указанных чистых сдвигов возможна лишь в первом приближении.

Комбинация вязкопластических течений Куэтта и Пуазейля в плоском зазоре изучена в [46]. Для наглядности характер течения поставлен в зависимость от двух безразмерных переменных, определяющих координаты точки на плоскости. Выявлены три области, отвечающие наличию, частичному наличию и отсутствию течения. Аналогичный подход осуществлен и для комбинаций течений Куэтта – Тейлора и Пуазейля между двумя коаксиальными цилиндрами. На изображающей плоскости существуют пять областей с различным характером деформирования.

Вязкопластическое течение между двумя бесконечными пластинами под действием касательного усилия и градиента давления, направленного под произвольным углом к этому усилию, рассмотрено в [47]. Такая модель используется для анализа течения в канале экструдера.

В [48] реология жидкости описана моделью, образованной путем последовательного соединения вязкопластической и произвольной вязкоупругой моделей. Цилиндрическая труба заданного радиуса и длины вращается с постоянной угловой скоростью и равномерно движется вдоль оси внутри неподвижной и коаксиальной с ней цилиндрической трубы с вязкоупругопластической несжимаемой жидкостью. Подробно изучено стационарное течение при сложном сдвиге, а также определены границы вязкоупругого ядра. Аналогичное спиральное течение вязкопластической среды при вращении внутреннего цилиндра и наличии осевого перепада давления численно изучено позднее в [49]. Аналитическое решение получено в приближении плоской щели. Если перепад давления меньше критического, то у внешней трубы существует неподвижный жесткий участок. Найдена скорость внешней трубы, при которой этот участок исчезает.

Решения многих задач о сложном и нестационарном сдвиге вязкопластических материалов, имеющих отношение к выкачиванию нефти и движению нефтепродуктов по буровым скважинам, приведены в монографии [4]. Нестационарность обуславливает изменение границы жесткой зоны (обычно цилиндрического ядра в середине трубы) при разгоне либо торможении. Многие рассмотренные задачи можно свести к нелинейной задаче типа Стефана в области с заранее неизвестной границей.

В приближении тонкого слоя в [50, 51] рассмотрена общая задача течения вязкопластической среды, когда материальные точки граничных поверхностей смещаются по нормали по заданному закону. Поставлена также задача об определении закона деформирования материала в узком канале при заданном распределении давления на границах этого канала. Полученные выражения расхода и давления позволяют ставить задачи управления течением в тонком слое и оптимизировать эти процессы.

6. Сдавливание вязкопластического слоя между сближающимися жесткими плоскостями. Задача о сжатии вязкопластического слоя прямоугольными жесткими плитами в предположении малости расстояния между плитами по сравнению с их размерами решена в [52]. Получен следующий результат: вблизи плит всегда существует область течения, в которой преобладающую роль играют вязкие напряжения; оставшуюся среднюю область охватывает близкое к идеальнопластическому течение, параметры которого ищутся как некоторая поправка к классическому решению

Прандтля. В [53] рассмотрено сдавливание вязкопластического слоя круглыми пластинами с отверстием в центре. Сделана гипотеза о наличии жесткой зоны постоянной толщины в средней части зазора.

В [54] решение задачи о сжатии вязкопластической среды между круглыми параллельными пластинами при их соосном поступательном движении дано в безынерционном приближении тонкого слоя. Коэффициент вязкости и предел текучести могут принимать произвольные значения. Учтено также изменение толщины жесткого ядра в процессе сжатия.

Медленное сжатие вязкопластического слоя (трехкомпонентная модель) между круглыми параллельными пластинами проанализировано с помощью вариационных методов в [55]. Получены верхние и нижние оценки решения, причем последние, как следует из экспериментальных наблюдений, довольно близки к точному решению. Сходным вопросам посвящена работа [56], где исследовано вытеснение неньютоновской, в частности, вязкопластической, среды двумя параллельными круглыми дисками. Сделаны два предположения: отношение расстояния между дисками к радиусу дисков мало; отношение касательного напряжения на границе к пределу текучести постоянно. Получено значение результирующей силы, действующей на диски.

Сжатие вязкопластической среды между сближающимися параллельными плитами экспериментально исследовано в [57]. Существенное влияние на результаты испытаний и расчетов оказывает тип граничных условий: имеет ли место прилипание либо внешнее трение и по какому закону это трение происходит. Эксперименты проводились на некоторых смолах, пластилине и дисперсиях кремнезема, причем из независимых экспериментов на сжатие предел текучести определялся как напряжение, при котором начинается медленное деформирование.

Отметим здесь также работу [58], где изучена модель разрыва вязкопластического слоя между двумя поверхностями не при их сближении, а, наоборот, раздвижении. На смену квазиравновесного процесса деформирования в определенный момент (при некотором найденном аналитически значении скорости деформации) наступает разрыв или "диспергирование" слоя.

Задача о плоскопараллельном вязкопластическом течении при сближении либо раздвижении жестких плит с заданной скоростью решена в [59] в безынерционном приближении тонкого слоя при произвольных параметрах вязкости и предела текучести. Получены аналитические выражения для скорости и давления и найдена граница жесткой зоны внутри области. При заданном законе движения плит определена сила, действующая на плиту конечного размера. Кроме того найдено условие безотрывного раздвижения плит.

7. Удар вязкопластического стержня о жесткую преграду. Одномерная задача об ударе о неподвижную жесткую преграду вязкопластического стержня конечной длины впервые была поставлена в [60]. Показано, что после удара возникают две зоны: в одной из них, примыкающей к преграде, возникает вязкопластическое течение, и поле скоростей удовлетворяет уравнению теплопроводности с неизвестной границей; в другой материал не деформируется. Для решения задачи используется приближенный метод Кармана – Польгаузена. Зона течения сначала увеличивается, а затем начинает уменьшаться, никогда не достигая свободного конца стержня. В некоторый момент эта область исчезает совсем, после чего деформирование прекращается. Схема численного решения данной задачи была позднее предложена в [61]. Численная задача решалась в напряжениях, что дало возможность не выделять линию раздела вязкопластической и жесткой зон. Переход в жесткое состояние при разгрузке после удара учтен в [62], а различие в вязких свойствах при нагрузке и разгрузке в [63].

Удар жесткого тела по вязкоплатическому стержню рассмотрен и в серии работ [64, 65]. Соударение происходит с такой скоростью, что возникают большие пластические деформации. Рассчитаны напряжения для случаев: постоянная скорость удара по полубесконечному и конечному стержню; удар жесткого тела конечной массы по полубесконечному и конечному стержню. Если связь интенсивностей напряжений и скоростей деформаций произвольна, то задача сведена к решению нелинейного параболического уравнения с подвижной границей.

В [66] действительный стержень конечной длины заменен некоторым схематическим, масса которого сосредоточена в конечном числе сечений. Между массами материал лишен инерции, но подчиняется вязкопластическому закону. Задача сведена к последовательному решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений с изменяющимся числом искомых функций. Численные результаты оказались близкими с аналитическими выводами работы [60].

Распространение волн в бесконечном цилиндрическом стержне изучено в [67]. Нелинейные определяющие соотношения линеаризованы путем разложения корня из интенсивности напряжений в ряд Тейлора вблизи некоторого значения. Для подобной среды установлено, что при высоких частотах вязкопластический стержень ведет себя как упругий.

Движение круглой защемленной плиты, вызванное ударом сосредоточенной массы в центре, рассмотрено в [68]. Задача об ударном сжатии вязкопластического образца с постоянным поперечным сечением и массой много меньшей массы бойка решалась в [69].

Классическая работа [70] посвящена распространению малых возмущений в пластической и вязкопластической средах. Линеаризация уравнений состояния проведена вблизи положения, отвечающего предварительному одноосному нагружению тела, при котором материал вышел в пластическую область. Изучено, в частности, распространение осесимметричной продольной гармонической волны в цилиндрическом стержне, внешняя граница которого свободна от напряжений.

В [71, 72] рассмотрена задача динамического деформирования жесткопластической нити, встречающей жесткую матрицу, при действии на нить равномерно распределенного постоянного давления. Получены уравнение свободной части нити и условия в окрестности точки контакта.

Различным вопросам удара вязкопластического цилиндрического стержня конечной либо полубесконечной длины и вязкопластической нити о жесткую преграду посвящены также более поздние теоретические исследования [73–77].

8. Устойчивость вязкопластических течений по отношению к малым возмущениям. Краевые задачи устойчивости даже одномерных течений по отношению к малым либо конечным возмущениям являются неодномерными. При анализе устойчивости стационарных плоскопараллельных сдвигов идеальной или вязкой жидкости, как утверждает теорема Сквайра [78], достаточно ограничиваться двумерными в плоскости сдвига возмущениями. Плоская картина малых вариаций позволяет свести задачу к одному уравнению относительно функции тока, а после отделения множителя $e^{\alpha t}$ к спектральной задаче Рэлея либо Орра – Зоммерфельда.

Сложнее обстоит дело с неньютоновскими и вязкопластическими течениями, где утверждение аналогичное теореме Сквайра уже не имеет место [79, 80], т.е. необходимо исследовать трехмерную картину возмущений. В [80] доказана обобщенная теорема Сквайра, которая формулируется следующим образом.

Обобщенная теорема Сквайра. В случае одномерного стационарного вязкопластического сдвига в плоскости (Ox_1x_3) среди всех нарастающих трехмерных возмущений, удовлетворяющих условию

$$\delta v_{23} = 0 \tag{8.1}$$

всегда можно найти двумерное в той же плоскости (Ox_1x_3), нарастающее с той же скоростью, но при меньшем значении числа Рейнольдса Re и большем значении безразмерного предела текучести τ_s.

Условие (8.1), отсутствующее в случае вязких течений, существенно ограничивает класс возмущений. Заметим, что это условие достаточно, вопрос о том, насколько оно необходимо, остается открытым.

Проблемы устойчивости деформирования вязкопластических тел были впервые затронуты в классических работах [81–83]. Уравнения плоского движения вязкопластического тела представлены в [81] в виде системы двух нелинейных уравнений относительно функции напряжений Ф и функции тока Ψ:

$$L(\Phi)L(\Psi) + 4M(\Phi)M(\Psi) = 0 \tag{8.2}$$

$$\sqrt{L^2(\Phi)+4M^2(\Phi)} - \sqrt{L^2(\Psi)+4M^2(\Psi)} = \varkappa \tag{8.3}$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad M = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

Параметр $\varkappa$ в (8.3), равный отношению предела текучести при сдвиге к динамической вязкости, будучи обезразмеренным, носит название число Ильюшина. Систему (8.2), (8.3) можно свести к одному уравнению четвертого порядка относительно каждой из функций Ф или Ψ. Кроме того система (8.2), (8.3) эквивалентна вариационному принципу минимума мощности внутренних сил.

В [81] дана постановка краевой задачи устойчивости вязкопластического течения относительно малых возмущений (метод Пуанкаре). Линеаризация уравнений движения проведена вблизи основного состояния, причем это состояние считается известным из тех или иных геометрических и физических соображений. Возмущения наложены как на уравнения границы тела, так и на известные кинематические и динамические поля величин внутри области течения. Внешние данные – поверхностные нагрузки и скорости границ – не варьируются. За счет этого система уравнений, которая получается после подстановки фундаментальных решений линеаризованных уравнений движения в граничные условия, снесенные на невозмущенные поверхности, однородна. Выпишем систему двух линеаризованных уравнений относительно возмущений $\delta\Phi$ и $\delta\Psi$ вблизи основного состояния, помечаемого нулевым индексом

$$L(\Phi_0)L(\delta\Psi) + L(\Psi_0)L(\delta\Phi) + 4M(\Phi_0)M(\delta\Psi) + 4M(\Psi_0)M(\delta\Phi) = 0 \tag{8.4}$$

$$\begin{aligned}&\sqrt{L^2(\Psi_0)+4M^2(\Psi_0)}\,[L(\Phi_0)L(\delta\Phi)+4M(\Phi_0)M(\delta\Phi)] = \\ &= \sqrt{L^2(\Phi_0)+4M^2(\Phi_0)}\,[L(\Psi_0)L(\delta\Psi)+4M(\Psi_0)M(\delta\Psi)]\end{aligned} \tag{8.5}$$

Далее в [81] предложен способ нахождения закона движения, т.е. лагранжевых координат каждой частицы тела. В приложениях в качестве основных течений вязкопластической среды выбраны растяжение – сжатие бесконечной полосы и растекание толстостенной полой сферы под действием внутреннего давления. В последнем случае одним из типов возмущений, наложенных на одномерное растекание $v_r^\circ(r, t)$, принимается эксцентриситет внутреннего отверстия трубы. Таким образом, в [81] устойчивость основного движения исследуется относительно малых вариаций начальных данных и геометрии области. Результаты задачи о растяжении – сжатии полосы, полученные в [81], обобщены в [84] с учетом нелинейности скалярного соотношения вязкопластического материала.

Устойчивость вязкопластического течения полосы, круглого прута и круглой пластины изучены в [82, 83] с точки зрения эйлерова подхода. Критерий устойчивости основного движения в этих работах связан с тем, что в любой точке границы тела угол между вектором перемещения в данной точке и вектором возмущения границы должен быть тупым. Если же этот угол острый, то движение по определению считалось неустойчивым. Об устойчивости растяжения полосы и деформирования кольца идет речь также в работах [85] и [86] соответственно.

После выхода в свет работ [81–83] основной интерес отечественных исследователей на время переключился с теории вязкопластического течения на развитие деформационных подходов в теории пластичности. Это объясняется спецификой военного времени и выходом на повестку дня неотложных практических задач, связанных с обороной. А.А. Ильюшин в своем автобиографическом очерке [87] пишет о необходимости "...разобраться в явлениях, происходящих в артиллерийском снаряде при движении по каналу ствола, и обосновать вытекающую из этого возможность коренного изменения, упрощения и удешевления проектирования, расчета, производства и военной приемки снарядов...".

Еще одна классическая задача об устойчивости вращения вязкопластической среды между двумя коаксиальными цилиндрами (течение Куэтта – Тейлора) аналитически исследовалась в [88]. Был сделан вывод о том, что при переходе от ламинарного к турбулентному режиму движение всегда устойчиво, если внутренний цилиндр неподвижен, и всегда неустойчиво, если неподвижен внешний цилиндр. Экспериментально переход к турбулентности в таком течении ранее был обнаружен в [89]. Проблемам центрифугирования и связанной с ними линеаризованной задаче устойчивости относительно малых возмущений вязкопластического течения Куэтта – Тейлора уделено внимание в [90].

Необходимость выбора вязкопластической модели во многих технологических задачах отмечена в работах, где исследовано движение в трубах вязких жидкостей степенного типа, т.е. не учитывается недеформированная зона в середине трубы. Переход же к турбулентности в пуазейлевом течении в круглой трубе с учетом предела текучести материала наступает, когда некоторый безразмерный параметр достигает своего критического значения. На этом основании в [91, 92] выведена зависимость критических чисел Рейнольдса и Хёдстрема. Некоторые критерии, определяющие переход бингамовского течения из ламинарного в турбулентный режимы, обсуждены также в [93].

В [94] рассмотрена устойчивость процесса выдавливания металла через щель в одном из пуансонов, сдавливающих вязкопластический слой. Задача сведена к решению двух задач Римана – Гильберта для аналитических функций. Установлено, что при определенных геометрических параметрах происходит отлипание материала от части поверхности одного из пуансонов, расположенной против щели в другом пуансоне.

Потеря устойчивости вязкопластического течения как невозможность существования стационарного распределения скоростей и температуры в потоке рассмотрена в [95]. Допущено, что вязкость и предел текучести обратно пропорциональны температуре. В [96] под потерей устойчивости вязкопластической трубы под действием внутреннего давления, крутящего момента и осевой силы понимается состояние, когда скорость упрочнения недостаточна для компенсации увеличения напряжений из-за уменьшения толщины трубы.

Конвективная неустойчивость плоского вязкопластического слоя, подогреваемого снизу, рассмотрена в [97]. Для плоскопараллельного движения в слое найдено точное решение задачи. Решение существует, если число Рэлея, определенное по вертикальному градиенту температуры и полуширине слоя, больше некоторой константы. С увеличением числа Рэлея в этой области ширина зоны течения растет, а амплитуда скорости уменьшается. Такое движение неустойчиво относительно малых возмущений. Для возбуждения конвекции из состояния покоя амплитуда возмущения должна превосходить критическое значение, зависящее от безразмерного предела текучести ("жесткое возбуждение неустойчивости").

В [98, 99] изучена устойчивость течения Пуазейля вязкопластического материала относительно малых и конечных возмущений. В области сдвига вблизи границы ядра потока показано, что течение устойчиво по отношению к возмущениям бесконечно малой амплитуды. Возмущение представлено в виде суммы стационарного искажения профиля основного течения и нестационарной части. Получены зависимости числа Re от волнового числа, соответствующего кривой нейтральной устойчивости. Эти же кривые, но для более сложной реологической модели тела (модели Кэссона с показателями m и n) построены для различных значений m и n и размеров жесткой зоны в [100]. Показано, что реология существенно влияет на устойчивость плоского градиентного течения. Гидродинамическая неустойчивость вязкопластического течения Гартмана проанализирована в [101]. Современные численные результаты, относящиеся к устойчивости течения Пуазейля бингамовского материала, содержатся в [102].

В [103, 104] даны попытки определения условий перехода из ламинарного режима в турбулентный для вязкопластического тела с трехконстантным уравнением Балкли – Гершеля. Введен так называемый локальный параметр устойчивости, критическое значение которого определено по потере устойчивости ньютоновской жидкости. Указано, при каких показателях степенного закона малые значения τ_s стабилизируют ламинарное течение, а при каких наблюдается обратное.

Полуэмпирическое описание турбулентного режима вязкопластического течения в круглой трубе дано в [105]. Полученные зависимости для осредненных скоростей и коэффициента гидродинамического сопротивления являются обобщением известных полуэмпирических соотношений для ньютоновских жидкостей.

Потеря устойчивости развитого течения вязкопластической среды в трубе изучена в [106]. На основе анализа поведения малых возмущений численно найдено критическое число Re, хорошо согласующееся с экспериментальным значением, когда радиус жесткой зоны превышает 0,6 радиуса трубы. В более поздней работе этих же авторов [107] для описания турбулентного течения вязкопластических тел предложена определенная модель ("k–ε-модель").

Анализ неустойчивости простого сдвига вязкопластического материала, обладающего свойством деформационного разупрочнения, выполнен в [108]. Предложена методика решения линеаризованной начально-краевой задачи и устойчивости невозмущенного процесса деформирования на конечном интервале времени. Основную роль играют два безразмерных коэффициента, один из которых определяет вязкие свойства, а другой кинематику деформации. Установлены соотношения подобия между этими коэффициентами.

Теоретический анализ устойчивости некоторых сдвиговых течений термовязкопластического материала со смешанными граничными условиями, связывающими тепловые и механические параметры, дан в [109]. Такого типа решения используются при моделировании тектонических явлений в литосфере и на границах литосферных плит. Здесь важно обосновать выбор тех или иных граничных условий применительно к разным геофизическим задачам.

В цикле работ [110, 111] предположено, что весомая слоистая вязкопластическая среда голономно диссипативна, и с использованием вариационного принципа [3] в ортогональной криволинейной системе координат выведены основные соотношения теории устойчивости. Изучены задачи об устойчивости осесимметричного течения двухслойной круглой пластины и растекании полого шара под действием внутреннего давления.

Устойчивость некоторых двухслойных сдвигов вязкопластического материала проанализирована в [112, 113]. В [112] речь идет о двухслойном течении по наклонной плоскости и устойчивости к малым двумерным возмущениям данного течения. В длинноволновом приближении получены значения критических чисел Re и изучено влияние предела текучести τ_s на устойчивость. В [113] исследована линеаризованная устойчивость поверхности раздела между двумя бингамовскими телами в прямолинейном канале под действием градиента давления. Результаты численных расчетов указывают на стабилизирующее влияние на поверхность раздела увеличения предела текучести. При дискретизации задачи использованы разложения по многочленам Чебышева.

Линеаризованная задача устойчивости плоскопараллельного сдвига вязкопластического слоя $0 < x_3 < 1$ (картина возмущений двумерная в плоскости слоя (Ox_1x_3)) в случае отсутствия жестких прослоек по толщине может быть сведена к одному уравнению относительно амплитуды φ функции тока ψ, т.е. $\psi(x_1, x_3, t) = \varphi(x_3)\exp(isx_1 + \alpha t)$, [80, 114]:

$$\varphi^{IV} - 2s^2\varphi'' + s^4\varphi - 4\varkappa s^2\left(\frac{\varphi'}{|v^{\circ\prime}|}\right)' = is\left[\left(v^{\circ} - \frac{i\alpha}{s}\right)(\varphi'' - s^2\varphi) - v^{\circ\prime\prime}\varphi\right]\mathrm{Re}, \quad \alpha \in C \tag{8.6}$$

и граничным условиям

$$x_3 = 0, \quad x_3 = 1: \quad \varphi = \varphi' = 0 \tag{8.7}$$

Здесь $v^{\circ}(x_3)$ – профиль скорости невозмущенного течения, $\varkappa$ – число Ильюшина. Последнее слагаемое в левой части (8.6) учитывает влияние пластических свойств материала по сравнению с вязкими. Без этого слагаемого соотношение (8.6) совпадает с известным уравнением Орра – Зоммерфельда. Система (8.6), (8.7) названа в [80] обобщенной задачей Орра – Зоммерфельда. В случае же наличия жестких прослоек и изменения их границ в возмущенном движении с плоских на криволинейные вместо условий (8.7) необходимо выписывать условия на границах жестких зон. Краевая задача при этом существенно усложняется [80].

В [115] на основе методов интегральных соотношений (см., например, [116]) в комплекснозначном гильбертовом пространстве H_2 даны верхние оценки действительной части собственного значения α и соответственно нижние оценки критического числа Рейнольдса в зависимости от $\varkappa$. Эти достаточные оценки устойчивости свидетельствуют о стабилизирующей роли параметра пластичности в сравнении с вязкими течениями. Аналогичные энергетические (вариационные) оценки устойчивости для вязкопластического течения Куэтта – Тейлора выведены в [117], а для процесса диффузии вихревого слоя в вязкопластической полуплоскости в случаях тангенциального разрыва скорости либо касательного напряжения – в [118].

В цикле работ [119–125] методы интегральных соотношений получили дальнейшее развитие применительно к задачам устойчивости вязкопластических тел с учетом: нестационарности основного течения; двумерной и трехмерной кинематики основного течения; достаточно произвольного скалярного определяющего соотношения среды; слабой неоднородности, т.е. малой вариации плотности и функции упрочнения (в частности, вязкости и предела текучести) при переходе от однородного основного течения к неоднородному возмущенному.

Во всех перечисленных случаях на основное течение наложена трехмерная картина возмущений, и ограничения типа (8.1), предъявляемые обобщенной теоремой Сквайра, можно опустить.

Важным самостоятельным разделом в тематике устойчивости процессов вязкопластического деформирования является бифуркация и потеря устойчивости конструкций и составных тел. В [126–128] исследовано осесимметричное прощелкивание цилиндрической оболочки из материала с линейным скалярным соотношением под действием радиальной импульсной нагрузки. В [129] аналогичная задача решена для сферической оболочки, но с учетом неосесимметричных возмущений. В частности, найдено влияние меридионального перемещения на значение критического импульса и на критические моды. В наиболее полной постановке задача о динамической потере устойчивости вязкопластической оболочки (с учетом неосесимметричности, произвольности скалярного соотношения материала, наличия температурного поля) исследована в [130].

В [131] исследовано явление неустойчивого формоизменения металлов и полимеров при больших деформациях, которое заключается в образовании и развитии полос сдвига ("shear bands"). Эта стадия переходная от устойчивого деформирования к разрушению. На примере термовязкопластического течения Куэтта (упругие деформации не учитываются) в замкнутой форме получены критические условия локализации сдвига. В случае более общего плоского движения начало локализации полос сдвига рассмотрено в [132]. Установлены критические условия их образования, наиболее вероятные направления развития, а также получены оценки скорости роста зарождающихся полос сдвига. Полосам сдвига как проявлению неустойчивости посвящены работы [133, 134].

В [135] исследовано зарождение и развитие шейки в круглом полимерном образце из вязкопластического материала при одноосном растяжении. Начало образования шейки обусловлено введением начальных геометрических возмущений. С помощью метода конечных элементов найдено распределение напряжений на разных стадиях нагружения и эволюция профиля образца.

Математическим аспектам существования, единственности и устойчивости решений краевых задач вязкопластичности посвящены работы [136–140]. В [141, 142] уравнения движения вязкопластической и термовязкопластической сред с произвольными скалярными соотношениями проанализированы с точки зрения их групповых свойств (см. также [143]). Получен полный набор инвариантных решений первого ранга. В [142] построены решения некоторых задач о течении и теплообмене в ограниченных областях, в полуплоскости и в бесконечной среде при движении цилиндра. Точно решена автомодельная задача о вращении тонкого стержня с постоянным теплоотводом в теплопроводной вязкопластической среде. В [141] рассмотрена задача о продольно-поперечном движении среды со степенной зависимостью интенсивностей напряжений и скоростей деформаций. Современный обзор инвариантных свойств уравнений термовязкопластичности с различными скалярными определяющими соотношениями дан в [144].

Рассматривая перспективные направления в фундаментальном изучении поведения вязкопластических тел под нагрузкой, выделим две задачи. Первая из них связана с перемешиванием вязкопластических структур под действием периодических нагрузок и поведением жестких ядер в таком процессе. Несмотря на то, что глобальное перемешивание является тематикой многих конференций и других научных мероприятий в последнее время, остаются вопросы даже на уровне определений: что математически означает, произошло ли к моменту t перемешивание или еще нет? Отметим здесь работу [145], привлекающую методы аналитической механики гамильтоновых систем и хаоса к исследованию данных процессов. В ней описан метод построения усредненного гамильтониана автономной системы, не требующий находить нелинейные замены переменных в канонических уравнениях Гамильтона, что обычно представляет трудоемкую задачу. Введено понятие стробоскопически усредненного гамильтониана, который можно вычислять в виде разложений по малому параметру из решения некоторой системы уравнений. Развитие данного метода приведено в [146].

Вторая задача связана с подходом к описанию даже однородного вязкопластического материала как к композиту, у которого зона течения и жесткое ядро формально являются компонентами с различными физико-механическими, тепловыми и химическими свойствами, а граница раздела имеет фрактальную структуру [147, 148]. Этим задачам и проблемам, рассмотренным в [149, 150] предстоит уделить внимание в ближайшем будущем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 99-01-00125, 99-01-00250).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воларович М.П.* Исследование реологических свойств дисперсных систем // Коллоид. ж. 1954. Т. 16. № 3. С. 227–240.
2. *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
3. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Вариационные методы в теории течений жестковязкопластических сред. М.: Изд-во МГУ, 1971. 114 с.
4. *Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х.* Нестационарные движения вязкопластических сред. М.: Наука, 1977. 373 с.
5. *Bird R.B., Dai G.C., Yarusso B.J.* The rheology and flow of viscoplastic materials // Rev. Chem. Engng. 1982. V. 1. No. 1. P. 1–70.

6. *Chhabra R.P., Uhlherr P.H.T.* Static equilibrium and motion of spheres in viscoplastic liquids // Encyclopedia of Fluid Mechanics. V. 7. Rheology and Non-Newton. Flows. Houston: Gulf. Publ., 1988. P. 611–633.
7. *Ionescu I.R., Sofonea M.* Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity. N.-Y.: Clarendon Press; Oxford Univ. Press, 1993. 288 p.
8. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: Изд-во "УРСС", 1998. 176 с.
9. *Тябин Н.В.* Течение вязкопластической жидкой дисперсной системы в диффузоре и погружение клина в дисперсную систему // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84. № 5. С. 943–946.
10. *Тябин Н.В., Пудовкин М.А.* Течение вязкопластической дисперсной системы в коническом диффузоре // Докл. АН СССР. 1953. Т. 92. № 1. С. 53–56.
11. *Воларович М.П., Лазовская Н.В.* Исследование течения торфа в конических насадках // Докл. АН СССР. 1951. Т. 76. № 2. С. 211–213.
12. *Лазовская Н.В.* Исследование кинематики течения дисперсных систем (торфа, консистентных смазок и т.п.) в конических насадках // Коллоид. ж. 1949. Т. 11. № 2. С. 77–83.
13. *Ким А.Х., Воларович М.П.* Плоская задача о движении вязкопластичной дисперсной системы между двумя плоскостями, составляющими острый угол // Коллоид. ж. 1960. Т. 22. № 2. С. 186–194.
14. *Сугак М.Б.* Движение вязкопластичной массы между двумя коаксиальными конусами // Инж.-физ. ж. 1966. Т. 11. № 6. С. 802–808.
15. *Гуткин А.М.* Медленное течение вязкопластичной дисперсной среды в коническом и плоском диффузорах при малом угле раствора // Коллоид. ж. 1961. Т. 23. № 3. С. 352.
16. *Колбовский Ю.Я., Шанин Н.П., Хранин В.Н.* К вопросу о течении неньютоновской жидкости в коническом и плоском диффузорах // Научн. тр. Ярослав. технол. ин-та. 1972. Т. 31. С. 102–106.
17. *Лапушина Б.И., Ким А.Х.* Приближенное решение задачи стационарного изотермического течения вязкопластической среды в плоском параболическом диффузоре вариационным методом // Теоретическая и прикладная механика. Минск: Вышэйша школа, 1975. Вып. 1. С. 17–20.
18. *Чернышов А.Д.* О течениях в клине вязкопластической среды с нелинейной вязкостью // ПМТФ. 1966. № 4. С. 152–154.
19. *Чернышов А.Д.* Установившееся течение вязкопластической среды между двумя соосными конусами и внутри двугранного угла // ПМТФ. 1970. № 5. С. 93–99.
20. *Чернышов А.Д.* О движении вязкопластической среды внутри двугранного угла // Прикл. механика. 1971. Т. 7. № 1. С. 120–124.
21. *Camenschi G., Cristescu N., Şandru N.* Development in highspeed viscoplastic flow through conical converging dies // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. No. 3. P. 566–570.
22. *Walicki E., Walicka A.* An approximate analysis for conical flow of viscoplastic fluids // Zecz. nauk. Bud. WSI Zielonej Gorze. 1994. No. 106. S. 197–217.
23. *Котова Л.И., Дерягин Б.В.* Теория качения цилиндра по поверхности, покрытой слоем пластичной смазки // Ж. техн. физ. 1957. Т. 27. № 6. С. 1261–1271.
24. *Котова Л.И.* Теория качения цилиндра по поверхности, покрытой слоем вязкопластичной смазки // Ж. техн. физ. 1957. Т. 27. № 7. С. 1540–1557.
25. *Виноградов Г.В., Мамаков А.А., Павлов В.П.* Течение аномально-вязких систем при действии двух чистых сдвигов во взаимно-перпендикулярных направлениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 2. С. 362–365.
26. *Мамаков А.А., Тябин Н.В., Виноградов Г.В.* Применение теории подобия к расчету процессов течения пластичных смазок в трубах // Коллоид. ж. 1959. Т. 21. № 2. С. 208–215.
27. *Osterle J.F., Charnes A., Saibel E.* The rheodynamic squeezefilm // Lubricat. Engng. 1956. V. 12. No. 1. P. 33–36.
28. *Chakrabarti R.K., Harker R.J.* Frictional resistance of a radially-loaded journal bearing with grease lubrication // Lubricat. Engng. 1960. V. 16. No. 6. P. 274–280.
29. *Тябин Н.В.* Реодинамическая теория вязкопластической смазки // Тр. Казан. сельхоз. ин-та. 1958. Вып. 39. С. 132–150.
30. *Конев С.В.* Гидродинамическая изотермическая задача качения цилиндрических поверхностей со скольжением при пластической смазке // Проблемы трения и изнашивания. Киев: Техніка, 1986. Вып. 30. С. 16–18.

31. *Колмогоров В.Л., Колмогоров Г.Л.* Течение вязкопластической смазки при волочении в режиме гидродинамического трения // Изв. вузов. Черная металлургия. 1968. № 2. С. 67–72.
32. *Vinogradov G.V., Mamakov A.A.* Flow of greases under the action of complex shear // Trans. ASME. Ser. F.J. Lubr. Technol. 1968. V. 90. No. 3. P. 604–607.
33. *Матвеевский Р.М., Лахши В.Л., Буяновский И.А. и др.* Смазочные материалы: Антифрикционные и противоизносные свойства. Методы испытаний. М.: Машиностроение, 1989. 217 с.
34. *Wu C.W., Sun H.X.* A new hydrodynamic lubrication theory for bilinear rheological fluids // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1995. V. 56. No. 3. P. 253–256.
35. *Яблонский В.О., Тябин Н.В., Ящук В.М.* Применение вязкопластичных смазок в гидростатических опорах с целью улучшения их основных эксплуатационных характеристик // Вестн. машиностр. 1995. № 3. С. 11–14.
36. *Гуткин А.М.* Течение вязкопластичной дисперсной системы на вращающемся диске // Коллоид. ж. 1960. Т. 22. № 5. С. 573–575.
37. *Гуткин А.М.* Течение вязкопластичной дисперсной системы на вращающемся конусе // Коллоид. ж. 1962. Т. 24. № 3. С. 283–288.
38. *Matsumoto S., Takashima Y., Kamlya T., Kayano A., Ohta Y.* Film thickness of a Bingham liquid on a rotating disk // Industr. and Engineer. Chem. Fundamentals. 1982. V. 21. No. 3. P. 198–202.
39. *Jenekhe S.A., Schuldt S.B.* Flow and film thickness of Bingham plastic liquids on a rotating disk // Chem. Engng. Communs. 1985. V. 33. No. 1–4. P. 135–147.
40. *Fan Chun.* Flow of viscoplastic fluid on a rotating disk // Appl. Math. and Mech. 1994. V. 15. No. 5. P. 447–453.
41. *Burgess S.L., Wilson S.D.R.* Spin-coating of a viscoplastic material // Phys. Fluids. 1996. V. 8. No. 9. P. 2291–2297.
42. *Дудко А.С.* Влияние стока конечного размера на вращение линейной вязкопластичной среды // Гидромеханика. Киев: Наукова думка, 1989. Т. 59. С. 44–49.
43. *Георгиевский Д.В.* Задача устойчивости квазилинейных течений относительно возмущений функции упрочнения // ПММ. 1999. Т. 63. № 5. С. 826–832.
44. *Paslay P.R., Slibar A.* Laminar flow of drilling mud due to axial pressure gradient and external torque // J. Petrol. Technology. 1957. V. 9. No. 11. P. 310–317.
45. *Paslay P.R., Slibar A.* Criterion for flow of a Bingham plastic between two cylinders loaded by torque and pressure gradient // J. Appl. Mech. 1958. V. 25. No. 2. P. 284–285.
46. *Мясников В.П.* Течение вязкопластической среды при сложном сдвиге // ПМТФ. 1961. № 5. С. 76–87.
47. *Бостанджиян С.А., Столин А.М.* Сложный сдвиг вязкопластической жидкости между двумя параллельными пластинами // Теоретическая и инструментальная реология. Минск, 1970. С. 107–118.
48. *Магомедов О.Б., Победря Б.Е.* Некоторые задачи вязкоупругопластического течения // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып. 4. С. 152–169.
49. *Bittleston S.H., Hassager O.* Flow of viscoplastic fluids in a rotating concentric annulus // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1992. V. 42. No. 1–2. P. 19–36.
50. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М.* Об одном методе исследования пространственных течений вязкопластичных сред // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 150–158.
51. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Петров А.Г., Чесноков В.М.* Плоское течение вязкопластичных сред в узких каналах с деформируемыми стенками // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 23–31.
52. *Мясников В.П.* О сдавливании вязкопластического слоя жесткими плитами // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 4. С. 92–96.
53. *Гасанов Г.Т., Гасанзаде Н.А., Мирзаджанзаде А.Х.* Сдавливание вязкопластического слоя круглыми пластинками // ПМТФ. 1961. № 5. С. 88–90.
54. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Петров А.Г., Чесноков В.М.* Течение вязкопластичной среды между круглыми параллельными пластинами при их сближении и удалении // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 9–17.
55. *Zwick K.J., Ayyaswamy P.S., Cohen I.M.* Variational analysis of the squeezing flow of a yield stress fluid // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1996. V. 63. No. 2–3. P. 179–199.

56. *Sherwood J.D., Durban D.* Squeeze flow of a power-law viscoplastic solid // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1996. V. 62. No. 1. P. 35–54.
57. *Lanos C., Dustens A.* Rhéométrie des écoulements entre plateaux parallèles: Réflexions // Europ. J. Mech. Engng. 1994. V. 39. No. 2. P. 77–89.
58. *Тихонов В.П., Гуляев С.А., Семенюта С.С.* О разрыве слоя вязкопластической жидкости между двумя поверхностями // Коллоид. ж. 1993. Т. 55. № 4. С. 104–109.
59. *Петров А.Г.* Плоская задача о выдавливании вязкопластичной среды параллельными пластинами под действием постоянной силы // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 608–617.
60. *Ишлинский А.Ю., Баренблатт Г.И.* Об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 4. С. 734–737.
61. *Гаипова А.Н.* Разностный метод решения задачи об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду // Инж. ж. МТТ. 1968. № 1. С. 128–130.
62. *Кузин П.А.* Продольный удар по вязкопластическому стержню // Инж. ж. МТТ. 1968. № 5. С. 94–97.
63. *Шапиро Г.С., Шачнев В.А.* О динамическом поведении вязкопластического тела, обладающего необратимой вязкостью // Волны в неупругих средах. Кишинев: Изд-во МолдССР, 1970. С. 215–220.
64. *Symonds P.S., Ting T.C.T.* Longitudinal impact on viscoplastic rods: approximate methods and comparisons // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1964. V. 31. No. 4. P. 611–620.
65. *Ting T.C.T., Symonds P.S.* Impact on rods of non-linear viscoplastic material – numerical and approximate solutions // Intern. J. Solids and Structures. 1967. V. 3. No. 4. P. 587–605.
66. *Ишлинский А.Ю., Слепцова Г.П.* К вопросу об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду // Прикл. механика. 1965. Т. 1. № 2. С. 1–9.
67. *Bejda J., Wierzbicki T.* Dispersion of small amplitude stress waves in pre-stressed elastic, viscoplastic cylindrical bars // Quart. Appl. Math. 1966. V. 24. No. 1. P. 63–71.
68. *Kelly J.M., Wierzbicki T.* Motion of a circular viscoplastic plate subject to projectile impact // ZAMP. 1967. B. 18. No. 2. S. 236–246.
69. *Мехтиев А.К.* О сжатии ударом цилиндрического образца при нелинейной зависимости напряжения от скорости деформации // Статические и динамические задачи теории упругости и пластичности. Баку: Изд-во АзССР, 1968. С. 90–95.
70. *Williams R.A., Malvern L.E.* Harmonic dispersion analysis of incremental waves in uniaxially prestressed plastic and viscoplastic bars, plates, and unbounded media // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. No. 1. P. 59–64.
71. *Токбергенов Дж.Б.* Динамическое деформирование вязкопластической нити // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1973. № 1. С. 72–76.
72. *Никитин Л.В., Токбергенов Дж.Б.* Взаимодействие с матрицей вязкопластической динамически деформируемой нити // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1974. № 3. С. 58–61.
73. *Fasano A., Primicerio M.* Viscoplastic impact of a rod on a wall // Bol. Unione mat. ital. 1975. T. 11. No. 3. P. 531–553.
74. *Гонор А.Л., Куцаев С.Н.* Исследование соударения вязкопластического тела с жесткой преградой при произвольном угле встречи // Научн. тр. Всес. заоч. машиностроит. ин-та. 1976. Т. 38. С. 62–70.
75. *Nicholson D.W.* Adiabatic temperature rise in a viscoplastic rod under impact // Mech. Res. Commun. 1984. V. 11. No. 5. P 317–327.
76. *Джафарли А.Г.* Нелинейные вязкопластические волны в нитях при их пространственном движении // Докл. АН АзССР. 1986. Т. 42. № 1. С. 16–19.
77. *Нуриев Б.Р.* Поперечный удар конусом по вязкопластической нити с большими скоростями // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-хим. и мат. н. 1986. Т. 7. № 3. С. 58–63.
78. *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 350 с.
79. *Гарифуллин Ф.А., Галимов К.З.* О гидродинамической устойчивости неньютоновских сред // Прикл. механика. 1974. Т. 10. № 8. С. 3–25.
80. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость двумерных и трехмерных вязкопластических течений и обобщенная теорема Сквайра // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 117–123.
81. *Ильюшин А.А.* Деформация вязкопластичных тел // Учен. зап. МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. С. 3–81.
82. *Ишлинский А.Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения круглой пластины // ПММ. 1943. Т. 7. № 6. С. 405–412.

83. *Ишлинский А.Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута // ПММ. 1943. Т. 7. № 2. С. 109–130.
84. *Кеппен И.В., Родионов С.Ю.* Растяжение – сжатие полосы из нелинейного вязкопластического материала // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 97–105.
85. *Дементьев О.Н., Карась Е.В.* Устойчивость растяжения прямоугольной полосы // Вестн. Челяб. ун-та. Сер. Математика и механика. 1991. № 1. С. 121–128.
86. *Сериков С.В.* Об устойчивости течения плоского пластического кольца со свободными границами // ПМТФ. 1975. № 2. С. 94–101.
87. *Ильюшин А.А.* Динамика // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1994. № 3. С. 79–87.
88. *Астрахан И.М.* Устойчивость вращательного движения вязкопластичной жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами // ПМТФ. 1961. № 2. С. 47–53.
89. *Михайлов Н.В., Ребиндер П.А.* О структурно-механических свойствах дисперсных и высокомолекулярных систем // Коллоид. ж. 1955. Т. 17. № 2. С. 107–119.
90. *Георгиевский Д.В.* Об устойчивости вращения набора вязкопластических слоев в центрифугах // Математические методы в механике. М.: Изд-во МГУ, 1990. С. 105–109.
91. *Hanks R.W.* The laminar-turbulent transition for fluids with a yield stress // AIChE J. 1963. V. 9. No. 3. P. 306–309.
92. *Лещий Н.П.* Переход от ламинарного к турбулентному режиму течения для нелинейных вязкопластичных жидкостей // Гидравлика и гидротехника. Киев: Техніка, 1981. Вып. 33. С. 81–86.
93. *Alexandru S.* Caracterizarea tranziţiei de la regimul laminar la cel turbulent de curgere pentru fluide nenewtoniene // Rev. Chim. 1993. V. 44. No. 7. P. 676–682.
94. *Приказчиков Г.П.* Об устойчивости течения вязкопластической среды между плоскостями со щелью // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1964. № 3. С. 51–55.
95. *Беломытцев В.П., Гвоздков Н.Н.* О потере тепловой устойчивости движения вязкопластического материала // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170. № 2. С. 305–307.
96. *Storakers B.* Plastic and visco-plastic instability of a thin tube under internal pressure, torsion and axial tension // Intern. J. Mech. Sci. 1968. V. 10. No. 6. P. 519–529.
97. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* О конвективной устойчивости жидкости Бингама // Докл. АН СССР. 1973. Т. 208. № 1. С. 63–65.
98. *Павлов К.Б., Романов А.С., Симхович С.Л.* Гидродинамическая неустойчивость пуазейлева течения неньютоновской вязкопластической жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 6. С. 152–154.
99. *Павлов К.Б., Романов А.С., Симхович С.Л.* Устойчивость пуазейлева течения вязкопластической жидкости по отношению к возмущениям конечной амплитуды // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 166–169.
100. *Симхович С.Л., Романов А.С., Ионочкина Л.И.* Гидродинамическая устойчивость плоского градиентного течения обобщенной нелинейной вязкопластической жидкости // Инж.-физ. ж. 1983. Т. 45. № 1. С. 60–64.
101. *Павлов К.Б., Романов А.С., Симхович С.Л.* Гидродинамическая устойчивость течения Гартмана неньютоновской вязкопластической жидкости // Магнитн. гидродинамика. 1974. № 4. С. 43–46.
102. *Frigaard I.A., Howison S.D., Sobey I.J.* On the stability of Poiseuille flow of a Bingham fluids // J. Fluid Mech. 1994. V. 263. P. 133–150.
103. *Фройштетер Г.Б., Накорчевский А.И., Синицын В.В., Цецохо Э.И.* Потеря устойчивости ламинарной формы движения при течении пластичных смазок в капиллярах // Прикладная реология. Минск: Изд-во ин-та тепло- и массообмена АН БССР, 1970. Т. 2. С. 135–146.
104. *Hanks R.W., Ricks B.L.* Laminar-turbulent transition in flow of pseudoplastic fluids with yield stresses // J. Hydronaut. 1974. V. 8. No. 4. P. 163–166.
105. *Литвинов А.И.* Полуэмпирическое описание турбулентности вязкопластичных жидкостей // Изв. АН УзССР. Сер. техн. 1975. № 5. С. 46–50.
106. *Nakamura M., Sawada T.* Theoretical study on turbulence transition of Bingham plastic fluid in a pipe // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1985. B51. No. 465. P. 1642–1647.
107. *Nakamura M., Sawada T.* A $k-\varepsilon$ model for the turbulent analysis of Bingham plastic fluid // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1986. B52. No. 479. P. 2544–2551.

108. *Burns T.J.* Similarity and bifurcation in unstable viscoplastic solids // SIAM J. Appl. Math. 1989. V. 49. No. 1. P. 314–329.
109. *Leroy Y.M., Molinari A.* Stability of steady states in shear zones // J. Mech. and Phys. Solids. 1992. V. 40. No. 1. P. 181–212.
110. *Ержанов Ж.С., Егоров А.К., Жантаев Ж.Ш.* Устойчивость вязкопластического течения весомой слоистой среды // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1981. № 1. С. 17–23.
111. *Ержанов Ж.С., Егоров А.К.* Устойчивость вязкопластического течения полого толстостенного шара // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1984. № 1. С. 34–38.
112. *Wang P.G., Wang Z.D.* The analysis of stability of Bingham fluid flowing down an inclined plane // Appl. Math. and Mech. 1995. V. 16. No. 10. P. 1013–1018.
113. *Pinarbasi A., Liakopoulos A.* Stability of two-layer Poiseuille flow of Carreau-Yasuda and Bingham-like fluids // J. Non-Newton. Fluid. Mech. 1995. V. 57. No. 2–3. P. 227–241.
114. *Георгиевский Д.В.* Линеаризованная задача устойчивости вязкопластических тел с произвольным скалярным соотношением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1992. № 6. С. 65–67.
115. *Георгиевский Д.В.* Достаточные интегральные оценки устойчивости вязкопластического сдвига // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 124–131.
116. *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 25. С. 3–89.
117. *Георгиевский Д.В.* Вязкопластическое течение Куэтта–Тейлора: распределение жестких зон и устойчивость // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 101–106.
118. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость нестационарного сдвига вязкопластической полуплоскости с тангенциальным разрывом вдоль границы // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1996. № 3. С. 65–72.
119. *Георгиевский Д.В.* Оценки устойчивости нестационарного деформирования вязкопластических тел в плоских областях // Докл. РАН. 1996. Т. 346. № 4. С. 471–473.
120. *Георгиевский Д.В.* Интегральные оценки устойчивости нестационарного деформирования трехмерных тел со сложной реологией // Докл. РАН. 1997. Т. 356. № 2. С. 196–198.
121. *Георгиевский Д.В.* Метод интегральных соотношений в задачах устойчивости нелинейных течений с заданной на границе кинематикой // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 102–113.
122. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость процессов деформирования по наборам мер относительно заданных классов возмущений // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 69–92.
123. *Георгиевский Д.В.* Общие оценки развития возмущений в трехмерных неоднородных скалярно нелинейных течениях // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 6. С. 90–97.
124. *Georgievskii D.V.* Viscoplastic stratified composites: shear flows and stability // Proc. NATO ASI "Mechanics of Composite Materials and Structures". V. III. Troia (Portugal), 1998. NATO ASI, Lisboa, 1998. P. 315–324.
125. *Георгиевский Д.В., Климов Д.М.* Энергетический анализ развития кинематических возмущений в слабонеоднородных вязких жидкостях // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 56–67.
126. *Florence A.L.* Buckling of viscoplastic cylindrical shells due to impulsive loading // AIAA Journal. 1968. V. 6. No. 3. P. 532–537.
127. *Wojewòdzki W.* Buckling of short viscoplastic cylindrical shells subjected to radial impulse // Intern. J. Non-Linear Mech. 1973. V. 8. No. 4. P. 325–343.
128. *Florence A.L., Abrahamson G.R.* Critical velocity for collapse of viscoplastic cylindrical shells without buckling // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. No. 1. P. 89–94.
129. *Wojewòdzki W., Lewiǹski P.* Viscoplastic axisymmetrical buckling of spherical shell impulse subjected to radial pressure // Engng. Struct. 1981. V. 3. No. 3. P. 168–174.
130. *Bukowski R., Wojewòdzki W.* Dynamic buckling of viscoplastic spherical shell // Intern. J. Solids and Structures. 1984. V. 20. No. 8. P. 761–776.
131. *Molinari A., Clifton R.J.* Analytical characterization of shear localization in thermoviscoplastic materials // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1987. V. 54. No. 4. P. 806–812.
132. *Anand L., Kim K.H., Shawki T.G.* Onset of shear localization in viscoplastic solids // J. Mech. and Phys. Solids. 1987. V. 35. No. 4. P. 407–429.
133. *Vardoulakis I.G.* Stability and bifurcation in geomechanics // Proc. 6th Intern. Conf. on Numerical

Methods in Geomechanics. Innsbruck, 1988. V. 1. Rotterdam; Brookfield: Baekema, 1988. P. 155–168.
134. *Wang L.L.* A criterion of thermo-viscoplastic instability for adiabatic shearing // Proc. Intern. Symp. on Intense Dynam. Loading and Effects. Beijing, 1986. Oxford, 1988. P. 787–792.
135. *Tugcu P., Neale K.W.* Analysis of neck propagation in polymeric fibres including the effects of viscoplasticity // Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol. 1988. V. 110. No. 4. P. 395–400.
136. *Расулов Т.М.* Решение смешанной задачи для линеаризованной системы уравнений движения вязкопластических сред // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 9. С. 1610–1617.
137. *Atkinson C., El-Ali K.* Some boundary value problem for the Bingham model // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1992. V. 41. No. 3. P. 339–363.
138. *Beverly C.R., Tanner R.I.* Numerical analysis of three-dimensional Bingham plastic flow // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1992. V. 42. No. 1–2. P. 85–115.
139. *Ladyzhenskaya O.A., Seregin G.A.* On a global stability of the two-dimensional viscoplastic flows // Jyväskylä – St. Petersburg Seminar on Partial Differ. Equat. and Numer. Meth. Rept. 56. Univ. Jyväskylä, 1993. P. 43–52.
140. *Ladyzhenskaya O.A., Seregin G.A.* On semigroups generated by initial-boundary value problems describing two-dimensional viscoplastic flows // Nonlinear Evolution Equations. AMS Transl. Ser. 2. V. 164. AMS. Providence, 1995. P. 99–123.
141. *Ленский Э.В.* О групповых свойствах уравнения движения нелинейной вязкопластической среды // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1966. № 5. С. 116–125.
142. *Леонова Э.А.* Групповая классификация и инвариантные решения уравнений течения и теплообмена вязкопластической среды // ПМТФ. 1966. № 4. С. 3–18.
143. *Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашов С.И.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1985. 142 с.
144. *Леонова Э.А.* Инвариантные свойства уравнений термовязкопластичности с неполной информацией о свойствах среды // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1993. Ч. 1. С. 55–87.
145. *Петров А.Г.* Об усреднении гамильтоновых систем с периодическим по времени гамильтонианом // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 4. С. 483–488.
146. *Петров А.Г.* О движении частиц несжимаемой среды в области с периодически изменяющейся границей. Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 12–19.
147. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
148. *Победря Б.Е.* О фракталах в механике. Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2000. № 1. С. 40–44.
149. *Климов Д.В., Нестеров С.В., Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакшев С.А.* Течение вязкопластической среды с малым пределом текучести в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2000. Т. 375. № 1. С. 37–41.
150. *Громов В.Г.* Неустойчивость и вторичные течения вязкопластических тел // Проблемы механики деформ. твердого тела. Калинин: Изд-во Калинин. гос. ун-та, 1986. С. 110–120.

Москва

Поступила в редакцию
23.12.1999