МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2001

УДК 539.3

© 2001 г. В.И. ГОРБАЧЕВ

ОСРЕДНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ КОМПОЗИТОВ ПРИ НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Рассматриваются начально-краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Такие уравнения описывают процессы в композиционных материалах, у которых механические характеристики меняются либо скачком либо непрерывно в пограничной области между фазами. Более того многие задачи из различных разделов механики деформируемых твердых тел сводятся к решению линейных уравнений с переменными коэффициентами. Это в частности в полной мере относится к задачам теории малых упруго-пластических деформаций А.А. Ильюшина [1, 2] при решении их методов переменных параметров упругости [3]. Основная цель любого из методов осреднения заключается в том чтобы выразить решение задачи для уравнения с переменными коэффициентами через решение такой же задачи для уравнения с постоянными коэффициентами. В случае периодической зависимости коэффициентов от координат хорошие результаты дает метод малого геометрического параметра [4–6].

В настоящей работе предложен метод осреднения одинаково пригодный как в периодическом так и в непериодическом случаях.

В области V, ограниченной поверхностью Σ, рассматривается начально-краевая задача для уравнения вида

$$[C_{ij}(x)u_{,j}]_{,i} - \mu(x)\dot{u} - \rho(x)\ddot{u} + X(x,t) = 0 \tag{1}$$

где t – время; одна или две точки над символом обозначают, соответственно, первую или вторую производную по времени; x – декартовы координаты x_1, x_2, x_3; индекс после запятой обозначает производную по соответствующей координате; коэффициенты $C_{ij} = C_{ji}$, μ и ρ являются интегрируемыми функциями координат. Искомая величина $u(x, t)$ может быть как скалярной так и векторной функцией с компонентами u_1, u_2, u_3. В последнем случае коэффициенты C_{ij} являются матрицами $C_{ij} = (C_{kilj})$.

В зависимости от физического смысла коэффициентов уравнение (1) описывает различные процессы. Далее их конкретизировать не будем. Не будем также конкретизировать типы граничных и начальных условий. Задачу для уравнения (1) будем называть исходной задачей. Наряду с уравнением (1), в той же области V, рассматривается уравнение с постоянными коэффициентами

$$C^0_{ij}v_{,ij} - \mu^0\dot{v} - \rho^0\ddot{v} + X(x,t) = 0 \tag{2}$$

Предполагается, что величина v удовлетворяет таким же, что и u граничным и начальным условиям. Задачу для уравнения (2) назовем сопутствующей задачей.

Отметим, что коэффициенты C^0_{ij}, μ^0, ρ^0 уравнения (2) сопутствующей задачи, в общем случае, никак не связаны с коэффициентами уравнения (1) исходной задачи.

Основная цель работы состоит в том, чтобы выразить решение исходной задачи через решение сопутствующей задачи. Именно в этом смысле и понимается осреднение в данной работе.

В одномерном случае, т.е. в том случае когда область V является отрезком длины L, и $0 \leqslant x \leqslant L$ уравнения (1) и (2) выглядят следующим образом:

$$[C(x)u']' - \mu(x)\dot{u} - \rho(x)\ddot{u} + X(x,t) = 0 \tag{3}$$

$$C^0 v'' - \mu^0 \dot{v} - \rho^0 \ddot{v} + X(x,t) = 0 \tag{4}$$

Уравнения (3) и (4) можно трактовать как уравнения продольных колебаний неоднородного и однородного стержней в вязкой среде с переменным $\mu(x)$ и постоянным μ^0 коэффициентами диссипации, тогда $C(x)$ и C^0 – модули Юнга, а $\rho(x)$ и ρ^0 – плотности.

Ниже подробно изглагается процедура осреднения одномерной начально-краевой задачи для уравнения (3). В трехмерном случае все промежуточные выкладки опущены и выписываются только основные результаты.

Рассмотрим вначале случай установившихся гармонических колебаний в неоднородном стержне. Положим

$$X(x,t) = e^{-i\omega t}\overset{*}{X}(x), \quad u(x,t) = e^{-i\omega t}\overset{*}{u}(x), \quad v(x,t) = e^{-i\omega t}\overset{*}{v}(x) \tag{5}$$

где i – мнимая единица, ω – частота колебаний. Амплитуды $\overset{*}{u}$ и $\overset{*}{v}$ будут удовлетворять уравнениям Гельмгольца

$$(C\overset{*}{u}')' + (\mu i\omega + \rho\omega^2)\overset{*}{u} + \overset{*}{X} = 0 \tag{6}$$

$$C^0 \overset{*}{v}'' + (\mu^0 i\omega + \rho^0\varepsilon^2)\overset{*}{v} + \overset{*}{X} = 0 \tag{7}$$

Граничные условия для $\overset{*}{u}$ и $\overset{*}{v}$ одни и те же. Обозначим через $\overset{*}{G}(x,\xi)$ функцию Грина краевой задачи для уравнения (6), т.е. такую функцию, которая удовлетворяет однородным граничным условиям и уравнению

$$(C\overset{*}{G}')' + (\mu i\omega + \rho\omega^2)\overset{*}{G} + \delta(x-\xi) = 0$$

$$x, \xi \in V = (0, L)$$

где $\delta(x-\xi)$ – дельта-функция Дирака. Умножим уравнение (5) на функцию Грина $\overset{*}{G}(x,\xi)$ и проинтегрируем по отрезку V, получим

$$\int_V (C\overset{*}{u}')'\overset{*}{G}\,dx + \int_V [(\mu i\omega + \rho\omega^2)\overset{*}{u} + \overset{*}{X}]\overset{*}{G}\,dx = 0 \tag{8}$$

Первый интеграл в (9) преобразуем путем интегрирования его по частям и использования того обстоятельства, что граничные условия для $\overset{*}{u}$ и $\overset{*}{v}$ одинаковы, а для $\overset{*}{G}$ – нулевые.

$$\int_V (C\overset{*}{u}')'\overset{*}{G}\,dx = C\overset{*}{u}'\overset{*}{G}\,|_0^L - C\overset{*}{G}'\overset{*}{u}\,|_0^L + \int_V (C\overset{*}{G}')'\overset{*}{u}\,dx =$$

$$= C^0\overset{*}{v}'\overset{*}{G}\,|_0^L - C\overset{*}{G}'\overset{*}{v}\,|_0^L + \int_V (C\overset{*}{G}')'\overset{*}{u}\,dx = \int_V (C^0\overset{*}{v}'\overset{*}{G})'dx -$$

$$\int_V (C\overset{*}{G}'\overset{*}{v})'dx + \int_V (C\overset{*}{G}')'\overset{*}{u}\,dx = \int_V (C\overset{*}{G}')'(\overset{*}{u}-\overset{*}{v})dx +$$

$$+\int_V C^0\overset{*}{v}''\overset{*}{G}\,dx + \int_V (C^0 - C)\overset{*}{G}'\overset{*}{v}'\,dx$$

Учитывая, что

$$C^0\overset{*}{v}'' = -(\mu^0 i\omega + \rho^0\omega^2)\overset{*}{v} - \overset{*}{X}$$

$$(C\overset{*}{G}')' = -(\mu i\omega + \rho\omega^2)\overset{*}{G} - \delta(x-\xi)$$

получим

$$\int_V (C\overset{*}{u}')'\overset{*}{G}\,dx = -\overset{*}{u}(\xi) + \overset{*}{v}(\xi) - \int_V [(\mu^0 i\omega + \rho^0\omega^2)\overset{*}{u} + \overset{*}{X}]\overset{*}{G}\,dx +$$

$$+\int_V (C^0 - C)\overset{*}{G}'\overset{*}{v}'\,dx + \int_V [(\mu-\mu^0)i\omega + (\rho-\rho^0)\omega^2)]\overset{*}{G}\overset{*}{v}\,dx \qquad (9)$$

Подставляя (9) в (8) и осуществляя замену $x \leftrightarrow \xi$, , получим формулу, по которой решение краевой задачи для уравнения (5) выражается через решение сопутствующей задачи

$$\overset{*}{u}(x) = \overset{*}{v}(x) + \int_V \overset{*}{G}'_\xi(\xi,x)[C^0 - C(\xi)]\overset{*}{v}'(\xi)d\xi + \int_V \overset{*}{G}(\xi,x)[(\mu(\xi) -$$

$$-\mu^0)i\omega + (\rho(\xi) - \rho^0)\omega^2)]\overset{*}{v}(\xi)d\xi \qquad (10)$$

Умножим (10) на $e^{-i\omega t}$ и учтем, что

$$\overset{*}{u}(x)e^{-i\omega t} = u(x,t), \quad \overset{*}{v}(x)e^{-i\omega t} = v(x,t)$$

$$i\omega\overset{*}{v}(x)e^{-i\omega t} = -\dot{v}(x,t), \quad \omega^2\overset{*}{v}(x)e^{-i\omega t} = -\ddot{v}(x,t)$$

Тогда получится следующее представление перемещений в неоднородном стержне в случае установившихся колебаний:

$$u(x,t) = v(x,t) + \int_V \overset{*}{G}'_\xi(\xi,x)[C^0 - C(\xi)]v'(\xi,t)d\xi +$$

$$+\int_V \overset{*}{G}(\xi,x)[\mu^0 - \mu(\xi)]\dot{v}(\xi,t)d\xi + \int_V \overset{*}{G}(\xi,x)[\rho^0 - \rho(\xi)]\ddot{v}(\xi,t)d\xi \qquad (11)$$

Формула представления для неустановившихся колебаний имеет несколько иной вид

$$u(x,t) = v(x,t) + \int_0^t d\tau\int_V G'_\xi(\xi,x,t-\tau)[C^0 - C(\xi)]\,v'(\xi,\tau)d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_V G(\xi,x,t-\tau)[\mu^0 - \mu(\xi)]\dot{v}(\xi,\tau)d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_V G(\xi,x,t-\tau)[\rho^0 - \rho(\xi)]\ddot{v}(\xi,\tau)d\xi \qquad (12)$$

где $G(x, \xi, t-\tau)$ – функция Грина начально-краевой задачи для уравнения (3), т.е. функция удовлетворяющая однородным начально-краевым условиям и уравнению

$$[CG']' - \mu\dot{G} - \rho\ddot{G} + \delta(t-\tau)\delta(x-\xi) = 0$$

Если u является скалярной функцией трех координат x_1, x_2, x_3, времени t и удовлетворяет уравнению (1), то представление u через v в нестационарном случае имеет вид

$$u(x,t) = v\ (x,t) + \int_0^t d\tau \int_V G'_{|i}(\xi,x,t-\tau)[C^0_{ij} - C_{ij}(\xi)]v_{|j}(\xi,\tau)dV_\xi + \tag{13}$$

$$+\int_0^t d\tau \int_V G(\xi,x,t-\tau)[\mu^0 - \mu(\xi)]\dot{v}(\xi,\tau)dV_\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_V G(\xi,x,t-\tau)[\rho^0 - \rho(\xi)]\ddot{v}(\xi,\tau)dV_\xi$$

Здесь индекс после вертикальной черты обозначает производную по переменной ξ. В случае, когда u и v векторы, а C_{ij} несимметричные матрицы вида $C_{ij} = (C_{ipjq})$, соответствующая формула имеет вид

$$u_k(x,t) = v_k\ (x,t) + \int_0^t d\tau \int_V G_{kp|i}(\xi,x,t-\tau)[C^0_{ipjq} - C_{ipjq}(\xi)]\, v_{q|j}(\xi,\tau)dV_\xi + \tag{14}$$

$$+\int_0^t d\tau \int_V G_{kq}(\xi,x,t-\tau)[\mu^0 - \mu(\xi)]\dot{v}_q(\xi,\tau)dV_\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_V G_{kq}(\xi,x,t-\tau)[\rho^0 - \rho(\xi)]\ddot{v}_q(\xi,\tau)dV_\xi$$

В стационарном случае вместо (12)–(14) имеем, соответственно

$$u(x) = v\ (x) + \int_V G'_\xi(\xi,x)[C^0 - C(\xi)]\, v'(\xi)d\xi \tag{15}$$

$$u(x) = v\ (x) + \int_V G_{|i}(\xi,x)[C^0_{ij} - C_{ij}(\xi)]v_{|j}(\xi)dV_\xi \tag{16}$$

$$u_k(x) = v_k(x) + \int_V G_{kp|i}(\xi,x)[C^0_{ipjq} - C_{ipjq}(\xi)]v_{q|j}(\xi)dV_\xi \tag{17}$$

Во все полученные выше интегральные представления входит функция Грина. Эта функция неизвестна и задача ее вычисления не менее сложна чем исходная задача. Дальнейшее продвижение в методике осреднения исходной задачи возможно по следующему пути: предположим, что величина $\overset{*}{v}(\xi)$ является гладкой функцией координаты и разложим ее в ряд Тейлора так, что

$$\overset{*}{v}(\xi) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\xi-x)^q}{q!} \frac{d^q \overset{*}{v}(x)}{dx^q};\quad x,\xi \in (0,L) \tag{18}$$

Подставим (18) в формулу (10) и получим

$$\overset{*}{u}(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \overset{*}{N}{}^{(q)}(x) \frac{d^q \overset{*}{v}}{dx^q}(x) \tag{19}$$

где $\overset{*}{N}{}^{(q)}(x)$ по сути дела являются взвешенными моментами функции Грина. Между функциями $\overset{*}{N}{}^{(q)}$ имеются рекуррентные дифференциальные зависимости. Легче всего получить эти зависимости если подставить ряд (19) в уравнение (6), произвести необходимые операции и воспользоваться тем, что $\overset{*}{v}$ есть решение уравнения (7) с постоянными коэффициентами.

Полагая, что $\overset{*}{N}{}^{(q)} \equiv 0$ при $q < 0$, запишем эти уравнения следующим образом:

$$[C(\overset{*}{N}{}^{(q)\prime} + \overset{*}{N}{}^{(q-1)})]' + C(\overset{*}{N}{}^{(q-1)\prime} + \overset{*}{N}{}^{(q-2)}) + (\mu i\omega + \rho\omega^2)\overset{*}{N}{}^{(q)} = \tag{20}$$

$$= \alpha_q + \beta_q i\omega + \gamma_q \omega^2 \quad (q = 0,1,2,...)$$

где все константы α_q, β_q, γ_q равны нулю, кроме $\alpha_2 = C^0$, $\beta_0 = \mu^0$, $\gamma_0 = \rho^0$. Соотношения (20) можно трактовать как систему рекуррентных уравнений, из которых последовательно находятся все функции $\overset{*}{N}{}^{(q)}(x)$. Граничные условия для $\overset{*}{N}{}^{(q)}$-функций следуют из разложения (19) и конкретных граничных условий для $\overset{*}{u}(x)$. Например, если рассматривается первая краевая задача, т.е. на концах отрезка $x = 0$, $x = L$ заданы одни и те же значения функций $\overset{*}{u}(x)$ и $\overset{*}{v}(x)$, то

$$\overset{*}{N}{}^{(q)}(0) = \overset{*}{N}{}^{(q)}(L) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = 0 \\ 0, & \text{если } q > 0 \end{cases}$$

Решение уравнений (20) целесообразно искать в виде ряда по степеням ω, положив

$$\overset{*}{N}{}^{(q)}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \omega^p \overset{*}{N}{}^{(q,p)}(x) \tag{21}$$

Отсюда и из (19) следует, что в установившемся процессе $\overset{*}{u}(x)$ представляется в виде двойного ряда по степеням ω и производным возрастающего порядка от гладкой функции $\overset{*}{v}(x)$:

$$\overset{*}{u}(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \omega^p \overset{*}{N}{}^{(q,p)}(x) \frac{d^q \overset{*}{v}(x)}{dx^q} \tag{22}$$

а из (20) и (22) получим систему рекуррентных обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\overset{*}{N}{}^{(q,p)}(x)$:

$$[C(\overset{*}{N}{}^{(q,p)\prime} + \overset{*}{N}{}^{(q-1,p)})]' + C(\overset{*}{N}{}^{(q-1,p)\prime} + \overset{*}{N}{}^{(q-2,p)}) + i\mu \overset{*}{N}{}^{(q,p-1)} + \rho \overset{*}{N}{}^{(q,p-2)} = \delta^{(q,p)} \tag{23}$$

$$(q \geqslant 0, p \geqslant 0)$$

где $\overset{*}{N}{}^{(q,p)} \equiv 0$ при $q < 0$ или $p < 0$. Все константы $\delta^{(q,p)} = 0$, кроме

$$\delta^{(2,0)} = C^0, \quad \delta^{(0,1)} = i\mu^0, \quad \delta^{(0,2)} = \rho^0 \tag{24}$$

В случае первой краевой задачи для $\overset{*}{u}$ из (22) следует, что $\overset{*}{N}{}^{(0,0)}(0) = \overset{*}{N}{}^{(0,0)}(L) = 1$, $\overset{*}{N}{}^{(q,p)}(0) = \overset{*}{N}{}^{(q,p)}(L) = 0$ для всех остальных значений p и q. В частности для функций

$\overset{*}{N}{}^{(0,0)}$, $\overset{*}{N}{}^{(1,0)}$, $\overset{*}{N}{}^{(0,1)}$, $\overset{*}{N}{}^{(2,0)}$, $\overset{*}{N}{}^{(1,1)}$ и $\overset{*}{N}{}^{(0,2)}$ из (20) получим следующие уравнения:

$$[C\overset{*}{N}{}^{(0,0)'}]'=0,\quad [C\overset{*}{N}{}^{(1,0)'}+\overset{*}{N}{}^{(0,0)})]'+C\overset{*}{N}{}^{(0,0)'}=0$$

$$[C\overset{*}{N}{}^{(0,1)'}]'+i\mu\overset{*}{N}{}^{(0,0)}=i\mu^0$$

$$[C(\overset{*}{N}{}^{(2,0)'}+\overset{*}{N}{}^{(1,0)})]'+C(\overset{*}{N}{}^{(1,0)'}+\overset{*}{N}{}^{(0,0)})=C^0$$

$$[C(\overset{*}{N}{}^{(1,1)'}+\overset{*}{N}{}^{(0,1)})]'+C\overset{*}{N}{}^{(0,1)'}+i\mu\overset{*}{N}{}^{(1,0)})=0$$

$$[C(\overset{*}{N}{}^{(0,2)'}]'+i\mu\overset{*}{N}{}^{(0,1)}+\rho\overset{*}{N}{}^{(0,0)}=\rho^0$$

Решая эти уравнения и учитывая условия, наложенные на N-функции, найдем

$$\overset{*}{N}{}^{(0,0)}(x)=1,\quad \overset{*}{N}{}^{(1,0)}(x)=\frac{1}{\langle 1/C\rangle}\int_0^x\frac{1}{C(y)}dy-x$$

$$\overset{*}{N}{}^{(0,1)}(x)=i\left[\int_0^x\frac{dy}{C(y)}\int_0^y(\mu^0-\mu)dz-\frac{1}{\langle 1/C\rangle}\left\langle\frac{1}{C}\int_0^y(\mu^0-\mu)dz\right\rangle\int_0^x\frac{dy}{C(y)}\right]$$

$$\overset{*}{N}{}^{(2,0)}(x)=\left(C^0-\frac{1}{\langle 1/C\rangle}\right)\left[\int_0^x\frac{y}{C(y)}dy-\frac{\langle y/C(y)\rangle}{\langle 1/C\rangle}\int_0^x\frac{dy}{C(y)}\right]-$$

$$-\int_0^x\overset{*}{N}{}^{(1,0)}dy+\frac{1}{\langle 1/C\rangle}\langle\overset{*}{N}{}^{(1,0)}\rangle\int_0^x\frac{dy}{C(y)}$$

$$\overset{*}{N}{}^{(1,1)}(x)=-\int_0^x\frac{dy}{C(y)}\int_0^y(C\overset{*}{N}{}^{(0,1)'}+i\mu\overset{*}{N}{}^{(1,0)})dz-\int_0^x\overset{*}{N}{}^{(0,1)}(y)dy+$$

$$+\frac{1}{\langle 1/C\rangle}\left\langle\frac{1}{C}\int_0^y(C\overset{*}{N}{}^{(0,1)'}+i\mu\overset{*}{N}{}^{(1,0)})dz+\overset{*}{N}{}^{(0,1)}\right\rangle\int_0^x\frac{dy}{C(y)}$$

$$\overset{*}{N}{}^{(0,2)}(x)=\int_0^x\frac{dy}{C(y)}\int_0^y(\rho^0-\rho-i\mu\overset{*}{N}{}^{(0,1)})dz-$$

$$-\frac{1}{\langle 1/C\rangle}\left\langle\frac{1}{C}\int_0^y(\rho^0-\rho-i\mu\overset{*}{N}{}^{(0,1)})dz\right\rangle\int_0^x\frac{dy}{C(y)}$$

Пусть теперь u – скалярная функция трех пространственных переменных $x=(x_1, x_2, x_3)$ и времени t, тогда для установившихся процессов, описываемых уравнением (1) и при $X(x,\ t)=e^{-i\omega t}\overset{*}{X}(x)$, $u(x,\ t)=e^{-i\omega t}\overset{*}{u}$, (x), $v(x,\ t)=e^{-i\omega t}\overset{*}{v}(x)$, получим следующее представление амплитуды $\overset{*}{u}(x_1,x_2,x_3)$ через производные от амплитуды $\overset{*}{v}(x_1,x_2,x_3)$ сопутствующей задачи:

$$\overset{*}{u}(x)=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\omega^p\overset{*}{N}{}^{(q,p)}_{i_1\ldots i_q}\overset{*}{v}_{,i_1\ldots i_q}$$

Здесь функции $\overset{*\,(q,p)}{N}_{i_1\ldots i_q}$ зависят от трех пространственных переменных и удовлетворяют системе рекуррентных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\left[C_{ij}\overset{*\,(q,p)}{N}_{i_1\ldots i_q,j}+C_{ii_q}\overset{*\,(q-1,p)}{N}_{i_1\ldots i_{q-1}}\right]_{,i}+C_{i_qj}\overset{*\,(q,p)}{N}_{i_1\ldots i_{q-1},j}+ \tag{25}$$

$$+C_{i_qi_{q-1}}\overset{*\,(q-1,p)}{N}_{i_1\ldots i_{q-2}}+i\mu\overset{*\,(q,p-1)}{N}_{i_1\ldots i_q}+\rho\overset{*\,(q,p-2)}{N}_{i_1\ldots i_q}=\delta^{(q,p)}_{i_1\ldots i_q}\quad(q\geqslant 0,p\geqslant 0)$$

$$\delta^{(2,0)}_{i_1i_2}=C^0_{i_2i_1},\quad \delta^{(0,1)}=i\mu^0,\quad \delta^{(0,2)}=\rho^0 \tag{26}$$

где все остальные константы $\delta^{(q,p)}_{i_1\ldots i_q}=0$. Если же искомая функция и вектор с компонентами u_1, u_2, u_3, то вместо (24)–(26) имеем

$$\overset{*}{u}_k(x)=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\omega^p\overset{*\,(q,p)}{N}_{kmi_1\ldots i_q}\overset{*}{v}_{m,i_1\ldots i_q}$$

$$\left[C_{kilj}\overset{*\,(q,p)}{N}_{lmi_1\ldots i_q,j}+C_{kili_q}\overset{*\,(q-1,p)}{N}_{lmi_1\ldots i_{q-1}}\right]_{,i}+C_{ki_qlj}\overset{*\,(q,p)}{N}_{lmi_1\ldots i_{q-1},j}+C_{ki_qli_{q-1}}\overset{*\,(q-1,p)}{N}_{lmi_1\ldots i_{q-2}}+$$

$$+i\mu\overset{*\,(q,p-1)}{N}_{kmi_1\ldots i_q}+\rho\overset{*\,(q,p-2)}{N}_{kmi_1\ldots i_q}=\delta^{(q,p)}_{kmi_1\ldots i_q}\quad(q\geqslant 0,p\geqslant 0)$$

$$\delta^{(2,0)}_{kmi_1i_2}=C^0_{ki_2mi_1},\quad \delta^{(0,1)}_{km}=i\mu^0\delta_{km},\quad \delta^{(0,2)}_{km}=\rho^0\delta_{km}$$

где все остальные константы $\delta^{(q,p)}_{kmi_1\ldots i_q}=0$, δ_{km} – дельта Кронеккера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция" и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00124).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
3. *Биргер И.А.* Некоторые общие методы решения задач теории пластичности. ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 6. С. 765–770.
4. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
5. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
6. *Победря Б.Е., Горбачев В.И.* О статических задачах упругих композитов // Вестн. МГУ. Сер. Математика, Механика. 1975. № 5. С. 101–111.

Москва

Поступила в редакцию
3.10.2000