МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2001

УДК 539.3

© 2001 г. А.С. ГРИШИН

РЕЛЕЕВСКИЕ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И АППРОКСИМАЦИИ

В работе получены замкнутое аналитическое решение и аппроксимационная формула для определения скорости волны Рэлея, распространяющейся в упругом изотропном полупространстве.

1. Введение. Первые работы по теоретическому исследованию поверхностных волн сделаны Рэлеем [1]. В этих исследованиях показано, что вдоль плоской свободной границы упругого изотропного полупространства могут распространяться поверхностные волны, которые быстро затухают с глубиной, а также получены основные уравнения для определения скорости такой волны.

В последние годы поверхностные волны находят широкое применение в физических экспериментах для изучения электрических характеристик поверхностных слоев [2], а также как средство неразрушающего контроля материалов [3].

Вопросу о распространении рэлеевских волн в изотропных средах посвящено достаточно много публикаций, однако, получить точное аналитическое выражение для скорости такой волны не удалось. Наряду с этим, известны приближенные выражения для скорости рэлеевской волны [4], которые не точно аппроксимируют аналитическое решение.

Для решения основной задачи используется метод, основанный на трехмерном формализме. Впервые этот метод был применен в [5]. В основе метода лежит представление рэлеевской волны в виде суперпозиции трех парциальных волн с комплексными амплитудами. Указанные волны отвечают трем комплексным корням характеристического полинома, обеспечивающим затухание парциальных волн по глубине. Далее, из граничных условий строится некоторый определитель, обращение в нуль которого, дает выражение для скорости рэлеевской волны.

2. Основные уравнения. Уравнения движения среды имеют вид

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}u_{p,p} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

где λ, μ – постоянные Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера.

Учитывая, что скорости продольной и поперечной волн определяются выражениями

$$c_L^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho, \quad c_T^2 = \mu/\rho \tag{2.2}$$

и обозначив через $\eta^2 = c_T^2 / c_L^2 < 1$, выражение для напряжений представляется в виде

$$\sigma_{ij} = \mu\left[\left(\frac{1}{\eta^2} - 2\right)\delta_{ij}u_{p,p} + u_{i,j} + u_{j,i}\right] \tag{2.3}$$

Подставляя выражение (2.3) в (2.1) получаем уравнение динамики для изотропной среды в терминах компонент вектора перемещений:

$$(1-\eta^2)u_{p,rp}+\eta^2 u_{r,pp}=c_L^{-2}\ddot{u}_r \quad (r=1,2,3) \tag{2.4}$$

Введем представление для поля перемещений, отвечающего плоской поверхностной волне, в виде

$$\mathbf{u}=\mathbf{m}e^{i\gamma\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}e^{i(k\mathbf{n}'\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \tag{2.5}$$

где $\gamma=\beta+i\alpha$ – комплексно-экспоненциальный показатель; $\mathbf{m}$ – (комплексная) векторная амплитуда; $\boldsymbol{\nu}$ – вектор единичной внешней нормали к плоскости $\mathbf{\Pi}_\nu$, ограничивающей полупространство, где распространяется рэлеевская волна, $\mathbf{n}'\subset\mathbf{\Pi}_\nu$ – вектор единичной длины, задающий направление распространения рэлеевской волны, c – скорость распространения рэлеевской волны. Предполагается, что в исследуемом полупространстве выполняется условие $\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{x}<0$. Условие затухания волны по глубине $|\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{x}|\to\infty$ требует, чтобы параметр $\alpha>0$; $k=1/\lambda$ – волновое число; $\omega=1/T$ – угловая скорость.

На поскости $\mathbf{\Pi}_\nu$ должны выполняться условия отсутствия поверхностных напряжений

$$t_p\equiv\sigma_{pr}\nu_r=0 \tag{2.6}$$

Основное уравнение Кристоффеля в изотропном случае. Подстановка представления (2.5) в уравнение движения (2.4) дает уравнение Кристоффеля для нахождения комплексного экспоненциального показателя γ:

$$(1-\eta^2)(\gamma_k\nu_p+n_p)(\gamma_k\nu_r+n_r)m_p+\eta^2(\gamma_k^2+1-\xi^2)m_r=0 \tag{2.7}$$

$$\xi^2=\omega^2/(c_L^2k^2),\quad \gamma_k=\gamma/k$$

Уравнение (2.7) может быть представлено в матричной форме

$$T_{rp}m_p=0 \tag{2.8}$$

$$T_{rp}=A_{rp}\gamma_k^2+B_{rp}\gamma_k+C_{rp},\quad A_{rp}=(1-\eta^2)\nu_r\nu_p+\eta^2\delta_{rp} \tag{2.9}$$

$$B_{rp}=(1-\eta^2)(\nu_r n_p+\nu_p n_r)$$

$$C_{rp}=(1-\eta^2)n_r n_p+\delta_{rp}(\eta^2-\xi^2)$$

Вычисление собственных значений матрицы T. Пусть $\nu=(0,0,1)$ – вектор нормали к плоскости, в которой распространяется волна. Направление распространения волны определяется вектором $\mathbf{n}=(1,0,0)$. Подставив эти выражения в (2.8) получим выражение для матрицы $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}=\begin{Vmatrix}\gamma_k^2\eta^2+1-\xi^2 & 0 & \gamma_k(1-\eta^2)\\ 0 & \gamma_k^2+\eta^2+\eta^2-\xi^2 & 0\\ \gamma_k(1-\eta^2) & 0 & \gamma_k^2+\eta^2-\xi^2\end{Vmatrix} \tag{2.10}$$

Для того, чтобы однородное уравнение (2.7) имело решение необходимо, чтобы детерминант (2.10) был равен нулю

$$(1+\gamma_k^2-\xi^2)(\eta^2+\eta^2\gamma_k^2-\xi^2)^2=0 \tag{2.11}$$

Из выражения (2.11) следует, что имеется два собственных значения с отрицательной мнимой частью (для необходимости затухания рэлеевской волны по глубине)

$$\gamma_1^2 = \xi^2 - 1,\ \ \gamma_1 = -i\sqrt{1-\xi^2} \qquad (2.12)$$

$$\gamma_2^2 = \xi^2/\eta^2 - 1,\ \ \gamma_2 = -i\sqrt{1-\xi^2/\eta^2}$$

Вычисление собственных векторов матрицы T. Для нахождения собственного вектора, отвечающего корню γ_1, подставим (2.12) в (2.10):

$$\mathbf{T} = (\eta^2 - 1)\begin{Vmatrix} \gamma_1^2 & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & 1+\gamma_1^2 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (2.13)$$

Нормированный собственный вектор для (2.13) имеет вид

$$m^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2-\xi^2}}\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \gamma_1 \end{Vmatrix} \qquad (2.14)$$

Собственные векторы, отвечающие корню γ_2, получаем, подставив в (2.13) выражение (2.12):

$$\mathbf{T} = (1-\eta^2)\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & \gamma_2^2 \end{Vmatrix} \qquad (2.15)$$

Нормированные собственные векторы для (2.15) имеют вид

$$m^{(2)} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix},\ \ m^{(3)} = \frac{\eta}{\sqrt{2\eta^2-\xi^2}}\begin{Vmatrix} -\gamma_2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \qquad (2.16)$$

Граничные условия. На свободной границе должно выполняться условие (2.6). Учитывая, что вектор перемещений $\mathbf{u}$ не зависит от x_2 выражение для напряжений (2.3) на свободной поверхности примет вид

$$u_{3,3} + (1-2\eta^2)u_{1,1} = 0 \qquad (2.17)$$

$$u_{2,3} = 0;\ \ u_{3,1} + u_{1,3} = 0$$

Будем искать решение (2.17) в виде

$$\mathbf{u} = C_1\mathbf{m}^{(1)}F(\gamma_1) + C_2\mathbf{m}^{(2)}F(\gamma_2) + C_3\mathbf{m}^{(3)}F(\gamma_3) \qquad (2.18)$$

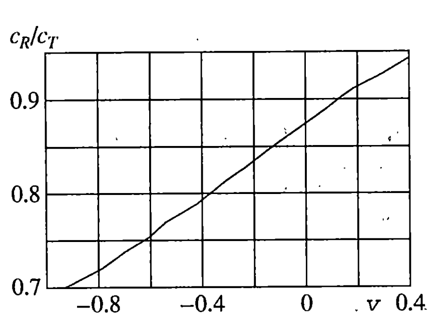
$$F(\gamma_\alpha) = e^{i\gamma_\alpha xk + (ikx_1 - \omega t)}$$

Подставляя (2.14) и (2.16) в выражение (2.18) получим в компонентах

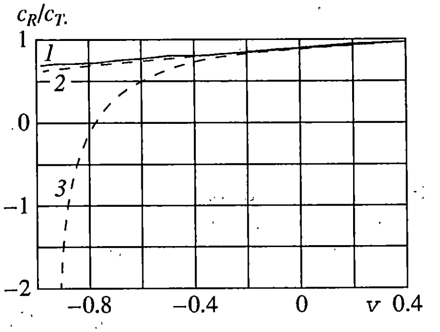
$$u_1 = C_1F(\gamma_1)/\sqrt{2-\xi^2} - C_3F(\gamma_2)\gamma_2\eta/\sqrt{2\eta^2-\xi^2}$$

$$u_2 = C_2F(\gamma_2) \qquad (2.19)$$

$$u_3 = C_1F(\gamma_1)/\sqrt{2-\xi^2} + C_3F(\gamma_2)\eta/\sqrt{2\eta^2-\xi^2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Подставляя (2.19) в (2.17) и учитывая, что $x_3 = 0$ получим

$$\hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = \{C_1, C_2, C_3\} \tag{2.20}$$

$$\hat{\mathbf{L}} = \begin{Vmatrix} \dfrac{ik\eta^2(2-\xi^2/\eta^2)}{(2-\xi^2)^{1/2}} & 0 & \dfrac{2k\eta^2(1-\xi^2/\eta^2)^{1/2}}{(2-\xi^2)^{1/2}} \\ 0 & k(1-\xi^2/\eta^2)^{1/2} & 0 \\ \dfrac{2k(1-\xi^2)^{1/2}}{(2-\xi^2)^{1/2}} & 0 & \dfrac{ik(2-\xi^2/\eta^2)^{1/2}}{(2-\xi^2)^{1/2}} \end{Vmatrix} \tag{2.21}$$

Раскрывая определитель (2.21) получаем уравнение Рэлея

$$(2-\xi^2/\eta^2)^2 = 4(1-\xi^2)^{1/2}(1-\xi^2/\eta^2)^{1/2} \tag{2.22}$$

Решение уравнения Рэлея. Возведя в квадрат уравнение (2.22) и выполнив замену $\zeta = \eta\xi$, получим следующую форму уравнения Рэлея

$$\zeta^6 - 8\zeta^4 + 8(3-2\eta^2)\zeta^2 - 16(1-\eta^2) = 0 \tag{2.23}$$

Аналитическое решение уравнения Рэлея (2.23) запишется как

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{\frac{4^3\sqrt{2}(\nu-1)(5\nu-2) - 8\sqrt[3]{a_1+a_2} + 8\nu\sqrt[3]{a_1+a_2} + \sqrt[3]{2a_1+2a_2}}{(\nu-1)\sqrt[3]{a_1+a_2}}}\right] \tag{2.24}$$

$$a_1 = (-1+\nu)^2(-11+56\nu), \quad a_2 = 3\sqrt{3}\sqrt{-(-1+\nu)^3(32\nu^3-16\nu^2+21\nu-5)}$$

График зависимости (2.24) представлен на фиг. 1. Аппроксимируем методом Па-де точное выражение для скорости рэлеевской волны (2.24) в виде дробно-линейной функции вида:

$$C_R = \frac{A+B\nu}{1+C\nu} C_T \tag{2.25}$$

После определения неизвестных постоянных A, B, C в (2.25) получаем аппроксимирующее выражение для определения скорости волны Рэлея в упругой изотропной среде

$$C_R = \frac{0.874+0.376\nu}{1+0.206\nu} C_T \tag{2.26}$$

В работе [4] приведена аппроксимирующая формула для определения скорости рэлеевской волны

$$C_R = \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu} C_T \quad (2.27)$$

Графический анализ формул (2.26) и (2.27) представлен на фиг. 2. Как видно из рисунка выражение (2.26) более точно аппроксимирует аналитическое решение (2.24), особенно в отрицательном диапазоне коэффициента Пуассона, где применение формулы (2.27) вообще невозможно, между тем, появляются среды, имеющие отрицательный коэффициент Пуассона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh J.W.* On waves propagated along the plane surfaces of elastic solid // Proc. London Math. Soc. 1885. V. 17. № 253. P. 4–11.
2. *Fischler C.* Propagation and amplification of shear-horizontal waves in piezoelectric plates // J. Appl. Phys. 1971. V. 42. № 3. P. 919–924.
3. *Бергман Л.* Ультразвук и его применение в науке и технике. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 726 с.
4. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981, 287 с.
5. *Farnell G.W.* Properties of elastic surface waves // Physical Acoustics. N.Y.; L: Acad. Press. 1970. V. 6. P. 109–166.

Москва

Поступила в редакцию
21.06.1999