

УДК 624.07.534.1

© 2001 г. В.А. СВЕТЛИЦКИЙ

СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Изложен численный метод определения вероятностных характеристик напряженно-деформированного состояния плоского криволинейного трубопровода, имеющего сосредоточенные массы при локальном случайном стационарном кинематическом возбуждении. Уравнения малых колебаний учитывают детерминированное статическое состояние трубопровода, вызванное сосредоточенными и распределенными силами веса. Приведенный алгоритм приближенного численного решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных позволяет учитывать при решении сосредоточенные внешние силы и реакции, возникающие в локальных связях. Рассмотрен случай, когда для снижения уровня вибраций трубопровода используется локальная пассивная виброзащита. Изложен алгоритм численного определения оптимальных параметров системы виброзащиты, при которых выполняются сформулированные критерии качества.

Рассмотрим криволинейный участок трубопровода, заполненный потоком жидкости, которая рассматривается как идеальная и несжимаемая (фигура).

Трубопровод имеет сосредоточенную массу и дополнительное локальное закрепление, представляющее собой упруго-вязкий амортизатор. Амортизатор (элемент пассивной виброзащиты) связан с вибрирующим основанием (точка k), которое вызывает принудительное смещение точки k_1 (кинематическое возмущение [1]). Рассматриваются случайные стационарные вибрации основания, приводящие к стационарным колебаниям трубопровода.

Воспользуемся общими уравнениями малых вынужденных колебаний пространственно криволинейных стержней (трубопроводов) в безразмерной форме записи в связанных осях [2, 3]:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2} - 2n_{11}w \left(\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \tau} \times \mathbf{e}_1 \right) - \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta} - A^{-1} \mathbf{M} \times \mathbf{Q}_0^{(1)} - \kappa_0 \times \mathbf{Q} - \mathbf{P} = 0$$

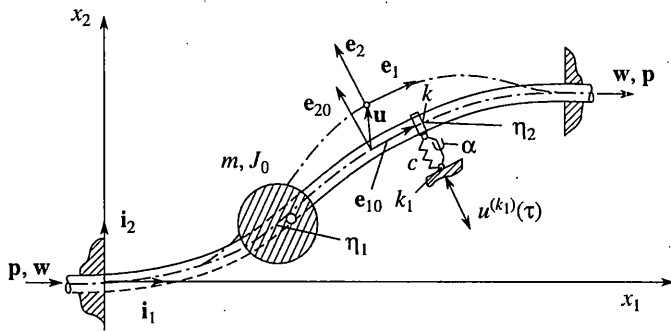
$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \eta} + A^{-1} \mathbf{M} \times \mathbf{M}_0 + \kappa_0 \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} + \mathbf{T} = 0$$

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \eta} + \kappa_0 \times \mathfrak{D} - A^{-1} \mathbf{M} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} + \kappa_0 \times \mathbf{u} - \vartheta_3 \mathbf{e}_2 + \vartheta_2 \mathbf{e}_3 = 0$$

$$\mathbf{M} = A \Delta \kappa, \quad (\mathbf{Q}_0^{(1)} = \mathbf{Q}_0 - (P_0 + n_{11}w^2) \mathbf{e}_1)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{q} + \sum_{k=1}^p \Delta \mathbf{P}^{(k)} \delta(\eta - \eta_k)$$



где τ, η – соответственно безразмерные время и дуговая координата; $n_{11} = m_2/(m_1 + m_2)$, m_1 – масса единицы длины трубопровода, m_2 – масса жидкости, приходящаяся на единицу длины трубопровода; \mathbf{u} – вектор перемещений точек осевой линии стержня; \mathfrak{D} – вектор, компонентами которого ϑ_j являются углы поворота связанных осей; \mathbf{e}_1 – единичный вектор, направленный по касательной к осевой линии стержня; \mathbf{Q}, \mathbf{M} – динамические составляющие вектора внутренних сил и вектора моментов; $\mathbf{Q}_0, \mathbf{M}_0$ – статические составляющие; $\Delta \mathbf{k}$ – вектор, компонентами которого являются приращения кривизн осевой линии стержня при колебаниях; \mathbf{k}_0 – вектор, компонентами которого являются кривизны осевой линии стержня, нагруженного статическими детерминированными силами; P_0 – безразмерная сила, зависящая от давления в жидкости; A – диагональная матрица (A_{11} – безразмерная жесткость на кручение, A_{22}, A_{33} – безразмерные изгибные жесткости).

В уравнения входит вектор \mathbf{P} , объединяющий все распределенные и сосредоточенные динамические силы, приложенные к трубопроводу. Вектор \mathbf{T} объединяет приложенные к трубопроводу сосредоточенные моменты (например, момент инерции массы m).

Для частного случая, когда осевая линия стержня есть плоская кривая, из уравнений (1) можно получить две системы уравнений: (1) систему уравнений малых колебаний стержня в плоскости $x_1 O x_2$ и (2) систему уравнений малых колебаний относительно плоскости $(x_1 O x_2)$. После преобразований получаем систему уравнений малых колебаний в плоскости чертежа (пренебрегая проекцией распределенных сил веса при колебаниях на связанные оси):

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \alpha \frac{\partial u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial Q_1}{\partial \eta} + \frac{Q_{20}}{A_{33}} M_3 + \kappa_{30} Q_2 = P_1$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + \alpha \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + 2n_{11} w \frac{\partial \vartheta_3}{\partial \tau} - \frac{\partial Q_2}{\partial \eta} - \frac{Q_{10}^{(1)}}{A_{33}} M_3 - \kappa_{30} Q_1 = P_2$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial \eta} + Q_2 = -T_3, \quad \frac{\partial \vartheta_3}{\partial \eta} - \frac{M_3}{A_{33}} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \kappa_{30} u_2 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \kappa_{30} u_1 - \vartheta_3 = 0 \quad (2)$$

$$M_3 = A_{33} \Delta \kappa_3, \quad (Q_{10}^{(1)} = Q_{10} - (P_0 + n_{11} w^2), \quad P_0 = p F_1)$$

где ϑ – угол поворота сечения в плоскости чертежа при колебаниях, κ_{30} – кривизна

осевой линии трубопровода, F_1 – площадь отверстия трубопровода

$$P_1 = -\gamma_0 \vartheta_3 \cos \vartheta_{30} \delta_1 - M \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} \delta_1$$

$$P_2 = -\gamma_0 \vartheta_3 \sin \vartheta_{30} \delta_1 - M \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \delta_1 - (c u_2 + \alpha u_2) \delta_2 + (c u_2^{(k_1)} + \alpha u_2^{(k_1)}) \delta_2$$

$$T_3 = -J_{03} \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial \tau^2} \delta_1 \quad (\delta_1 = \delta(\eta - \eta_1), \delta_2 = \delta(\eta - \eta_2))$$

Для численного решения систему уравнений (2) удобнее представить в векторной форме

$$\mathbf{L}(\mathbf{Z}) = A^{(1)} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial \tau^2} + A^{(3)} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta} + A^{(2)} \mathbf{Z} - \Phi = 0 \quad (3)$$

где

$$\mathbf{Z} = (Q_1, Q_2, M_3, \vartheta_3, u_1, u_2)^T, \quad \Phi = (P_1, P_2, T_3, 0, 0, 0)^T$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n_1 w & 0 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_{30} & -Q_{20}/A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{30} & 0 & Q_{10}^{(1)}/A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_{30} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \kappa_{30} & 0 \end{pmatrix}$$

Входящий в уравнение (3) вектор Φ можно представить в виде

$$\Phi = \Phi_{10} \ddot{\mathbf{Z}} \delta_1 + \Phi_{20} \dot{\mathbf{Z}} \delta_2 + \Phi_{30}^{(1)} \mathbf{Z} \delta_1 + \Phi_{30}^{(2)} \mathbf{Z} \delta_2 + \Phi_{20} \mathbf{b} \delta_2 + \Phi_{30}^{(2)} \mathbf{b} \delta_2 \quad (4)$$

$$\Phi_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & J_{03} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{30}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma_0 \cos \vartheta_{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_0 \sin \vartheta_{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{30}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = (0, u_2^{(k_1)}, 0, 0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{b} = (0, u_2^{(k_1)}, 0, 0, 0, 0)^T$$

Подставив $\bar{\Phi}$ в уравнение (3) окончательно получаем уравнение колебаний трубопровода при кинематическом возбуждении

$$A \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial \tau^2} + B \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta} + C\mathbf{Z} - \Phi_{20} \mathbf{b} \delta_2 - \Phi_{30}^{(2)} \mathbf{b} \delta_2 = 0 \quad (5)$$

$$A = A^{(1)} + \Phi_{10} \delta_1, \quad B = A^{(3)} + \Phi_{20} \delta_2, \quad C = A^{(2)} + \Phi_{30}^{(1)} \delta_1 - \Phi_{30}^{(2)} \delta_2$$

Приближенное решение уравнения (5) ищем в виде

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{Z}_0^{(j)}(\eta) f^{(j)}(\tau) \quad (6)$$

где $\mathbf{Z}_0^{(j)}$ – собственные векторы, определяемые из уравнения свободных колебаний; $f^{(j)}$ – неизвестные функции времени.

Для определения собственных значений и собственных векторов воспользуемся уравнениями (3) и (4):

$$A^{(1)} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta} + A^{(2)} \mathbf{Z} = -\Phi_{10} \ddot{\mathbf{Z}} \delta_1 - \Phi_{30}^{(1)} \mathbf{Z} \delta_1 - \Phi_{30}^{(2)} \mathbf{Z} \delta_2 \quad (7)$$

Полагая $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 e^{i\lambda \tau}$, из (7) получаем

$$\frac{d\mathbf{Z}_0}{d\eta} + (A^{(2)} - \lambda^2 A^{(1)}) \mathbf{Z}_0 = \Phi_{10} \lambda^2 \mathbf{Z}_0 \delta_1 - \Phi_{30}^{(1)} \mathbf{Z}_0 \delta_1 - \Phi_{30}^{(2)} \mathbf{Z}_0 \delta_2 \quad (8)$$

Решение уравнения (8) после преобразований имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_0 = & K(\eta) \mathbf{C} - G(\eta, \eta_1) (\Phi_{10} \lambda^2 + \Phi_{30}^{(1)}(\eta_1)) \mathbf{Z}_0(\eta_1) H(\eta - \eta_1) - \\ & - G(\eta, \eta_2) \Phi_{30}^{(2)}(\eta_2) \mathbf{Z}_0(\eta_2) H(\eta - \eta_2) \end{aligned} \quad (9)$$

где H – функция Хевисайда, $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_6)^T$, $K(\eta)$ – фундаментальная матрица решений однородного уравнения (8), удовлетворяющая условию $K(0) = E$.

Решение (9) должно кроме краевых условий при $\eta = 0$ и $\eta = 1$ удовлетворять двум дополнительным условиям:

$$\mathbf{Z}_0(\eta_1) = K(\eta_1) \mathbf{C} \quad (10)$$

$$\mathbf{Z}_0(\eta_2) = K(\eta_2) \mathbf{C} - G(\eta_2, \eta_1) (\Phi_{10} \lambda^2 + \Phi_{30}^{(1)}(\eta_1)) \mathbf{Z}_0(\eta_1) \quad (11)$$

Исключая из (11) $\mathbf{Z}_0(\eta_1)$, получаем

$$\mathbf{Z}_0(\eta_2) = K^{(1)} \mathbf{C} \quad (12)$$

$$K^{(1)} = K(\eta_2) - G(\eta_2, \eta_1) (\Phi_{10} \lambda^2 + \Phi_{30}^{(1)}(\eta_1)) K(\eta_1)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_0(\eta) = & K(\eta) \mathbf{C} - G(\eta, \eta_1) (\Phi_{10} \lambda^2 + \Phi_{30}^{(1)}(\eta_1)) K(\eta_1) H(\eta - \eta_1) \mathbf{C} - \\ & - G(\eta, \eta_2) \Phi_{30}^{(2)}(\eta_2) K^{(1)} H(\eta - \eta_2) \mathbf{C} \end{aligned}$$

или

$$\mathbf{Z}_0(\eta) = K^{(2)}(\eta, \eta_1, \eta_2, \lambda) \mathbf{C} \quad (13)$$

При $\eta = 0$ $z_4(0) = z_5(0) = z_6(0) = 0$ поэтому

$$c_4 = c_5 = c_6 = 0.$$

При $\eta = 1$ должны выполняться условия: $z_4(1) = z_5(1) = z_6(1) = 0$, что приводит к системе трех однородных уравнений:

$$\sum_{\rho=1}^3 k_{\nu\rho} c_{\rho} = 0 \quad (\nu = 4, 5, 6). \quad (1.4)$$

Из условия равенства определителя системы (14) численным счетом определяются собственные значения (частоты) λ , которые зависят от сосредоточенной массы и параметров амортизатора. Определив собственные значения, из (14) находим соответствующие этим значениям λ_j c_1 , c_2 , c_3 (например, $c_1^{(j)}$ и $c_2^{(j)}$, полагая $c_3^{(j)} = 1$). В результате получаем (из 13) собственные вектора

$$\mathbf{Z}_0^{(j)} = K^{(2)}(\eta, \eta_1, \eta_2, \lambda_j) \mathbf{C}^{(j)}, \quad \mathbf{C}^{(j)} = (c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, 1, 0, 0, 0)^T \quad (15)$$

Компоненты $z_{01}^{(j)}$, $z_{02}^{(j)}$ и $z_{03}^{(j)}$ собственных векторов $\mathbf{Z}_0^{(j)}$ имеют разрывы при $\eta = \eta_1$ из-за сосредоточенной массы.

Подставив приближенное выражение (6) для вектора \mathbf{Z} в уравнение (5), получим

$$\sum_{j=1}^n (A\mathbf{Z}_0^{(j)} \ddot{f}^{(j)} + B\mathbf{Z}_0^{(j)} \dot{f}^{(j)} + \mathbf{Z}_0^{(j)} f^{(j)} + C\mathbf{Z}_0^{(j)} f^{(j)}) - \Phi_{20} \mathbf{b} \delta_2 - \Phi_{30}^{(2)} \mathbf{b} \delta_2 = \Delta(\eta, \tau) \quad (16)$$

где Δ – вектор, характеризующий погрешность при принятом приближенном решении (6).

Воспользуемся принципом возможных перемещений, полагая обобщенные перемещения пропорциональными собственным векторам

$$\delta \mathbf{Z} = \sum_{j=1}^n \delta A_j E_0^{(1)} \mathbf{Z}_0^{(j)} \quad (17)$$

где δA_j – произвольные постоянные множители

$$E_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Под обобщенными возможными перемещениями понимаются не только линейные (δu_j) и угловые ($\delta \vartheta_3$) возможные перемещения, но и вариации внутренних сил δQ_j и моментов δM_j . Матрица $E_0^{(1)}$ вводится для того, чтобы скалярные произведения $\mathbf{Z} \cdot E_0^{(1)} \mathbf{Z}_0^{(j)}$ имели размерность работы (если перейти к размерным уравнениям).

В соответствии с принципом возможных перемещений потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^1 \Delta \cdot \delta \mathbf{Z} d\eta = 0 \quad (18)$$

что приводит при независимых δA_j к системе соотношений

$$\int_0^1 \Delta \cdot E_0^{(1)} \mathbf{Z}_0^{(j)} d\eta = 0 \quad (19)$$

из которых после преобразований получаем систему уравнений относительно неизвестных функций $f^{(j)}(\tau)$:

$$A^{(1)}\ddot{\mathbf{f}} + B^{(1)}\dot{\mathbf{f}} + C^{(1)}\mathbf{f} = \mathbf{d} \quad (20)$$

$$\mathbf{f} = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)})^T, \quad \mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T$$

$$a_{ij}^{(1)} = \int_0^1 (A \cdot \mathbf{Z}_0^{(j)} E_0^{(1)} \mathbf{Z}_0^{(i)}) d\eta$$

$$b_{ij}^{(1)} = \int_0^1 (B \mathbf{Z}_0^{(j)} \cdot E_0^{(1)} \mathbf{Z}_0^{(i)}) d\eta$$

$$c_{ij}^{(1)} = \int_0^1 (\mathbf{Z}_0^{(j)} \cdot E_0^{(1)} \mathbf{Z}_0^{(i)} + C \mathbf{Z}_0^{(j)} E_0^{(1)} \mathbf{Z}_0^{(i)}) d\eta$$

$$d_i = \int_0^1 (\Phi_{20} \dot{\mathbf{b}} + \Phi_{30}^{(2)} \mathbf{b}) E_0^{(1)} \mathbf{Z}_0^{(i)} \delta_2 d\eta = \Phi_{20} \dot{\mathbf{b}} E_0^{(1)} \mathbf{Z}_0^{(i)}(\eta_2) + \Phi_{30}^{(2)} \mathbf{b} E_0^{(1)} \mathbf{Z}_0^{(i)}(\eta_2)$$

После преобразований получаем

$$\mathbf{d} = (\alpha \dot{u}_2^{(k_1)} + c u_2^{(k_1)}) \mathbf{u}_0 \quad (21)$$

$$\mathbf{u}_0 = (z_{06}^{(1)}, z_{06}^{(2)}, \dots, z_{06}^{(n)})^T \quad (z_{06}^{(i)} = u_{20}^{(i)})$$

Воспользовавшись преобразованием Фурье, из уравнения (20) находим

$$\mathbf{f}_0(\omega) = W(i\omega) u_{20}^{(k_1)}(\omega) \cdot \mathbf{u}_0(\eta)$$

$$W(i\omega) = \|w(i\omega)\| = \|(i\omega^2)A^{(1)} + (i\omega)B^{(1)} + C\|^{-1} [\alpha(i\omega) + c]$$

Из (22) получаем компоненты вектора $\mathbf{f}_0(\omega)$:

$$f_0^{(j)}(\omega) = N_j u_{20}^{(k_1)}(\omega), \quad N_j(\omega) = \sum_{v=1}^n w_{jv} z_{06}^{(v)}(\eta_2) \quad (22)$$

Спектральные и взаимоспектральные плотности компонент $f_0^{(j)}(\omega)$ вектора $\mathbf{f}_0(\omega)$ равны

$$S_{f^{(j)}}(\omega) = (N_j N_j^*) S_{u_2}(\omega), \quad S_{f^{(j)} f^{(m)}}(\omega) = (N_j N_m^*) S_{u_2}(\omega)$$

где $S_{u_2}(\omega)$ – спектральная плотность смещения $u_2^{(k_1)}$, которая является четной функцией ω . Компоненты вектора \mathbf{Z} в частотной области имеют вид

$$z_v(\eta, \omega) = \sum_{j=1}^n z_{0v}^{(j)} f_0^{(j)}(\omega) \quad (23)$$

Спектральные плотности и дисперсии компонент z_v равны

$$S_{z_v}(\eta, \omega) = \left[\sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n z_{0v}^{(j)}(\eta_2) z_{0v}^{(m)}(\eta_2) N_j N_m^* \right] S_{u_2}(\omega) \quad (24)$$

$$D_{z_v}(\eta) = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n z_{0v}^{(j)}(\eta) z_{0v}^{(m)}(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} N_j N_m^* S_{u_2} d\omega \quad (25)$$

Так как $N_j N_m^* = N_{j,m,1} + iN_{j,m,2}$, где $N_{j,m,1}$ и $N_{j,m,2}$ соответственно четная и нечетная функция ω , то интегралы, входящие в (25) равны

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_j N_m^* S_{u_{20}} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} N_{j,m,1} S_{u_{20}} d\omega \quad (26)$$

Вероятностные характеристики компонент z_v вектора состояния (приняв, что они имеют нормальное распределение) позволяют определить их максимальные амплитудные ("правило трех сигм"):

$$\max z_v(\eta) = m_{z_v}(\eta) + 3\sigma_{z_v}(\eta) \quad (27)$$

где $m_{z_v}(\eta) = z_v^{(0)}(\eta)$ определяются из уравнений равновесия трубопровода при детерминированных нагрузках.

Для оценки возможного наступления предельного состояния (например, появления пластических деформаций) необходимо знать максимальные эквивалентные напряжения в сечениях трубопровода. В частном случае, когда можно пренебречь касательными напряжениями от силы Q_2 , предельное состояние зависит от максимальных нормальных напряжений

$$\sigma_m(\eta, \tau) = z_1(\eta, \tau) / F + z_3(\eta, \tau) / W_k \quad (28)$$

где σ_m – максимальное (в сечении) нормальное напряжение, F , W_k – соответственно площадь и момент сопротивления сечения.

Найдем дисперсию максимального нормального напряжения. Подставив в (28) z_1 и z_3 из (6) и воспользовавшись преобразованием Фурье, получаем

$$\sigma_{m0}(\eta, \omega) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{z_{01}^{(j)}(\eta)}{F} + \frac{z_{03}^{(j)}(\eta)}{W_k} \right) f_0^{(j)}(\omega)$$

или исключая $f_0^{(j)}(\omega)$:

$$\sigma_{m0}(\eta, \omega) = P(\eta, \omega) u_{20}^{(k_1)}(\omega) \quad (29)$$

$$P(\eta, \omega) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{z_{01}^{(j)}(\eta)}{F} + \frac{z_{03}^{(j)}(\eta)}{W_k} \right) H_j(\omega, \eta_2)$$

Спектральная плотность и дисперсия максимального напряжения равны

$$S_{\sigma_m}(\eta, \omega) = P(\eta, \eta_2, \omega) P^*(\eta, \eta_2, \omega) S_{u_{20}^{(k_1)}}(\omega),$$

$$D_{\sigma_m}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} P P^* S_{u_{20}}(\omega) d\omega \quad (30)$$

Максимальное нормальное напряжение σ_m в произвольном сечении трубопровода равно (правило трех сигм)

$$\sigma_m(\eta) = m_{\sigma_m}(\eta) + 3\sigma_{\sigma_m}(\eta) \quad (31)$$

Полученное выражение для максимального нормального напряжения позволяет определить опасное сечение, где σ_m достигает максимального значения ($\max \sigma_m$).

Максимальное нормальное напряжение зависит от числовых значений параметров (c и α) системы пассивной виброзащиты, изменяя которые можно минимизировать максимальное напряжение, т.е. определить оптимальные значения c и α для заданной спектральной плотности кинематического возбуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант 97-1140).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Писаренко Г.С., Бочинич О.Е. Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергий. Киев: Наук. думка, 1981. 218 с.
2. Светлицкий В.А. Механика стержней. Т. 2. М.: Высш. шк. 1987. 304 с.
3. Светлицкий В.А. Стационарные колебания стержней, вызванные случайным кинематическим возбуждением // Изв. РАН. МТТ. 1994. С. 169–176.

Москва

Поступила в редакцию
21.03.2000