МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2001

УДК 531.552

© 2001 г. М.В. ШАМОЛИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ, ЗАКРУЧЕННОГО ВОКРУГ СВОЕЙ ПРОДОЛЬНОЙ ОСИ

Статья посвящена исследованию пространственного свободного торможения динамически симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания [1–3]. Основной гипотезой, используемой при построении динамической модели, является гипотеза квазистационарности [1, 4]. Предполагается, что тело взаимодействует со средой лишь частью своей поверхности, имеющей форму круглого диска. Режим прямолинейного поступательного торможения такого тела при отсутствии собственного вращения неустойчив по отношению к углу атаки и угловой скорости. В данной работе показано, что при увеличении собственной закрутки тела вокруг продольной оси в фазовом пространстве динамических уравнений появляется притягиваемая двумерная плоскость.

1. Постановка задачи и модельные предположения. *1.1. Режим прямолинейного поступательного торможения.* Рассмотрим задачу о пространственном движении однородного осесимметричного твердого тела массы m, часть поверхности которого имеет форму плоского диска, обтекаемого средой по законам струйного обтекания [5, 6]. Пусть остальная часть поверхности тела размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края диска, и не испытывает действия среды. Похожие условия могут возникнуть, например, после входа тела в жидкость.

Предположим, что касательные силы, действующие со стороны среды на диск, отсутствуют. Тогда сила $\mathbf{S}$, приложенная к телу со стороны среды, не меняет своей ориентации относительного тела, направлена по нормали к диску. Предполагается, что сила тяжести, действующая на тело, пренебрежимо мала по сравнению с силой сопротивления со стороны среды.

Среди движений тела существует режим прямолинейного поступательного торможения, когда скорость движения тела ортогональна плоскости диска, а перпендикуляр, опущенный из центра тяжести C тела на плоскость диска, принадлежит линии действия силы $\mathbf{S}$.

При возмущении режима прямолинейного поступательного торможения вектор скорости центра диска D, вообще говоря, отклоняется от оси геометрической симметрии на угол атаки α. При этом точка N приложения силы сопротивления $\mathbf{S}$ смещается вдоль диска на величину R. Необходимо также заметить, что прямая DN является пересечением плоскости, натянутой на пару $(\mathbf{v}, CD)$, и плоскости диска.

Свяжем с телом правую систему координат $Dxyz$ так, что x – ось геометрической симметрии тела, а y и z лежат в плоскости диска.

1.2. Случай динамической симметрии. Тензор инерции тела в осях $Dxyz$ имеет диагональный вид: $\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_3\}$ и, очевидно, само тело динамически симметрично, т.е. $I_2 = I_3$.

1.3. Гипотеза квазистационарности. Будем предполагать, что точка приложения N силы сопротивления определяется лишь одним параметром – углом атаки α, измеряемым между вектором скорости $\mathbf{v}$ точки D и прямой Dx. Таким образом, $DN = R(\alpha)$.

Воспользуемся гипотезой квазистационарности [4] и примем величину силы $\mathbf{S}$ воздействия среды в виде $S = s_1 v^2$, а коэффициент сопротивления s_1 является неотрицательной функцией лишь угла атаки: $s_1 = s_1(\alpha) = s(\alpha)\,\mathrm{sign}\cos\alpha \geqslant 0$.

1.4. Системы координат. Для описания положения тела в пространстве выберем декартовы координаты (x_0, y_0, z_0) точки D и три угла (θ, ψ, φ), которые определяются подобно навигационным углам. Поворот от системы $Dx_0y_0z_0$ к системе $Dxyz$ представляется в виде композиции трех поворотов.

Рассмотрим сферические координаты (v, α, β) конца вектора скорости точки D, при этом угол β отсчитывается от оси y в плоскости диска до прямой DN. Эта прямая является пересечением двух плоскостей, первая из которых проходит через вектор $\mathbf{v}$ и ось x, а вторая – плоскость диска.

Сферические координаты (v, α, β) и компоненты угловой скорости $\Omega = \Omega_x e_x + \Omega_y e_y + \Omega_z e_z$ выражаются через фазовые переменные неинтегрируемыми соотношениями. Фазовое состояние системы можно определить через функции $(v, \alpha, \beta, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \varphi)$, первые шесть величин рассматриваются в качестве квазискоростей системы, а вторые являются циклическими.

1.5. Уравнения движения. В силу теоремы о движении центра масс (в проекциях на подвижные оси) и теоремы об изменении кинетического момента относительно осей Кенига, получаем полную систему дифференциальных уравнений, рассматриваемую в динамическом пространстве квазискоростей $R^1_+\{v\} \times T^2\{\alpha, \beta\} \times R^3\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$:

$$
\begin{aligned}
& v^{\boldsymbol\cdot}\cos\alpha - \alpha^{\boldsymbol\cdot} v\sin\alpha + \Omega_y v\sin\alpha\sin\beta - \Omega_z v\sin\alpha\cos\beta + \sigma\left(\Omega_y^2 + \Omega_z^2\right) = -\frac{s(\alpha)}{m}v^2 \\
& v^{\boldsymbol\cdot}\sin\alpha\cos\beta + \alpha^{\boldsymbol\cdot} v\cos\alpha\cos\beta - \beta^{\boldsymbol\cdot} v\sin\alpha\sin\beta + \\
& +\Omega_z v\cos\alpha - \Omega_x v\sin\alpha\sin\beta - \sigma\Omega_x\Omega_y - \sigma\Omega_z^{\boldsymbol\cdot} = 0 \\
& v^{\boldsymbol\cdot}\sin\alpha\sin\beta + \alpha^{\boldsymbol\cdot} v\cos\alpha\sin\beta + \beta^{\boldsymbol\cdot} v\sin\alpha\cos\beta + \\
& +\Omega_x v\sin\alpha\cos\beta - \Omega_y v\cos\alpha - \sigma\Omega_x\Omega_z + \sigma\Omega_y^{\boldsymbol\cdot} = 0 \\
& I_1\Omega_x^{\boldsymbol\cdot} + (I_3 - I_2)\Omega_y\Omega_z = 0 \\
& I_2\Omega_y^{\boldsymbol\cdot} + (I_1 - I_3)\Omega_x\Omega_z = -z_N s(\alpha)v^2 \\
& I_3\Omega_z^{\boldsymbol\cdot} + (I_2 - I_1)\Omega_x\Omega_y = y_N s(\alpha)v^2
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

Здесь координаты точки N в системе (e_x, e_y, e_z) имеют вид $(0, y_N(\alpha, \beta), z_N(\alpha, \beta))$, где $y_N(\alpha, \beta) = R(\alpha)\cos\beta$, $z_N(\alpha, \beta) = R(\alpha)\sin\beta$, а σ – расстояние DC.

1.6. Эксперимент. Для описания результатов и конкретных свойств движения тела были проведены эксперименты по регистрации движения в воде однородных круговых цилиндров[1]. Эксперимент позволил сделать несколько важных выводов. Один из них: прямолинейное поступательное торможение цилиндра (в воде) (без закрутки около продольной оси) принципиально неустойчиво. Неустойчивость прямо-

[1] Эксперименты проводились в Институте механики МГУ им. М.В. Ломоносова В.А. Ерошиным и В.М. Макаршиным.

линейного поступательного торможения по части переменных α, Ω_y, Ω_z ($\Omega_{x0} \equiv 0$) можно получить и теоретически, исследуя уравнения (1.1).

2. Распространение модели на конечные углы атаки. *2.1. Классы движений тела с конечными углами атаки.* Рассмотрим движение тела в среде с конечными углами атаки. Только при углах, близких к $\pi/2$, неизбежен замыв боковой поверхности. Расширим, таким образом, область определения пары динамических функций на интервал $(0, \pi/2)$. Но фактически продолжать динамические функции необходимо на всю числовую прямую подобно С.А. Чаплыгину [7].

2.2. Случай зависимости пары динамических функций от угла атаки. Как уже отмечалось, на первом этапе исследования будем рассматривать случай зависимости величин R и s лишь от угла атаки. Таким образом, в работе не учитывается дополнительное демпфирование со стороны среды, возникающее от воздействия вращательных производных от момента аэродинамической силы по угловой скорости [8, 9]. Учет такого влияния является следующим трудоемким этапом исследования проблемы.

Для качественного описания пары функций (R, s) используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания.

2.3. Описание классов динамических функций. Вводимые классы динамических функций достаточно широки: они состоят из функций гладких, 2π-периодических ($R(\alpha)$ – нечетная, а $s(\alpha)$ – четная), удовлетворяющих следующим условиям: $R(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $R'(0) > 0, R'(\pi) < 0$; $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$. Как R, так и s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$. В частности, аналитические функции $R(\alpha) = R_0(\alpha) = A \sin \alpha$, $s(\alpha) = s_0(\alpha) = B \cos \alpha$; $A, B > 0$, служат типичными представителями описанных классов и полностью соответствуют случаю С.А. Чаплыгина [7].

На эти функциональные классы накладываются достаточно слабые условия, поэтому они достаточно широки и заведомо включают допустимые конкретные функции, взятые для каждого мыслимого тела и для каждого мыслимого движения.

Но, конечно, не каждой конкретной паре динамических функций можно поставить в соответствие мыслимое твердое тело со своим движением. Поэтому исследование данной проблемы для достаточно широких классов динамических функций позволяет говорить об относительно полном изучении задачи о движении тела в среде в рамках данных модельных предположений в условиях квазистационарности.

В дальнейшем в рассматриваемых динамических системах возникает произведение $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$. Из вышеперечисленных условий следует, что F – достаточно гладкая нечетная, π – периодическая функция, удовлетворяющая условиям $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $F'(0) > 0$, $F'(\pi/2) < 0$. В частности, аналитическая функция $F = F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha$ также является типичным представителем возникающего класса функций.

3. Динамические уравнения движения в случае динамической симметрии тела. *3.1. Аналитический первый интеграл.* Поскольку сила сопротивления допускает группу вращения тела вокруг оси динамической (и геометрической) симметрии (проходящей через центр масс и центр диска), сохраняется компонента продольной составляющей угловой скорости

$$\Omega_x = \Omega_{x0} = \text{const} \tag{3.1}$$

3.2. Динамические уравнения движения тела с собственным вращением. Если $z_1 = \Omega_y \cos \beta + \Omega_z \sin \beta$, $z_2 = \Omega_z \cos \beta - \Omega_y \sin \beta$, $z_i = Z_i v$ $(i = 1, 2)$, $\alpha^{\cdot} = \alpha' v$, $\beta^{\cdot} = \beta' v$, $v^{\cdot} = v' v$, то систему (1.1) в случае (3.1) можно преобразовать к виду

$$v' = v\, \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + \sigma \frac{I_1}{I_2} \Omega_{x0} Z_1 \sin \alpha \tag{3.2}$$

$$\alpha' = -Z_2 + \sigma\left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\sin\alpha + \frac{\sigma}{I_2}F(\alpha)\cos\alpha + \frac{\sigma I_1}{\upsilon\, I_2}\Omega_{x0}Z_1\cos\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha \qquad (3.3)$$

$$Z_2' = \frac{1}{I_2}F(\alpha) + Z_2\left\{-\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - \frac{\sigma I_1}{\upsilon\, I_2}\Omega_{x0}Z_1\sin\alpha\right\} - Z_1\Psi_2(\upsilon, \alpha, Z_1, Z_2) \qquad (3.4)$$

$$Z_1' = Z_1\left\{-\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - \frac{\sigma I_1}{\upsilon\, I_2}\Omega_{x0}Z_1\sin\alpha\right\} + Z_2\Psi_2(\upsilon, \alpha, Z_1, Z_2) \qquad (3.5)$$

$$\beta' = -\frac{\Omega_{x0}}{\upsilon} + Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma I_1}{\upsilon\, I_2}\Omega_{x0}\frac{Z_2}{\sin\alpha}$$

$$(\cdot)' = \frac{1}{\upsilon}(\cdot)^{\cdot}, \quad \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma\left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\cos\alpha + \frac{\sigma}{I_2}F(\alpha)\sin\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha,$$

$$\Psi_2(\upsilon, \alpha, Z_1, Z_2) = -\frac{I_1}{I_2}\frac{\Omega_{x0}}{\upsilon} + Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma I_1}{\upsilon\, I_2}\Omega_{x0}\frac{Z_2}{\sin\alpha}$$

Уравнения (3.2)–(3.5) образуют замкнутую подсистему четвертого порядка, если считать, что $\Omega_{x0} \neq 0$.

4. Вопросы устойчивости прямолинейного торможения тела, закрученного около продольной оси. Исследуем вопрос об устойчивости прямолинейного стационарного режима свободного торможения твердого тела в сопротивляющейся среде в условиях динамической симметрии, когда тело имеет собственную закрутку около продольной оси с постоянной угловой скоростью $\Omega_x = \Omega_{x0} \neq 0$.

При выполнении последнего условия система (3.2)–(3.5) уже не допускает отделение независимой подсистемы третьего порядка. Более того, вводя новую переменную ω_0 по формуле $\Omega_{x0} = \omega_0\upsilon$, аналогичной замене угловых скоростей z_i скоростями Z_i, если и получится "отделение" уравнения (3.2) от системы (3.2)–(3.5), то при этом к последней добавится уравнение $\omega_0'\upsilon + \omega_0\upsilon' = 0$, в котором переменная ω_0 (в отличие от Ω_{x0}) уже не является постоянной величиной.

Классические методы линеаризации системы (используемые для исследования искомой устойчивости) в данной ситуации не приведут к успеху, поскольку сферические координаты $(\upsilon, \alpha, \beta)$ имеют неопределенность на множестве $\{(\upsilon, \alpha, \beta, Z_1, Z_2) \in R^5 : \sin\alpha = 0\}$.

Поставим цель проверки устойчивости решения системы (3.2)–(3.5)

$$\upsilon(t) = \frac{\upsilon_0}{1 - \varkappa\upsilon_0 t}, \quad \varkappa < 0, \quad \alpha = Z_1 = Z_2 = 0 \quad \left(\Omega_{x0} \neq 0\right) \qquad (4.1)$$

по части переменных α, Z_1, Z_2.

Используя метод многомерных топографических систем Пуанкаре [10], приходим к следующему утверждению.

Предложение. Частное решение (4.1) в фазовом пространстве динамических уравнений имеет притягиваемую двумерную плоскость, если $\mu_3^2 > \mu_1[\mu_1 + 2\mu_2]$, где $\mu_3 = \sigma I_1\Omega_{x0}/\upsilon_0 I_2$, $\mu_1 = 2s(0)/mn_0$, $\mu_2 = \sigma n_0$, $n_0^2 = F'(0)/I_2$.

Безразмерные параметры μ_1, μ_2, μ_3 определяют так называемые безразмерную закрутку около продольной оси, безразмерную силу сопротивления и безразмерный ее момент.

При формальном приравнивании параметра μ_2 к нулю (на тело действует лишь сила сопротивления вдоль продольной оси) последнее неравенство трансформируется в $I_1^2\Omega_{x0}^2 > 4I_2 s(0)v_0^2\overline{\sigma} = 4I_2 M_S$, где $\overline{\sigma} = I_1 s(0)/(m^2 n_0^2\sigma^2)$ – некоторое безразмерное расстояние, а M_S – момент силы сопротивления относительно некоторой точки. Данное неравенство напоминает известное неравенство Маиевского [11], которое, как известно, имеет вид $I_1^2\Omega_{x0}^2 \geqslant 4I_2 mgl_0 = 4I_2 M_g$, где g – ускорение свободного падения, M_g – момент силы тяжести, l_0 – координата центра масс.

Заметим также, что в процессе увеличения угловой скорости закрутки тела около продольной оси, топологический тип соответствующей особой точки в фазовом пространстве изменяется несколько раз. При $\Omega_{x0} = 0$ данная особая точка является отталкивающей, после первого бифуркационного значения у нее появляется одно притягивающее собственное направление, после второго бифуркационного значения – целая притягивающая собственная плоскость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды. М.: Наука, 1976. 495 с.
2. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 322 с.
3. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 312 с.
4. *Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986. 86 с.
5. *Шамолин М.В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 65–68.
6. *Шамолин М.В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 627–629.
7. *Чаплыгин С.А.* Приближенная метода решения задач о газовых струях. Т. 2. Л.: Изд-во АН СССР, 1953. С. 84–87.
8. *Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В.* Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1969. 349 с.
9. *Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В.* Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1988. 320 с.
10. *Шамолин М.В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52. Вып. 3. С. 177–178.
11. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946. 654 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.10.2000