

УДК 539.374

© 2001 г. Б.Е. ПОВЕДРЯ

**СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ
СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ**

Общая теория пластичности А.А. Ильюшина применяется к композитам. Даётся обобщение метода СН-ЭВМ на случай неоднородных сред с разрывными по координатам материальными функциями определяющих соотношений. Показывается, что для слоистых композитов размерность траекторий деформации и нагружения не может быть больше двух, откуда следует адекватность предлагаемой теории.

1. Общая теория пластичности Ильюшина. Одно из самых замечательных достижений А.А. Ильюшина – это создание "общей теории пластичности" [1, 2]. Ее простейшую формулировку можно описать следующим образом. Согласно "общему постулату изотропии" [1, 3] всякий физический тензор, например, тензор напряжений σ_{ij} , в каждой точке x объема V , занимаемого средой ($V \in R^3$), является тензором-функционалом истории деформирования (или процесса деформации). Это означает, что в некоторый момент времени $t > 0$ тензор напряжений $\sigma_{ij}(t)$ зависит в этой точке x от тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(\tau)$ во все моменты времени¹ $\tau : 0 \leq \tau \leq t$.

Если среда V считается изотропной, а связь между тензорами напряжений и деформаций квазилинейной (тензорно линейной), то, разбивая тензоры напряжений и деформаций на девиаторы и шаровые части

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} + \theta \delta_{ij} / 3, \quad \sigma = \sigma_{kk} / 3, \quad \theta = \varepsilon_{kk} \quad (1.1)$$

общему постулату изотропии дается следующая геометрическая интерпретация. Девиаторам напряжений и деформаций одним из способов ставятся в соответствие в пятимерном евклидовом пространстве R^5 векторы напряжений σ и деформаций ε . Тогда в пятимерном пространстве деформаций R^5 процесс деформаций $\varepsilon(t)$ описывается некоторой кривой (фиг. 1). В каждый момент t радиусу-вектору $\varepsilon(t)$ этой кривой соответствует некоторый пятимерный вектор $\sigma(t)$. Оба вектора можно разложить по векторам ортонормированного базиса k_I ($I = 1, 5$):

$$k_I \cdot k_J = \delta_{IJ}, \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_I(t) k_I, \quad \sigma(t) = \sigma_J(t) k_J \quad (1.2)$$

Тогда согласно общему постулату изотропии существуют зависимости

$$\delta_J(t) = S_J(\varepsilon_1(\tau), \varepsilon_2(\tau), \dots, \varepsilon_5(\tau)) \quad (J = \overline{1, 5}), \quad 0 \leq \tau \leq t \quad (1.3)$$

Считая процесс деформации $\varepsilon(t)$ достаточно гладким, можно ввести естественный параметр s [4] – длину дуги кривой $\varepsilon(t)$:

$$ds^2 = d\varepsilon \cdot d\varepsilon = d\varepsilon_I d\varepsilon_I = de_{ij} de_{ij}$$

¹ Согласно общему постулату изотропии $\sigma_{ij}(t)$ может зависеть также и от других тензоров $\mu_{ij}(t)$ и скаляров $A(t)$, но на этом здесь останавливаться не будем.

Поэтому можно ввести естественный пятигранник Френе (подвижный репер) \mathbf{e}_I ($I = \overline{1,5}$), для которого справедливы следующие соотношения

$$d\mathbf{e} / ds = \mathbf{e}_1, \quad d\mathbf{e}_I / ds = -\kappa_{I-1}\mathbf{e}_{I-1} + \kappa_I\mathbf{e}_{I+1}$$

где $\kappa_0 \equiv 0$, $\kappa_5 \equiv 0$ (по I не суммировать).

Тогда геометрическую формулировку общего постулата изотропии (1.2), (1.3) можно дать в виде

$$\sigma = A_I(\cdot)\mathbf{e}_I \quad (I = \overline{1,5}) \quad (1.4)$$

где $A_I(\cdot)$ – функционалы, зависящие от длины дуги s и кривизн $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$.

Если процесс деформаций является простым (пропорциональным), то $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = 0$ и из (1.4) вытекает теория малых упругопластических деформаций [5]:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} e_{ij}, \quad \varepsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}} = s, \quad \sigma_u = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$$

Очевидно, что формулировки (1.2), (1.3) и (1.4) эквивалентны. Заметим, что конкретный вид функционалов S_j (1.3) или A_I (1.4) в общем случае не задается. После их конкретизации² возникает проблема экспериментального нахождения n материальных функционалов ($n = \overline{1,5}$) от n аргументов. Адекватной или "серезной" [6] теория будет лишь в том случае, если удается описать схему экспериментов, используя которые эту проблему можно решить. Если траектории деформации имеют размерность не более трех ($n \leq 3$), то теория может считаться адекватной [1]. При этом для сокращения числа экспериментов пользуется частный постулат изотропии [1]. Он заключается в том, что "образ процесса напряжений в пространстве деформаций \mathcal{E}^n ", т.е. совокупность процесса $\mathbf{e}(t)$ с "пришипленным" в каждой его точке процессом напряжений $\sigma(t)$ (фиг. 1) инвариантен относительно всех вращений и отображений относительно любой плоскости в \mathcal{E}^n . В настоящее время можно считать, что постулат изотропии для $n \leq 3$ экспериментально доказан [7, 8].

Чтобы обойтись без конкретизации определяющих соотношений³, А.А. Ильюшин предложил метод СН ЭВМ для решения краевых задач общей теории пластичности. Он заключается в следующем. Исследователь располагает экспериментальным комбайном на сложное нагружение (СН), на котором возможно в пределах требуемой точности по заданной траектории деформации $\mathbf{e}(s)$ для M -образца [1] найти траекторию нагружения (напряжения) $\sigma(s)$. Кроме того исследователь располагает компьютером (ЭВМ), с помощью которого он численно решает поставленную им краевую задачу. Для этого он производит дискретизацию области V , разбивая ее на вычислительные ячейки⁴ V_k . Внутри каждой такой ячейки деформированное состояние считается однородным. Тогда согласно гипотезе макроскопической определимости А.А. Ильюшина [1] этой ячейке может быть поставлен в соответствии M -образец, который и используется при испытаниях на СН.

Если бы были известны определяющие соотношения среды в явном виде

$$\sigma_{ij} = \mathcal{F}_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (1.5)$$

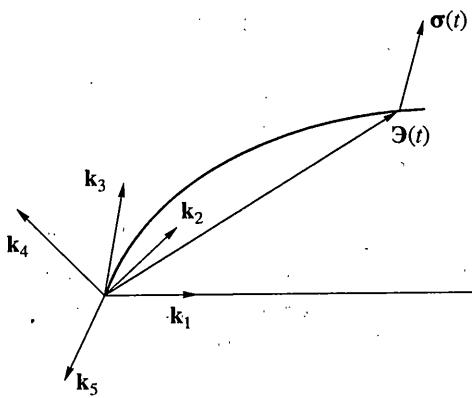
то, применяя соотношения Коши для малых деформаций

$$\varepsilon_{ij} = (u_{ij} + u_{j,i})/2 \quad (1.6)$$

² Обычно эта конкретизация устанавливается с помощью так называемого следа запаздывания, т.е. части траектории деформации $\mathbf{e}(s')$ ($s' \in [s_1, s]$, $s_1 > 0$), которая учитывается при определении зависимости вектора напряжений $\sigma(s)$ от истории деформирования.

³ Конкретизация, разумеется, вводится гипотезами, требующими дополнительных обоснований.

⁴ Вопрос о размерах вычислительной ячейки решается по-разному в зависимости от исследуемой задачи.



Фиг. 1

и подставляя (1.5), (1.6) в уравнения равновесия среды, получим

$$\mathcal{F}_{ij,j}(\mathbf{u}) + X_i = 0 \quad (1.7)$$

где \mathbf{X} – вектор объемных сил. Пусть граничные условия на поверхности, ограничивающей объем V , имеют вид

$$u_i|_{\Sigma} = u_i^0 \quad (1.8)$$

Введенные при дискретизации вычислительные ячейки позволяют решить тем или иным способом краевую задачу (1.7), (1.8) (задачу П).

Однако оператор \mathcal{F}_{ij} (1.5) неизвестен. Поэтому в качестве нулевого приближения полагаем аппроксимационные определяющие соотношения

$$\sigma_{ij} = \mathcal{B}_{ij}^{(0)}(\varepsilon_{kl}) \quad (1.9)$$

Для определяющих соотношений (1.9) записываем уравнения равновесия в перемещениях

$$\mathcal{B}_{ij,j}^{(0)}(\mathbf{u}) + X_i = 0 \quad (1.10)$$

Решив тем или иным численным способом краевую задачу (1.10), (1.8) (задачу П⁰), получим поля перемещений $u_i^{(0)}$, деформаций $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ и напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$. При этом тензору $\varepsilon_{ij}^{(0)}(t) = e_{ij}^{(0)}(t) + \theta^{(0)}\delta_{ij}/3$ соответствует процесс деформации $\varphi^{(0)}(t)$, а тензору $\sigma_{ij}^{(0)}(t) = s_{ij}^{(0)}(t) + \sigma^{(0)}\delta_{ij}$ – процесс нагружения (напряжения) $\sigma^{(0)}(t)$. Затем для процессов деформации $\varphi^{(0)}(t)$ на M -образцах, соответствующих каждой вычислительной ячейке V_h , с помощью комбайна СН находим процесс нагружения $\sigma^{(0)*}(t)$. Зададим некоторый функционал $\rho(\sigma_1(t), \sigma_2(t))$, с помощью которого определяется близость двух процессов нагружения $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$. Пусть δ – некоторая величина, которая удовлетворяет критерию близости этих процессов. Тогда, если $\rho(\sigma^{(0)*}(t) - \sigma^{(0)}(t)) \leq \delta$, то считаем задачу решенной и принимаем решение задачи П⁰ за приближенное решение задачи П.

В противном случае подберем определяющие соотношения

$$\sigma_{ij} = \mathcal{B}_{ij}^{(1)}(\varepsilon_{kl}) \quad (1.11)$$

для которых наилучшим образом выполняются условия

$$\sigma_{ij}^{(0)*} = \mathcal{B}_{ij}^{(1)}(\varepsilon_{kl}^{(0)})$$

Для определяющих соотношений (1.11) записываем уравнения равновесия

$$\mathcal{B}_{ij,j}^{(1)}(\mathbf{u}) + X_i = 0 \quad (1.12)$$

Решив краевую задачу (1.12), (1.8) (задачу Π^1) получим поля деформаций $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ и напряжений $\sigma_{ij}^{(1)}$, которым соответствуют процессы деформации $\varepsilon^{(1)}(t)$ и нагружения $\sigma^{(1)}(t)$. С помощью комбайна СН находим процесс нагружения $\sigma^{(1)*}(t)$, соответствующий процессу деформаций $\varepsilon^{(1)}(t)$, и проверяем условие

$$\rho(\sigma^{(1)*}(t) - \sigma^{(1)}(t)) \leq \delta$$

Если оно выполняется, то считаем, что решение задачи Π^1 есть приближенное решение задачи Π . В противном случае находим определяющие соотношения $\sigma_{ij} = \mathcal{B}_{ij}^{(2)}(\varepsilon_{kl})$ и так далее до тех пор, пока не устроит оценка $\rho(\sigma^{(n)*}(t) - \sigma^{(n)}(t)) \leq \delta$. Тогда решение задачи Π^n объявляется приближенным решением задачи Π , удовлетворяющим по точности.

2. Осреднение в механике композитов. Если определяющие соотношения (1.5) явно зависят от координат

$$\sigma_{ij} = \mathcal{F}_{ij}(\varepsilon_{kl}, \mathbf{x}) \equiv \mathcal{F}_{ij}(\partial \mathbf{u}, \mathbf{x}), \quad \partial \mathbf{u} \equiv \text{Grad } \mathbf{u} \quad (2.1)$$

то тело, занимающее объем V , называется неоднородным. Если же материальные функции, соответствующие такому телу, являются разрывными функциями координат, то тело называется композитом. В таком случае для краевой задачи (1.7), (1.8) (задачи Π) разыскивается обобщенное решение [6]. Для композитов, обладающих регулярной структурой, решение задачи (2.1), (1.8) (задачи Π) находится методом осреднения [6, 9]. Его существование заключается в следующем. Наряду с глобальными (медленными) координатами \mathbf{x} вводятся еще локальные (быстрые) $\xi = \mathbf{x}/\alpha$, где α – малый геометрический параметр равный единице, деленный на N – число ячеек периодичности, из которых составлен композит, обладающий регулярной структурой. Решение задачи Π ищем в виде асимптотического разложения

$$u_i = v_i(\mathbf{x}) + \alpha N_i^{(1)}(\xi, \partial \mathbf{v}) + \alpha^2 N_i^{(2)}(\xi, \partial \mathbf{v}, \partial^2 \mathbf{v}) + \alpha^3 N_i^{(3)}(\xi, \partial \mathbf{v}, \partial^2 \mathbf{v}, \partial^3 \mathbf{v}) + \dots = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q N_i^{(q)} \quad (2.2)$$

где $N_i^{(0)} \equiv v_i(\mathbf{x})$ и все локальные функционалы отрицательного уровня тождественно равны нулю.

Тогда, очевидно,

$$u_{i,j} = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q [N_{i,j}^{(q+1)} + N_{i,j}^{(q)}] \quad (2.2)$$

где запятой, как и прежде, обозначается производная по медленной координате x_i , а чертой – по быстрой ξ .

Используя (2.2), разложим определяющие соотношения (2.1) в ряд по параметру α :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \mathcal{F}_{ij}(\varepsilon_{kl}, \mathbf{x}, \xi) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \frac{\partial^r \mathcal{F}_{ij}}{\partial \varepsilon_{k_1 l_1} \partial \varepsilon_{k_2 l_2} \dots \partial \varepsilon_{k_r l_r}} (\partial \mathbf{v} + \nabla \mathbf{N}^{(1)}) \times \\ &\times \sum_{q_1=0}^{\infty} \sum_{q_2=0}^{\infty} \dots \sum_{q_r=0}^{\infty} \alpha^{q_1+q_2+\dots+q_r} [N_{k_1 l_1}^{(q_1+1)} + N_{k_1 l_1}^{(q_1)}] [N_{k_2 l_2}^{(q_2+1)} + N_{k_2 l_2}^{(q_2)}] \dots [N_{k_r l_r}^{(q_r+1)} + N_{k_r l_r}^{(q_r)}] \end{aligned} \quad (2.3)$$

причем $\nabla \mathbf{N}^{(1)} \equiv N_{j|i}^{(1)} \mathbf{k}_i \otimes \mathbf{k}_j$ и под производной нулевого порядка понимается сама функция.

Подставляя разложение (2.3) в уравнения равновесия и граничные условия задачи Π , получаем две рекуррентные последовательности задач D_n , E_n ($n = 0, 1, \dots$). Каждая задача D_n первой из этих рекуррентных последовательностей заключается в определении локальных функционалов $\mathbf{N}^{(q)}$, для которых формулируется задача в виде уравнений равновесия

$$\mathcal{F}_{ij|j}(\mathbf{N}^{(q)}, \mathbf{x}, \xi) = G_i(\mathbf{N}^{(0)}, \mathbf{N}^{(1)}, \dots, \mathbf{N}^{(q-1)}) \quad (2.4)$$

с периодическими условиями вместо граничных. Эти условия требуют, чтобы

$$\langle \mathbf{N}^{(q)} \rangle = 0, \quad [[\mathbf{N}^{(q)}]] = 0 \quad (2.5)$$

где угловые скобки означают средние значения по ячейке периодичности, а двойные квадратные скобки – величину скачка при переходе из рассматриваемого элемента периодичности в соседние (в направлении внешней нормали). После нахождения локальных функционалов с помощью операторов осреднения находятся так называемые эффективные определяющие соотношения композита [6].

Каждая задача E_n второй рекуррентной последовательности представляет собой краевую задачу для однородной среды, определяющие соотношения которой совпадают с эффективными определяющими соотношениями. Решая такую задачу, находим "средние" поля перемещений, деформаций и напряжений.

В настоящее время метод осреднения получил широкое распространение для решения задач механики композитов.

Число задач каждой рекуррентной последовательности, которое необходимо решить для требуемой точности, зависит от числа N ячеек периодичности. Чем оно больше, тем меньше требуется решить задач.

Теория, которая строится на решении только одной задачи каждой рекуррентной последовательности (D_0 и E_0), называется теорией нулевого приближения. Для ее решения достаточно знать решение задачи E_0 (теории эффективного модуля), а также локальные функционалы первого уровня $\mathbf{N}^{(1)}$, которые находятся из решения задачи D_0 . Для их отыскания из соотношений (2.3), в которых следует положить $r = 0$, выписывают определяющие соотношения нулевого уровня

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \mathcal{F}_{ij}^{(0)}(\partial \mathbf{v}, \xi) = \mathcal{F}_{ij}(\partial \mathbf{v} + \nabla \mathbf{N}^{(1)}, \xi) \quad (2.6)$$

После этого используется оператор осреднения

$$h_{ij}(\partial \mathbf{v}) = \langle \mathcal{F}_{ij}^{(0)}(\partial \mathbf{v}, \xi) \rangle = \langle \mathcal{F}_{ij}(\partial \mathbf{v} + \nabla \mathbf{N}^{(1)}, \xi) \rangle$$

Так что эффективные определяющие соотношения принимают вид

$$\sigma_{ij} = \tilde{h}_{ij}(\epsilon_{kl}) = h_{ij}(\partial \mathbf{v})$$

Заметим, что эти соотношения инвариантны относительно некоторой группы преобразований G_0 , характеризующей анизотропию приведенной среды. Группа G_0 , вообще говоря, не совпадает с группой преобразования G , характеризующей исходную среду (композит). В частности, для регулярных слоистых композитов, составленных из изотропных материалов, для которых группа G является группой изотропии (или полной группой вращения в \mathbb{R}^3), группа G_0 является группой трансверсальной изотропии (группой вращения вокруг некоторой оси \mathbf{c}).

Итак, чтобы решить задачу Π для слоистого композита по теории нулевого приближения, необходимо решить задачу D_0 , в которой операторы $\mathcal{F}_{ij}(\partial \mathbf{u}, \mathbf{x})$ определяющих соотношений (2.1) зависят только от быстрой координаты $\xi \equiv \xi_3$. Обозна-

чая штрихом производную по этой координате, запишем уравнения (2.4) для определения локальных функционалов $N^{(1)}$:

$$[\mathcal{F}_{i3}(\nu_{\alpha,1}; \nu_{\alpha,2}; (N_\alpha^{(1)})' + \nu_{\alpha,3})]' = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots) \quad (2.7)$$

Решая систему дифференциальных уравнений (2.7) при удовлетворении условий (2.5) находим [6]:

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \mathcal{F}_{ij}^{(0)}(\partial v, \xi) = \mathcal{F}_{ij}(v_{\alpha,1}, v_{\alpha,2}; R_{\alpha 3}; \xi)$$

$$R_{\alpha 3} \equiv \mathcal{F}_{ij}^{-1}(v_{\alpha,1}, v_{\alpha,2}; (\mathcal{F}_{\alpha 3}^{-1})^{-1}(v_{\beta,k}); \xi)$$

После этого находим эффективные определяющие соотношения

$$h_{ij} = \langle \mathcal{F}_{ij}(v_{\alpha,1}, v_{\alpha,2}; R_{\alpha 3}) \rangle \quad (2.8)$$

и решаем задачу E_0 теории эффективного модуля

$$h_{ij,j}(\partial v) + X_i = 0 \quad (2.9)$$

$$v_i|_{\Sigma} = u_i^0 \quad (2.10)$$

3. Определяющие соотношения трансверсально изотропной среды. Для простоты будем считать, что ось трансверсальной изотропии направлена по орту \mathbf{k}_3 . Обозначим $\gamma_{ij} = \delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}$. Тогда компоненты единичного тензора второго ранга могут быть записаны в виде $\delta_{ij} = \gamma_{ij} + \delta_{i3}\delta_{j3}$.

С помощью очевидного тождества для компонент тензора деформаций

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \epsilon_{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\epsilon_{11} - \epsilon_{22})/2 & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & (\epsilon_{22} - \epsilon_{11})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon_{13} \\ 0 & 0 & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

запишем разбиение тензора деформаций ϵ_{ij} на четыре тензора

$$\epsilon_{ij} = \theta \gamma_{ij} / 2 + \epsilon_{33} \delta_{i3} \delta_{j3} + p_{ij} + 2q_{ij} \quad (3.1)$$

где линейные инварианты тензора деформаций относительно группы трансверсальной изотропии имеют вид

$$\theta = \epsilon_{ij} \gamma_{ij} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22}, \quad \epsilon_{33} = \epsilon_{ij} \delta_{i3} \delta_{j3}$$

а квадратичные инварианты, построенные с помощью девиаторов

$$q_{ij} = \frac{1}{2}(\epsilon_{i3} \delta_{j3} + \epsilon_{j3} \delta_{i3}) - \epsilon_{33} \delta_{i3} \delta_{j3}$$

$$p_{ij} = \frac{1}{2}(\epsilon_{ik} \gamma_{kj} + \epsilon_{jk} \gamma_{ki}) - \frac{1}{2} \theta \gamma_{ij} - q_{ij}$$

могут быть записаны в виде

$$q^2 = 2q_{ij}q_{ij} = \epsilon_{i3} \epsilon_{j3}$$

$$p^2 = p_{ij}p_{ij} = \frac{1}{2}[(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + 4\epsilon_{12}^2]$$

Заметим, что каждый из четырех тензоров, составляющих разложение (3.1), при вращении вокруг оси k_3 сохраняет свой вид, и все эти тензоры попарно ортогональны.

Для тензора напряжений построим разложение аналогичное (3.1)

$$\sigma_{ij} = \dot{\sigma}\gamma_{ij} + \sigma_{33}\delta_{i3}\delta_{j3} + P_{ij} + 2Q_{ij} \quad (3.2)$$

$$\dot{\sigma} = \sigma_{ij}\gamma_{ij}/2 = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2, \quad \sigma_{33} = \sigma_{ij}\delta_{i3}\delta_{j3}$$

$$Q_{ij} = (\sigma_{i3}\delta_{j3} + \sigma_{j3}\delta_{i3})/2 - \sigma_{33}\delta_{i3}\delta_{j3}$$

$$P_{ij} = (\sigma_{ik}\gamma_{kj} + \sigma_{jk}\gamma_{ki})/2 - \dot{\sigma}\gamma_{ij} - Q_{ij}$$

В разложениях (3.1) и (3.2) участвуют по два девиатора p_{ij} , q_{ij} и P_{ij} , Q_{ij} . Они связаны с девиаторами разложения (1.1) e_{ij} и s_{ij} следующим образом

$$e_{ij} = p_{ij} + 2q_{ij} + a_{ij} \quad (3.3)$$

$$s_{ij} = P_{ij} + 2Q_{ij} + A_{ij} \quad (3.4)$$

$$a_{ij} = \frac{1}{6}(\dot{\theta} - 2\epsilon_{33})(\gamma_{ij} - 2\delta_{i3}\delta_{j3}) \quad (3.5)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{3}(\dot{\theta} - \sigma_{33})(\gamma_{ij} - 2\delta_{i3}\delta_{j3}) \quad (3.6)$$

Если тензор напряжений σ_{ij} является квазилинейной тензорной трансверсально изотропной функцией тензора деформаций ϵ_{ij} , то в общем случае можно записать

$$P_{ij} = Pp_{ij}/p, \quad Q_{ij} = Qq_{ij}/q \quad (3.7)$$

причем считаются известными четыре материальные функции четырех аргументов

$$P = P(p, q, \dot{\theta}, \epsilon_{33}), \quad Q = (p, q, \dot{\theta}, \epsilon_{33}) \quad (3.8)$$

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(p, q, \dot{\theta}, \epsilon_{33}), \quad \sigma_{33} = \sigma_{33}(p, q, \dot{\theta}, \epsilon_{33})$$

В частности, для линейного случая соотношения (3.8) имеют вид

$$P = 2\lambda_2 p, \quad Q = 2\lambda_5 q \quad (3.9)$$

$$\dot{\sigma} = (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\theta} + \lambda_3\epsilon_{33}, \quad \sigma_{33} = \lambda_3\dot{\theta} + \lambda_4\epsilon_{33} \quad (3.10)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ – модули упругости для трансверсально изотропной среды.

Заметим, что для линейного случая (3.9), (3.10) связь между тензорами A_{ij} (3.6) и a_{ij} (3.5) имеет вид

$$A_{ij} = 2(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)a_{ij} + (2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4)\epsilon_{33}\gamma_{ij}/3 + \\ + 2(\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2)\epsilon_{33}\delta_{i3}\delta_{j3}/3 \quad (3.11)$$

Для линейной изотропной среды $\lambda_3 = \lambda_1$, $\lambda_5 = \lambda_2$, $\lambda_4 = \lambda_1 + 2\lambda_2$, поэтому соотношения (3.9), (3.10) примут вид

$$P = 2\lambda_2 p, \quad Q = 2\lambda_2 q$$

$$\dot{\sigma} = (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\theta} + \lambda_1\epsilon_{33}, \quad \sigma_{33} = \lambda_1\dot{\theta} + (\lambda_1 + 2\lambda_2)\epsilon_{33}$$

а соотношения (3.11) – вид

$$A_{ij} = 2\lambda_2 a_{ij} \quad (3.12)$$

4. Метод СН ЭВМ в механике композитов. В п. 2 описана процедура решения задачи механики композитов по теории нулевого приближения для случая, когда определяющие соотношения каждого компонента известны.

В случае, если они таковыми не являются, можно использовать технику метода СН ЭВМ, описанную в п. 1. Рассмотрим сначала приведенную (квазиоднородную) среду, которая является трансверсально изотропным телом. Операторные определяющие соотношения такой среды не известны в аналитическом виде, но мы располагаем комбайном СН и компьютером ЭВМ. Будем считать справедливыми разложения (3.1) и (3.2) и предположим для простоты, что линейные инварианты тензоров напряжений и деформаций связаны по линейному закону (3.10). Поставим в соответствии каждому из девиаторов P_{ij} , q_{ij} , P_{ij} , Q_{ij} соответствующие векторы в двумерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^2 : \mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{P} , \mathbf{Q} . Тогда в двух двумерных пространствах деформаций \mathcal{E}_p^2 (фиг. 2) и \mathcal{E}_q^2 (фиг. 3) описываются процессы $\mathbf{p}(t) = p_1(t)\mathbf{k}_1 + p_2(t)\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{q}(t) = q_1(t)\mathbf{k}_1 + q_2(t)\mathbf{k}_2$.

Каждый из векторов, соответствующих девиаторам напряжений, может быть представлен в виде суммы

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_q, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_q + \mathbf{Q}_p \quad (4.1)$$

При этом векторы \mathbf{P}_p и \mathbf{Q}_p строятся в каждой точке траектории $\mathbf{p}(t)$ пространства \mathcal{E}_p^2 , а векторы \mathbf{Q}_q и \mathbf{P}_q – в каждой точке траектории $\mathbf{q}(t)$ пространства \mathcal{E}_q^2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_p &= C_1(p_1(\tau), p_2(\tau))\mathbf{k}_1 + C_2(p_1(\tau), p_2(\tau))\mathbf{k}_2 \\ \mathbf{Q}_p &= D_1(p_1(\tau), p_2(\tau))\mathbf{k}_1 + D_2(p_1(\tau), p_2(\tau))\mathbf{k}_2 \\ \mathbf{Q}_q &= L_1(q_1(\tau), q_2(\tau))\mathbf{k}_1 + L_2(q_1(\tau), q_2(\tau))\mathbf{k}_2 \\ \mathbf{P}_q &= M_1(q_1(\tau), q_2(\tau))\mathbf{k}_1 + M_2(q_1(\tau), q_2(\tau))\mathbf{k}_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Считая процессы $\mathbf{p}(t)$ и $\mathbf{q}(t)$ достаточно гладкими, можно ввести естественные параметры l и m как длины друг соответствующих траекторий $\mathbf{p}(t)$ и $\mathbf{q}(t)$:

$$dl^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = (dp_1)^2 + (dp_2)^2, \quad dm^2 = d\mathbf{q} \cdot d\mathbf{q} = (dq_1)^2 + (dq_2)^2$$

Поэтому в каждом из пространств \mathcal{E}_p^2 и \mathcal{E}_q^2 существуют естественные реперы

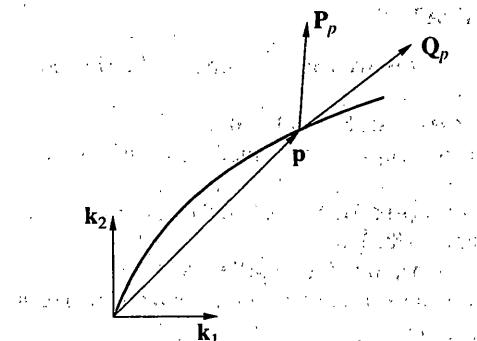
$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dl} &= \pi_1, \quad \frac{d\pi_1}{dl} = k_p \pi_2, \quad \frac{d\pi_2}{dl} = -k_p \pi_1 \\ \frac{d\mathbf{q}}{dm} &= \kappa_1, \quad \frac{d\kappa_1}{dm} = k_q \kappa_2, \quad \frac{d\kappa_2}{dm} = -k_q \kappa_1 \end{aligned}$$

Тогда геометрическая формулировка общего постулата изотропии Ильюшина имеет следующий вид

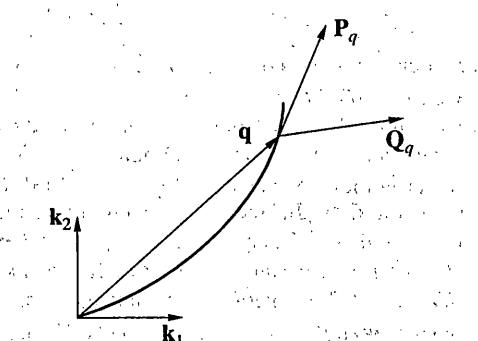
$$\mathbf{P}_p = A_I(l, k_p) \pi_I, \quad \mathbf{Q}_p = B_I(l, k_p) \pi_I \quad (4.3)$$

$$\mathbf{Q}_q = U_I(m, k_q) \kappa_I, \quad \mathbf{P}_q = V_I(m, k_q) \kappa_I \quad (4.4)$$

Очевидно, что формулировки (4.2) и (4.3), (4.4) эквивалентны. Видимо, в некоторых случаях можно ограничиться простейшим вариантом теорий, когда в пространстве \mathcal{E}_p^2 рассматривается только вектор $\mathbf{P}_p = \mathbf{P}$, а в пространстве \mathcal{E}_q^2 только вектор $\mathbf{Q}_q = \mathbf{Q}$. В этом случае в (4.1) следует положить $\mathbf{P}_q = 0$, $\mathbf{Q}_p = 0$ и теория будет



Фиг. 2



Фиг. 3

адекватной, ибо для описания двумерных траекторий нетрудно построить реальные эксперименты [10].

Заметим, что пространства \mathcal{E}_p^2 и \mathcal{E}_q^2 являются независимыми в том смысле, что первые из соотношений (4.3) и (4.4) устанавливаются независимо друг от друга [11]. В каждом из этих пространств независимо определяется, например, след запаздывания [1] и в соответствии с этим производится классификация траекторий (простые процессы, траектории малой кривизны, двузвенные процессы и т.п.).

Описание метода СН ЭВМ для решения задачи E_0 (2.9), (2.10) по существу совпадает с описанием, данным в п. 1. При этом только следует неизвестные операторные соотношения (1.5) заменить на (2.6), а в качестве аппроксимационных определяющих соотношений (1.9) выбрать соотношения теории малых упругопластических деформаций (3.7), (3.10) и $P = P(p)$, $Q = Q(q)$ (или даже (3.9)). В качестве же M -образцов необходимо взять так называемые представительные образцы [6], которые составлены из достаточно большого числа ячеек периодичности.

Применяя итерационную процедуру метода СН ЭВМ, с требуемой точностью находится решение задачи по теории эффективного модуля.

Чтобы учесть микронапряжения композита, необходимо использовать процедуру СН ЭВМ для решения задачи D_0 (2.7). В этом случае определяющие соотношения \mathcal{F}_{ij} также неизвестны. Но на комбайне СН для каждого процесса $[N_\alpha^{(1)}(t)]' + v_{\alpha,3}(t)$ экспериментально строится процесс нагружения. При этом вычислительные ячейки, соответствующие M -образцам, выбираются только в пределах одной единственной ячейки периодичности. После нахождения $N_\alpha^{(1)}(t)$ и определяющих соотношений нулевого уровня по формулам (2.8) могут быть найдены эффективные определяющие соотношения и проведен анализ сравнения с результатами решения методом СН ЭВМ задачи D_0 .

Заметим, что формулы (3.3) – (3.6), (3.11), (3.12) позволяют надеяться, что в случае неадекватности метода СН ЭВМ для изотропной среды (при $n > 3$) использование разложений (3.1), (3.2) может сделать теорию адекватной в силу замены пятимерных траекторий деформаций двумя двумерными траекториями. Впрочем, делать какие-либо выводы нельзя до тех пор, пока предложенная теория не будет экспериментально подтверждена.

Работа выполнена при поддержке гранта ИНТАС (проект 96-2306) и Федеральной Целевой Программы "Интеграция" (проект 426).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
3. Ильюшин А.А. Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 3–29.
4. Фиников С.П. Дифференциальная геометрия. М.: Изд-во МГУ, 1961. 158 с.
5. Ильюшин А.А. Пластичность. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
6. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 335 с.
7. Ленский В.С. Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном нагружении // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 11. С. 15–23.
8. Васин Р.А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // Упругость и неупругость. Вып. 1. М.: Изд-во МГУ, 1971. С. 59–126.
9. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
10. Победря Б.Е. О теории пластичности трансверсально-изотропных материалов // Изв. РАН. МТТ. 1990. № 3. С. 96–101.
11. Победря Б.Е. Особенности теории процессов для композитов // Механика композитных материалов. 1984. № 4. С. 612–617.

Москва

Поступила в редакцию

17.07.2000