

УДК 539.3

© 2001 г. И.А. БРИГАДНОВ

## ОЦЕНКА НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ ТЕЛ

В работе формулируется и численно исследуется вариационная задача предельного анализа нелинейно упругого тела, потенциал которого имеет линейный рост по модулю тензора дисторсии. В рамках поставленной задачи оценивается предельная нагрузка, т.е. величина внешних "мертвых" сил, выше которой не существует никакой статически определенной деформированной конфигурации, устойчивой к конечным вариациям отображения. Дополнительно формулируется задача оптимизации формы нелинейно упругого тела максимальной несущей способности при заданных внешних воздействиях.

Поставленные задачи относятся к классу вариационных проблем с интегральным функционалом линейного роста. Такие задачи нуждаются в расширении множества допустимых полей с целью учета возможных разрывов. В работе используется частичная релаксация вариационной проблемы предельного анализа, основанная на специальной конечноэлементной аппроксимации, допускающей поля с разрывами типа проскальзывания. В результате исходная задача сводится к нелинейной системе алгебраических уравнений, глобальная матрица жесткости которой может оказаться плохообусловленной.

Для численного решения разрешающей системы алгебраических уравнений используется метод адаптивной блочной релаксации, нечувствительный к числу обусловленности глобальной матрицы жесткости. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, показывающие качественное преимущество предлагаемого подхода по сравнению со стандартными методами, основанными на непрерывной конечно-элементной аппроксимации.

**1. Постановка задачи предельного анализа в нелинейной теории упругости.** Пусть твердое тело в отсчетной (недеформированной) конфигурации занимает область  $\Omega \subset R^3$ . В актуальной (деформированной) конфигурации каждая точка  $x \in \bar{\Omega}$  переходит в положение  $X(x) = x + u(x) \in R^3$ , где  $X$  – отображение, а  $u$  – перемещение. Рассматриваются обратимые и сохраняющие ориентацию отображения с градиентом (тензором дисторсии)  $Q(X) = \nabla X : \Omega \rightarrow M^3$  такие, что  $\det(Q) > 0$  в  $\Omega$ , где  $M^3$  – пространство вещественных матриц  $3 \times 3$ .

Конечная деформация твердого тела характеризуется энергетической парой  $(Q, \Sigma)$ , где  $\Sigma$  – первый (несимметричный) тензор номинальных напряжений Пиола–Кирхгофа [1–3]. Известно, что тензор истинных напряжений Коши  $\sigma$  имеет компоненты  $\sigma^{\alpha\beta} = (\det(Q))^{-1} \Sigma_i^\alpha Q_i^\beta$ . Здесь и далее нижние латинские и верхние греческие индексы  $i, \alpha, \beta = 1, 2, 3$  отвечают отсчетной и актуальной конфигурациям, соответственно, а также используется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Абсолютное большинство упругих материалов описывается скалярной функцией запасенной энергии деформации – упругим потенциалом  $\Phi : \Omega \times M^3 \rightarrow [0, +\infty)$  таким, что  $\Phi(x, I) = 0$  и  $\partial\Phi(x, Q)/\partial Q_i^\alpha = \Sigma_i^\alpha$  для любой  $Q \in M^3$  и почти всех  $x \in \Omega$ , где  $I$  – единичная матрица. Для несжимаемых материалов  $\det(Q) = 1$  и для сжимаемых

$\Phi(x, Q) \rightarrow +\infty$ , если  $\det(Q) \rightarrow +0$ , т.е. для сжатия объема в точку необходима бесконечная энергия [1,3].

Для изотропных материалов потенциал является функцией главных инвариантов тензора Коши–Грина  $G = Q^T \cdot Q$  [1] или собственных чисел тензора кратностей удлинений  $G^{1/2}$  [2]. Оба описания абсолютно эквивалентны. В любом случае потенциал необходимо удовлетворяет принципу материальной индифферентности [1]. Для однородного материала  $\Phi = \text{const}(x)$ .

Рассматривается следующая краевая задача. К телу прикладываются внешние воздействия: в  $\Omega$  – массовая сила с плотностью  $f$ , на части границы  $\Gamma^2$  – поверхностная сила с плотностью  $F$ , а также задается перемещение  $u^0$  части границы  $\Gamma^1$ , причем  $\Gamma^1 \cup \Gamma^2 = \partial\Omega$ ,  $\Gamma^1 \cap \Gamma^2 = \emptyset$ ,  $\text{area}(\Gamma^1) > 0$ .

Под слабым решением краевой задачи эластостатики понимается перемещение, сообщающее глобальный минимум полной энергии системы [3,4]:

$$u^* = \arg(\inf\{I(u) : u \in V\}), \quad I(u) = \int_{\Omega} \Phi(x, \nabla u(x) + I) dx - A(u) \quad (1.1)$$

$$A(u) = \int_{\Omega} \langle f, u \rangle dx + \int_{\Gamma^2} \langle F, u \rangle d\gamma, \quad \langle g, u \rangle(x) = \int_0^{u(x)} g^\alpha(x, u) du^\alpha$$

где  $V = \{u : \bar{\Omega} \rightarrow R^3; u(x) = u^0(x), x \in \Gamma^1\}$  – множество кинематически допустимых перемещений,  $\langle *, u \rangle$  – удельная, а  $A(u)$  – полная работа внешних сил на перемещении  $u$ . Отметим, что даже для "мертвых" сил  $f, F = \text{const}(u)$  удельная работа вычисляется по формуле  $\langle g, u \rangle(x) = g^\alpha(x) u^\alpha(x)$  только в декартовых отсчетных координатах.

В работах [5–10] доказано, что для потенциалов линейного роста по модулю тензора дисторсии таких, что  $\Phi(x, Q)/|Q| \leq C < +\infty$ , краевая задача (1.1) является математически некорректной. А именно, в этой задаче возможно либо отсутствие перемещений, устойчивых к конечным вариациям, либо появление перемещений с разрывами типа проскальзывания. С математической точки зрения первый эффект связан с неограниченностью снизу функционала энергии на множестве кинематически допустимых перемещений, второй эффект связан с нерелексивностью банахова пространства, на котором функционал энергии определен. С физической точки зрения первый эффект связан с существованием предельной нагрузки, т.е. с ограниченностью множества силовых воздействий, которым способно сопротивляться данное тело. Физический смысл второго эффекта пока не выяснен<sup>1</sup>.

Взаимосвязь обнаруженных эффектов легко пояснить на простом примере. Пусть твердое тело обжимается жесткими шероховатыми штампами. Если материал образца описывается упругим потенциалом линейного роста, тогда существует конечное значение сжимающей силы, выше которого материал начинает двигаться с ускорением, т.е. тело перестает статически сопротивляться внешней нагрузке [5], что естественно трактовать как утрату несущей способности. При этом могут появиться поверхности, вдоль которых происходит необратимое проскальзывание одних частей образца относительно других [7, 9, 10]. В следующем разделе приводится пример 2.1, иллюстрирующий этот эффект.

В силу общей теории [11, 12] для потенциалов линейного роста по модулю тензора дисторсии множество кинематически допустимых перемещений является линейным аффинным многообразием нерелексивного соболевского (банахова) пространства  $W^{1,1}(\Omega, R^3)$ :

$$V = \{u \in W^{1,1}(\Omega, R^3) : u(x) = u^0(x), x \in \Gamma^1\} \quad (1.2)$$

<sup>1</sup> Бригаднов И.А. Математические методы исследования краевых задач теорий пластичности и нелинейной упругости. Диссертация на соискание... доктора физ.-мат. наук. СПб: СПбГУ, 1997. 224 с.

Напомним определение предельной нагрузки [5]. Для этого рассмотрим множество, содержащее такие "мертвые" силы  $(f, F) = \text{const}(u)$ , для которых функционал энергий  $I(u)$  ограничен снизу на  $V$  и, значит, существует какое-либо решение задачи (1.1)

$$B = \{(f, F) \in L^\infty(\Omega R^3) \times L^\infty(\Gamma^2, R^3) : \inf\{I(u) : u \in V\} > -\infty\}$$

Это множество является непустым, поскольку для малых внешних нагрузок задача (1.1) сводится к классической вариационной задаче линейной теории упругости, всегда имеющей единственное решение [3]. Действительно, в окрестности недеформированной конфигурации *все потенциалы* нелинейной теории упругости сводятся к потенциалу, отвечающему линейному закону Гука [1,2].

**Определение 1.1.** Пусть заданы  $(f, F) \in B$  и рассмотрим последовательность "мертвых" сил, изменяющихся пропорционально вещественному параметру  $t \geq 0$ . Величина  $t_* \geq 0$  называется *предельным параметром нагружения*, а  $(t_*f, t_*F)$  – *предельной нагрузкой*, если  $(tf, tF) \in B$  для  $0 \leq t \leq t_*$  и  $(tf, tF) \notin B$  для  $t > t_*$ .

Задача предельного анализа сводится к исследованию, при каких положительных значениях параметра  $t$  функционал

$$I_t(u) = \int_{\Omega} \Phi(x, \nabla u(x) + I) dx - tA(u)$$

ограничен снизу на  $V$  и входит ли в этот набор значений число  $t = 1$ .

На практике достаточно знать оценку снизу для предельной нагрузки, поскольку именно по ней можно определить запас прочности нелинейно упругого тела.

**Утверждение 1.1.** Для предельного параметра нагружения справедлива оценка снизу

$$t_* \geq t_- = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u(x)| \varphi(x) dx : u \in V, A(u) = 1 \right\} \quad (1.3)$$

$$\varphi(x) = \inf \left\{ \frac{\Phi(x, Q)}{|Q|} : Q \in M^3 \right\}$$

**Доказательство.** Из определения функции  $\varphi(x)$  следует, что

$$\int_{\Omega} \Phi(x, \nabla u(x) + I) dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u(x)| \varphi(x) dx + \text{const} \geq t_- + \text{const}$$

для любой  $u \in V$  с  $A(u) = 1$ . Если взять любое  $0 \leq t \leq t_-$ , тогда функционал  $I_t(u)$  будет ограничен снизу на  $V$ , т.е.  $(tf, tF) \in B$ .

По смыслу  $\varphi(x)$  – *функция насыщения*, причем  $\varphi(x) > 0$ . Для однородного материала  $\varphi = \text{const}(x)$ .

Из определения 1.1 следует, что при  $t < 1$  вариационная задача эластостатики (1.1) может не иметь никакого решения, устойчивого к конечным вариациям, что можно трактовать как утрату несущей способности тела. Поэтому на основе задачи (1.3) естественно формулируется задача оптимизации формы нелинейно упругого тела максимальной несущей способности при заданных внешних воздействиях  $(u^0, f, F)$ :

$$\Omega_* = \arg(\sup\{t_-(\Omega) > 1 : \Omega \in C^0, \text{vol}(\Omega) = \omega\}) \quad (1.4)$$

где  $t_-(\Omega)$  – решение задачи (1.3) на области  $\Omega$ ,  $\omega$  – заданный объем тела, а  $C^{0,1}$  – класс областей с липшицевыми границами [11].

**2. Существование разрывных полей в задаче предельного анализа.** Известно, что для потенциалов линейного роста точная нижняя грань в задаче (1.3) в общем случае достигается на векторном поле с разрывами типа проскальзывания [5–10]. Этот

эффект связан с *нерефлексивностью* пространства  $W^{1,1}(\Omega, R^3)$ , на котором функционал этой задачи коэрцитивен [11]. Рассматриваемый эффект проявляется в том, что ограниченный снизу функционал задачи (1.3) может не достигать своей нижней грани ни на одном элементе допустимого множества  $V$ . При этом ни одна локальная экстремаль функционала не будет удовлетворять кинематическим крайевым условиям.

В действительности, минимизирующая последовательность в задаче (1.3) сходится к некоторому элементу из более широкого пространства функций ограниченной вариации  $BV(\Omega, R^3)$  [13,14] или ограниченной деформации  $BD(\Omega, R^3)$  [15]. Эти пространства наряду с непрерывными функциями содержат функции, имеющие разрывы первого рода типа проскальзывания как внутри области, так и на границе. Одним из способов корректного определения обобщенного решения вариационной проблемы предельного анализа является построение расширенной (релаксированной) вариационной задачи, явно учитывающей разрывные поля [15, 16]. С точки зрения численного анализа это дает возможность применять специальные вариационно-разностные методы, использующие разрывные аппроксимации [9, 16]. Вариационные задачи с интегральным функционалом линейного роста достаточно подробно исследованы на примере задач о непараметрической минимальной поверхности [14], идеальной упругопластичности [15, 16] и нелинейной упругости [5–10].

В качестве иллюстрации приведенных рассуждений рассмотрим простой пример.

*Пример 2.1.* Пусть в абсолютно твердом теле имеется сквозное круглое отверстие радиуса  $b$  и длины  $l \gg b$ , в которое коаксиально вставлен абсолютно твердый стержень меньшего радиуса  $a$ . Свободное пространство отверстия заполнено деформируемым материалом, жестко прикрепленным по всей длине к стержню и внутренней поверхности отверстия. Стержень выдвигается вдоль оси силой  $P$ .

Наполнитель является однородным, изотропным и описывается потенциалом Бартенева–Хазановича [17]:

$$\Phi(Q) = 2\mu(\lambda_1(Q) + \lambda_2(Q) + \lambda_3(Q) - 3), \det(Q) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \quad (2.1)$$

где  $\mu > 0$  – модуль сдвига при малых деформациях, а  $\{\lambda_k(Q)\}$  – собственные числа тензора кратностей удлинений  $\sqrt{Q^T \cdot Q}$  [1,2]. Известно [5–10], что этот потенциал имеет линейный рост по модулю тензора дисторсии, поскольку  $\Phi(Q)/|Q| \leq 2\sqrt{3}\mu$ .

В рамках модели осесимметричного антиплоского сдвига [2] актуальная конфигурация наполнителя описывается следующим соотношением в безразмерных отсчетных цилиндрических координатах

$$X(\rho, \varphi, z) = x(a\rho, \varphi, az + aw(\rho)), \nabla X = \nabla u + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + I$$

где  $\rho \in [1, \eta]$ ,  $\eta = b/a$  – безразмерный геометрический параметр.

Тогда вариационная задача (1.1) записывается в форме

$$w_* = \arg(\inf\{I(w) : w \in V\}) \quad (2.2)$$

$$I(w) = \int_1^\eta (4 + w'^2)^{1/2} \rho d\rho - tw(1), \quad V = \{w \in W^{1,1}(1, \eta) : w(\eta) = 0\}$$

где  $t = P/(4\pi\mu a l)$  – приведенная безразмерная касательная сила, распределенная по поверхности контакта стержня и наполнителя.

Единственное решение выпуклой задачи (2.2):

$$w_*(\rho) = t[\text{arch}(\eta/t) - \text{arch}(\rho/t)]$$

определено только для  $|t| \leq 1$ . Взяв  $t > 1$  и последовательность допустимых функций, например, вида  $w_m(\rho) = m(\eta - \rho)^m / (\eta - 1)^m$  ( $m \in N$ ), можно убедиться, что функционал энергии в задаче (2.2) неограничен снизу на  $V$ , поскольку  $I(w_m) \rightarrow -\infty$  при  $m \rightarrow +\infty$ . Таким образом, при  $t > 1$  наполнитель перестает сопротивляться сдвигу, т.е.  $t_* \leq 1$ .

В рассматриваемом случае задача предельного анализа (1.4) принимает вид

$$t_- = \inf \left\{ \int_1^\eta |w'| \rho d\rho : w \in V, w(1) = 1 \right\} \quad (2.3)$$

Найдем значение  $t_-$ , используя аппарат выпуклого анализа и теории двойственности [12]. Для этого исходную минимизационную проблему (2.3) сформулируем как задачу поиска седловой точки в проблеме минимакса. Воспользовавшись соотношением  $|a| = \sup\{ab : |b| \leq 1\}$ , справедливым для любых чисел  $a$  и  $b$ , приходим к задаче

$$t_- = \inf \left\{ \sup \left( \int_1^\eta v w' \rho d\rho : v \in V^* \right) : w \in V, w(1) = 1 \right\}$$

$$V^* = \{v \in W^{1,\infty}(1, \eta) : |v| \leq 1\}$$

Из классического неравенства  $\inf \sup L(v, w) \geq \sup \inf L(v, w)$  [12] следует оценка снизу для искомой величины

$$t_- \geq \sup \{J(v) : v \in V^*\}$$

где двойственный функционал

$$J(v) = -v(1) - \sup \left\{ \int_1^\eta (\rho v)' w d\rho : w \in V \right\}$$

является собственным ( $J(v) \neq -\infty$ ), если выполняется очевидное условие  $v(\rho) = C/\rho$  для  $\rho \in [1, \eta]$  с неопределенной постоянной  $C$ . В результате, получаем оценку снизу для предельного параметра нагружения  $t_* \geq t_- \geq \sup\{-C : |C| \leq 1\} = 1$ . В сочетании с оценкой сверху  $t_* \leq 1$  находим точное значение предельного параметра нагружения  $t_* = 1$ .

Взяв последовательность допустимых функций простейшего вида  $w_m(\rho) = (\eta - \rho)^m / (\eta - 1)^m$  ( $m \in N$ ), легко убедиться, что нижняя грань в задаче (2.3) достигается на разрывной функции, поскольку  $w_m(\rho) \rightarrow 1 - H(\rho - 1)$  почти всюду на  $(1, \eta)$ , где  $H \in BV(R)$  – функция Хевисайда, имеющая ограниченную вариацию [13, 14].

**3. Разрывная конечно-элементная аппроксимация задачи предельного анализа.** Вариационные задачи с интегральным функционалом линейного роста нуждаются в специальной релаксации, идея которой состоит в следующем [9, 16].

Пусть  $V$  – банахово пространство с нормой  $\| \cdot \|$ , а  $I : V \rightarrow R$  – коэрцитивный на  $V$  функционал, т.е.  $I(u) \rightarrow +\infty$  при  $\|u\| \rightarrow \infty$ . Рассматривается стандартная минимизационная проблема  $\inf\{I(u) : u \in V\}$ . Решение этой проблемы может отсутствовать. Однако может существовать последовательность  $\{u_k\} \subset V$  такая, что  $u_k \rightarrow u_0$  почти всюду и  $I(u_k) \rightarrow I_0 \in R$  при  $k \rightarrow \infty$ , где предельный элемент  $u_0 \notin V$ . В этом случае строится продолжение  $\bar{I}$  функционала  $I$  на более широкий класс функций  $\bar{V} \supset V$  такое, что  $\bar{I}(u_0) = I_0$  и  $\bar{I}(u) = I(u)$  для любого  $u \in V$ .

Для вариационных проблем с кратным интегральным функционалом линейного роста соответствующее пространство  $\bar{V}$  совпадает с пространством  $BD$  вектор-функций ограниченной вариации, имеющих обобщенную производную как ограниченную

векторную меру Радона [15]. При численном решении по методу конечных элементов всегда используется лишь конечномерное подпространство исходного пространства [18]. Поэтому на практике применяется *частичная релаксация*, основанная на специальной разрывной конечно-элементной аппроксимации искомого поля [9, 16].

Для примера рассмотрим плоскую задачу. Пусть  $\Omega \subset R^2$  и  $\Omega_h = \cup T_h$ ,  $\Gamma_h = \partial\Omega_h$  такие, что  $area(\Omega \setminus \Omega_h) \rightarrow 0$  и  $leng\ th(\partial\Omega \setminus \partial\Omega_h) \rightarrow 0$  для  $h \rightarrow +0$  регулярным образом, где  $T_h$  – треугольники, а  $h$  – характерный шаг аппроксимации [18]. Каждая конечно-элементная аппроксимация характеризуется множеством узлов  $\{x^\alpha\}_{\alpha=1}^m$  и множество *внутренних* ребер  $G_h = \{r_{\alpha\beta} \equiv [x^\alpha, x^\beta]\}$ , дополненным ребрами на границе  $\Gamma_h^1$ .

Для векторного поля используется следующая кусочно-непрерывная аппроксимация

$$u_h(x) = U_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha\beta}(x) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m; r_{\alpha\beta} \in G_h)$$

где  $U_{\alpha\beta}$  – компоненты искомого поля в узле  $x^\alpha$ , ортогональные ребру  $r_{\alpha\beta}$ ;  $\Psi_{\alpha\beta}: \Omega_h \rightarrow R$  – кусочно-линейные разрывные функции формы такие, что  $\Psi_{\alpha\beta}(x^\gamma) = \delta_{\alpha\gamma}$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, m$ ) и  $\Psi_{\alpha\beta} \neq \Psi_{\beta\alpha}$ . Носитель базисных функций  $\Psi_{\alpha\beta}$  и  $\Psi_{\beta\alpha}$  состоит из двух соседних треугольников, имеющих общее ребро  $r_{\alpha\beta}$ . Если одно из ребер треугольника лежит на границе  $\Gamma_h^1$ , тогда носитель соответствующей базисной функции состоит только из одного этого треугольника. Множество  $V \subset W^{1,1}(\Omega, R^2)$  аппроксимируется множеством  $V_h \subset BD(\Omega, R^2)$ , которое изоморфно  $R^{2M}$ , где  $M$  – число ребер в множестве  $G_h$ .

Описанная конечно-элементная аппроксимация обладает следующими свойствами. Компоненты векторного поля, ортогональные соответствующему ребру, являются непрерывными, тогда как касательные проекции на это ребро могут иметь конечный разрыв первого рода. В результате, мы имеем специальную конечно-элементную аппроксимацию, допускающую поля с разрывами типа проскальзывания вдоль всех внутренних ребер сетки и вдоль ребер на границе  $\Gamma_h^1$ .

В этом случае задача (1.3) заменяется следующей расширенной проблемой [9, 16]:

$$t_h = \min \left\{ \int_{\Omega_h} |\nabla u(x)| \varphi(x) dx + R_h(u) : u \in V_h, A_h(u) = 1 \right\} \quad (3.1)$$

$$R_h(u) = \sum_{r_{\alpha\beta} \in G_h} \int_{x^\alpha}^{x^\beta} |u_\tau^+ \varphi^+ - u_\tau^- \varphi^-| d\gamma, \quad A_h(u) = \int_{\Omega_h} \langle f_h, u \rangle dx + \int_{\Gamma_h^2} \langle F_h, u \rangle d\gamma$$

где функция насыщения  $\varphi(x)$  введена в задаче (1.3), знаки "+" и "-" отвечают значениям искомого поля и функции насыщения на треугольниках  $T_h^+$  и  $T_h^-$ , имеющих общее ребро  $r_{\alpha\beta}$ ; индекс  $\tau$  соответствует касательной проекции искомого поля на это ребро, причем для ребер на  $\Gamma_h^1$  задано внешнее перемещение, например,  $u_\tau^-(x) = u_h^0(x)$ . Здесь используются стандартные кусочно-линейные *непрерывные* конечно-элементные аппроксимации внешних воздействий  $(u_h^0, f_h, F_h)$ . По свойству метода конечных элементов  $t_h \geq t_-$  [18]. Из работы [16] следует, что  $t_h \rightarrow t_-$  при  $h \rightarrow +0$  регулярным образом.

С вычислительной точки зрения задача (3.1) обладает сингулярной особенностью, поскольку функционал задачи является негладким. Поэтому, используя простейшую гладкую аппроксимацию модуля  $|z| \approx (z^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$  с регуляризирующим параметром

$\varepsilon \ll 1$  и результаты работы [16], на практике предлагается решать следующую задачу

$$t_h^\varepsilon = \min \left\{ \int_{\Omega_h} (|\nabla u(x)|^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \phi(x) dx + R_h^\varepsilon(u) : u \in V_h, A_h(u) = 1 \right\} \quad (3.2)$$

$$R_h^\varepsilon(u) = \sum_{r_{\alpha\beta} \in G_h} |r_{\alpha\beta}| \{ [(w_\alpha^+ - w_\alpha^-)^2 + \varepsilon^2]^{1/2} + [(w_\beta^+ - w_\beta^-)^2 + \varepsilon^2]^{1/2} \}$$

$$|r_{\alpha\beta}| = |x_\alpha - x_\beta|, \quad w_\gamma^\pm = u_\tau^\pm(x^\gamma) \phi^\pm(x^\gamma) \quad (\gamma = \alpha, \beta)$$

Необходимое условие стационарности функционала в задаче (3.2) приводит к нелинейной системе алгебраических уравнений вида  $S(U) \cdot U = B$ , где  $U \in R^{2M}$  – глобальный вектор свободных параметров аппроксимации,  $B \in R^{2M}$  – глобальный вектор внешних узловых воздействий и  $S$  – глобальная матрица жесткости размерности  $2M \times 2M$ .

Хорошо известно, что для потенциалов линейного роста разрешающая система может оказаться *плохо обусловленной* [7–9]. После описанной частичной релаксации мы приходим к еще более сложной проблеме для малого регуляризирующего параметра  $\varepsilon \ll 1$  в (3.2). Основная причина плохой обусловленности разрешающей системы состоит в следующем: глобальная матрица жесткости  $S$  может иметь строки с множителями существенного разного порядка, если перемещение имеет большой градиент или разрывы типа проскальзывания. В работах [19, 20] показан механизм разброса собственных чисел матрицы жесткости при большом разбросе значений строчных множителей.

Поэтому для численного решения разрешающей системы задачи (3.2) предлагается использовать декомпозиционный метод адаптивной блочной релаксации, нечувствительный к числу обусловленности глобальной матрицы жесткости [8, 9, 19–21].

**4. Вычислительные эксперименты.** Численно исследовалась задача статического (мягкого) растяжения однородного круглого стержня конечных размеров на испытательной машине жесткого типа.

Осесимметричное растяжение круглого стержня описывается следующим соотношением в безразмерных отсчетных цилиндрических координатах (для четверти осевого сечения)

$$X(\rho, \varphi, z) = x(a\rho + ar(\rho, z), \quad \varphi, lz + lw(\rho, z))$$

$$C(r, w) = \nabla u = \nabla X - I = \begin{vmatrix} \partial r / \partial \rho & 0 & \eta \partial w / \partial \rho \\ 0 & r / \rho & 0 \\ \eta^{-1} \partial r / \partial z & 0 & \partial w / \partial z \end{vmatrix}$$

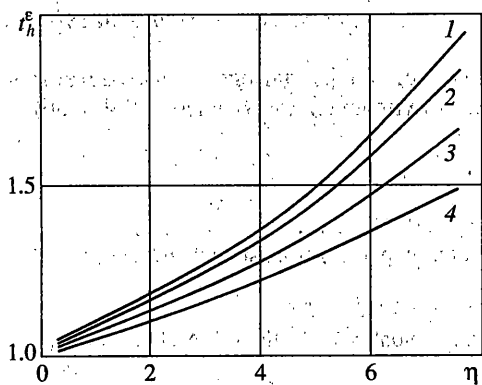
где  $\rho \in [0, 1]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [0, 1]$ ,  $a$  и  $l$  – радиус сечения и полудлина стержня, соответственно;  $\eta = l/a$  – безразмерный геометрический параметр.

Материал стержня является однородным, изотропным и описывается обобщенным потенциалом Трелоара с учетом сжимаемости [6–9]:

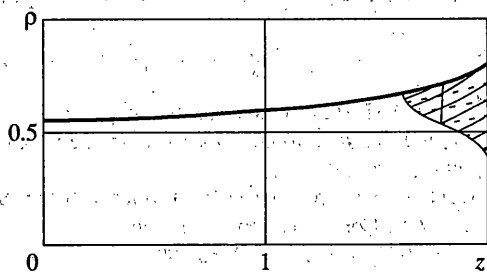
$$\Phi(Q) = \sqrt{3}\mu(|Q| - |I|) + k_0 g(\det(Q))$$

где  $\mu > 0$  и  $k_0 > 0$  – модули сдвига и объемного деформирования при малых деформациях, соответственно, а  $g : R_+ \rightarrow R_+$  – гладкая функция сжимаемости такая, что  $g(1) = g'(1) = 0$  и  $g(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +0$  или  $t \rightarrow +\infty$  [1, 2].

Для предельной растягивающей силы  $P_*$ , прикладываемой к торцам стержня, справедлива оценка снизу  $P_* \geq \sqrt{3}\mu a^2 t_-$ , где безразмерный параметр  $t_-$  находится в



Фиг. 1



Фиг. 2

результате решения приведенной задачи предельного анализа

$$t_- = \inf \left\{ 2 \int_0^1 \int_0^1 |C(r, w)| \rho \, d\rho \, dz : (r, w) \in V_1 \right\} \quad (4.1)$$

$$V_1 = \{(r, w) \in (W^{1,1}((0, 1) \times (0, 1)))^2 : r(0, z) = 0, \frac{\partial r}{\partial z}(\rho, 0) = 0,$$

$$w(\rho, 0) = 0, r(\rho, 1) = 0, w(\rho, 1) = 1\}$$

Здесь в множестве  $V_1$  учтены: условие прямолинейности оси стержня, условия гладкости и симметрии допустимых полей относительно оси  $z = 0$ , условие жесткого закрепления торцов стержня в испытательной машине при  $z = 1$ , а также условие  $A(u) = 1$  в форме  $w(\rho, 1) = 1$ .

В силу выпуклости расчетной области, а также из соображений симметрии задачи и непрерывности нормальных компонент минимизирующего поля следует, что разрыв первого рода типа проскальзывания возможен только за счет разрыва функции  $r(\rho, z)$  при  $z = 1$  [14, 16]. Поэтому условие  $r(\rho, 1) = 0$  в множестве  $V_1$  игнорировалось, а вместо него в функционал добавлялась соответствующая штрафная функция

$$R(r) = 2\eta^{-1} \int_0^1 |r(\rho, 1)| \rho \, d\rho$$

В вычислительных экспериментах использовалась равномерная триангуляция единичного квадрата, стороны которого разбивались на  $N$  одинаковых отрезков. Сравнивались стандартная непрерывная и предлагаемая разрывная схема дискретизации релаксированной задачи предельного анализа с регуляризирующим параметром  $\epsilon = 10^{-1}$  в (3.2).

На фиг. 1 показаны экспериментальные зависимости  $\eta \rightarrow t_h^\epsilon$  для различных дроблений области. Кривые 1, 2 и 3 отвечают непрерывной конечно-элементной аппроксимации с  $N = 10$ ,  $N = 20$  и  $N = 40$ , соответственно. Кривая 4 отвечает описанной разрывной конечно-элементной аппроксимации с  $N = 10$ . Соответствующее разрывное минимизирующее отображение для параметра  $\eta = 4$  показано на фиг. 2.

Легко видеть, что при увеличении степени дискретизации параметр  $t_h^\epsilon$ , найденный по непрерывной конечно-элементной схеме, *стремится сверху* к значению, найденному по предлагаемой разрывной конечно-элементной схеме на существенно более грубой сетке. При уменьшении параметра регуляризации  $\epsilon$  до значения  $10^{-3}$  существенного уточнения как непрерывного, так и разрывного решений не зафиксировано.



Полученные результаты имеют практический интерес и нуждаются в натурном исследовании.

Работа выполнена при финансовой поддержке Центра фундаментального естествознания при Санкт-Петербургском государственном университете (грант № 8-4.3-66).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. *Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 256 с.
3. *Сьярле Ф.* Математическая теория упругости М.: Мир, 1992. 472 с.
4. *Ball J.M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1977. V. 63. № 4. P. 337–403.
5. *Бригаднов И.А.* О существовании предельной нагрузки в некоторых задачах гиперупругости // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 5. С. 46–51.
6. *Бригаднов И.А.* Теоремы существования для краевых задач гиперупругости // Мат. сб. 1996. Т. 187. № 1. С. 3–16.
7. *Бригаднов И.А.* О математической корректности краевых задач эластостатики для гиперупругих материалов // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С. 37–46.
8. *Brigadnov I.A.* Numerical methods in non-linear elasticity // Numerical Methods in Engineering'96. Chichester: Wiley, 1996. P. 158–163.
9. *Brigadnov I.A.* Discontinuous solutions and their finite element approximation in non-linear elasticity // ACOMEN'98 – Advanced Computational Methods in Engineering. Maastricht: Shaker Publishing B.V., 1998. P. 141–148.
10. *Brigadnov I.A.* The limited static load in finite elasticity // Constitutive Models for Rubber. Rotterdam: Balkema, 1999. P. 37–43.
11. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
12. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные задачи. М.: Мир, 1979. 400 с.
13. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
14. *Джустуи Э.* Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации. М.: Мир, 1989. 240 с.
15. *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991. 288 с.
16. *Репин С.И.* Вариационно-разностный метод решения задач с функционалами линейного роста // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. 1989. Т. 29. № 5. С. 693–708.
17. *Бартенев Г.М., Хазанович Т.Н.* О законе высокоэластических деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. 1960. Т. 2. №1. С. 20–28.
18. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
19. *Бригаднов И.А.* О численном решении краевых задач упругопластического течения // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 157–162.
20. *Бригаднов И.А.* Численное решение краевой задачи гиперупругости в приращениях // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 42–50.
21. *Бригаднов И.А.* Математическая корректность и численные методы решения начально-краевых задач пластичности // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 4. С. 62–74.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
23.12.1999