МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2001

УДК 539.3 : 534.1

© 2001 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, С.В. НЕСТЕРОВ, А.Л. ПОПОВ

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО КРАЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Получены высокоточные аналитические оценки частот и форм низших мод колебаний для эллиптической пластины, защемленной по краю, на основе модифицированного метода Релея – Ритца. Установлена связь спектров эллиптической и круговой пластин. Проведено сравнение полученных оценок с численными результатами других авторов и экспериментальными данными.

Исследование собственных колебаний двумерных распределенных систем с эллиптической границей имеет несомненное теоретическое и прикладное значение (см. [1–3] и др.). Для практики существенный интерес представляет определение частот и форм колебаний (в первую очередь – низших мод) натянутых мембран и упругих пластин, тяжелой жидкости в бассейне, электромагнитных и акустических волн в волноводах и резонаторах и многих других объектов. В теоретическом аспекте интерес обусловлен тем, что соответствующие краевые задачи для эллиптической области представляют естественное обобщение соответствующих задач для круга, которые хорошо изучены. Привлекательной особенностью является также возможность разделения переменных путем введения эллиптических координат и применения аналитических и численно-аналитических методов к связанным одномерным краевым задачам типа задачи Штурма – Лиувилля.

Традиционно, для расчетов собственных частот и форм колебаний применяются вариационные методы, методы Релея – Ритца и Бубнова – Галеркина, МКЭ, вычислительные сеточные методы и др. [1–5]. Ниже, для высокоточного вычисления частот и форм низших мод колебаний эллиптической пластины предлагается модифицированный метод типа метода Релея – Ритца. Он основан на введении обобщенных полярных координат и задании осциллирующей зависимости функции поперечного перемещения (прогиба) пластины от полярного угла с фиксированным числом радиальных узловых линий (как для круговой пластины). Зависимость от радиальной координаты не задается, а определяется из решения соответствующего уравнения Эйлера – Лагранжа, подобно тому, как это было сделано в [3] для эллиптической мембраны.

1. Постановка задачи. Нахождение собственных частот и форм колебаний защемленной по краю эллиптической пластины сводится к решению следующей краевой задачи [5]:

$$\Delta\Delta w - \lambda w = 0, \quad (x, y) \in D \tag{1.1}$$

$$w|_\Gamma = \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \quad \Gamma = \left\{x, y : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\} \tag{1.2}$$

Здесь $w = w(x, y)$ – функция прогиба пластины, n – нормаль к эллиптическому контуру в срединной плоскости пластины, a – большая, b – меньшая полуоси эллипса, Δ – оператор Лапласа. Искомыми в задаче (1.1), (1.2) являются собственные числа λ_n и соответствующие собственные функции $w_n(x, y)$ ($n = 1, 2, \ldots$) для произвольных

значений $a > b > 0$. Связь между собственными числами λ_n и собственными частотами ω_n в (1.1) дается формулой

$$\omega_n = h\sqrt{\frac{E\lambda_n}{3\rho(1-\nu^2)}} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.3}$$

в которой через h обозначена полутолщина пластины, а через ρ, E, ν – соответственно плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона ее материала.

Краевая задача (1.1), (1.2) эквивалентна вариационной задаче о минимуме функционала

$$J[w] = \iint\limits_D (\Delta w)^2 dxdy \tag{1.4}$$

при изопериметрическом условии

$$\Phi[w] = \iint\limits_D w^2 dxdy = 1 \tag{1.5}$$

на классе дважды дифференцируемых функций $w(x, y)$, удовлетворяющих краевым условиям (1.2), см. [5].

2. Оценка частоты низшей моды колебаний с помощью эллиптико-симметричной координатной функции. Подобно тому, как предложено в [3], введем новые переменные – обобщенные полярные координаты r, φ:

$$x = ar\cos\varphi, \qquad y = br\sin\varphi, \qquad r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \tag{2.1}$$

(на границе эллипса $r = 1$).

Будем считать сначала, что искомая функция, обеспечивающая абсолютный минимум функционала (1.4), зависит только от r: $w = w(r)$. Переходя с учетом этого в подинтегральных функциях (1.4), (1.5) к новым переменным и выполняя интегрирование по φ, получим

$$J[w] = \frac{\pi ab}{4}\int\limits_0^1 \left\{A\left[\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right] + \frac{2}{r}B\frac{dw}{dr}\frac{d^2w}{dr^2}\right\} rdr \tag{2.2}$$

$$\Phi[w] = 2\pi ab\int\limits_0^1 w^2 rdr = 1 \tag{2.3}$$

$$A = \frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2b^2}, \qquad B = \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{6}{a^2b^2}$$

Используя для решения вариационной задачи (2.2), (2.3) метод Лагранжа и составляя уравнение Эйлера – Лагранжа [5], получим линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\} - \mu^4 w = 0, \qquad \mu^4 = \frac{8\lambda}{A} \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) должно быть проинтегрировано при краевых условиях, вытекающих из (1.2), с учетом ограниченности функции $w(r)$ и ее производной при $r = 0$:

$$w(1) = \frac{dw(1)}{dr} = 0, \qquad |w(0)| \leqslant M, \qquad \left|\frac{dw(0)}{dr}\right| \leqslant M \tag{2.5}$$

Решение, удовлетворяющее перечисленным условиям, может быть записано в виде

$$w(r) = c_1 J_0(\mu r) + c_2 I_0(\mu r) \tag{2.6}$$

Здесь $J_0(\mu r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $I_0(\mu r)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Из краевых условий (2.5) получаем систему алгебраических уравнений относительно постоянных c_1, c_2:

$$c_1 J_0(\mu) + c_2 J_0(\mu) = 0, \quad c_1 J_1(\mu) - c_2 I_1(\mu) = 0 \tag{2.7}$$

равенство нулю определителя которой приводит к известному частотному уравнению для круговой пластины [6],

$$J_0(\mu) I_1(\mu) + I_0(\mu) J_1(\mu) = 0 \tag{2.8}$$

В данном случае это уравнение определяет приближенные значения (оценки сверху) собственных частот эллиптической пластины.

Наименьший корень уравнения (2.8) равен [6]:

$$\mu_{10} = 3.1961 \tag{2.9}$$

Тогда выражение

$$\lambda_{10} = \frac{\mu_{10}^4}{8}\left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2}\right) \tag{2.10}$$

даст оценку сверху для наименьшего собственного числа, а

$$f_{10} = \frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}}\sqrt{\lambda_{10}} \tag{2.11}$$

оценку сверху для наименьшей собственной частоты. Ниже величина (2.11) используется для сравнения с результатами эксперимента.

Если рассмотреть семейство равновеликих эллипсов $\pi ab = \pi R^2$, где R – радиус равновеликой круговой пластины, то с помощью (2.10) доказывается малая изопериметрическая теорема, аналогичная случаю эллиптической мембраны [3, 7, 8]. А именно, из всех равновеликих эллиптических пластин наименьшую первую собственную частоту имеет круговая пластина. Действительно, положив $b = R^2/a$, получим

$$\lambda_{10} = \frac{\mu_{10}^4}{8}\left(\frac{3}{a^4} + \frac{3a^4}{R^8} + \frac{2}{R^4}\right)$$

а из равенства

$$\frac{d\lambda_{10}}{da} = \frac{\mu_{10}^4}{8}\left(\frac{12a^3}{R^8} - \frac{12}{a^5}\right) = 0$$

$a = R$, что и доказывает утверждение. Весьма правдоподобно такое утверждение и по отношению к произвольным равновеликим пластинам.

Расчеты по формуле (2.10) проводились для обезразмеренного значения частотного параметра $\omega_{10}^* = \sqrt{\lambda_{10}}a^2$; при этом длина b меньшей полуоси эллиптической пластины выражалась через большую полуось a и эксцентриситет e: $b = a\sqrt{1-e^2}$, $0 \leqslant e < 1$. В табл. 1 представлены значения ω_{10}^*, соответствующие первым собственным частотам колебаний рассматриваемого типа (их можно назвать эллиптико-симметричными по аналогии с осесимметричными колебаниями круговой пластины) при разных значениях эксцентриситета. Для сравнения даны также значения ω_{10}^T, полученные в [9] из точного решения задачи (1.1), (1.2) в функциях Матье (пустые ячейки означают, что по этим позициям нет точных данных). Для эксцентриситета $e = 0.866$ (отношение

Таблица 1

e	ω_{10}^{*}	ω_{10}^{T}
0	10,212	10,212
0,1	10,267	
0,2	10,429	
0,3	10,726	
0,4	11,209	11,183
0,5	11,978	
0,6	13,245	13,167
0,7	15,515	
0,8	20,335	
0,866	27,737	27,468
0,9	35,502	
0,943	58,502	56,820
0,95	66,505	

полуосей эллипса $a/b = 2$, толщина пластины $2h = 1$ мм, большая полуось $a = 100$ мм, материал – алюминий) первая собственная частота была измерена экспериментально. Ее значение $f_{10} = 610$ Гц ($\omega_{10} = 27.281$) весьма близко к тому, что дает точное решение ($\omega_{10}^{T} = 27.468$). Расчет по формулам (2.10), (2.11) приводит к значению $f_{10}^{*} = 618$ Гц, отличие которого от значения, найденного экспериментально, составляет менее 1,5%.

Как видно из табл. 1, относительная погрешность вычисления первой собственной частоты по оценкам (2.10), (2.11) не превосходит 0,6% при $e \leqslant 0.6$, 1% при $e \leqslant 0.866$ и 3,6% при $e \leqslant 0.943$. Таким образом, формулы (2.10), (2.11) действительно являются высокоточными, так как аналогичные оценки, полученные традиционными способами по методу Релея – Ритца с использованием координатной функции $w = c(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^2$, дают, в перечисленных интервалах изменения эксцентриситета, погрешность от двух до пяти процентов.

3. Оценки для следующих мод колебаний. Следующим собственным числам (частотам) соответствуют формы колебаний с узловыми линиями, совпадающими с малой (вторая форма) и большой (третья форма) полуосями эллипса. Для получения оценки колебаний по второй форме примем, что допустимая координатная функция $w(r, \varphi)$ имеет вид

$$w(r, \varphi) = V(r)\cos\varphi \tag{3.1}$$

Подстановка этой функции в интегралы (1.4), (1.5) приводит к следующему уравнению Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d^4V}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3V}{dr^3} - \frac{3}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{3}{r^3}\frac{dV}{dr} - \left(\gamma^4 + \frac{3}{r^4}\right)V = 0$$

$$\gamma^4 = \frac{8\lambda a^4 b^4}{a^4 + 2a^2b^2 + 5b^4} \tag{3.2}$$

На первый взгляд уравнение (3.2) не имеет явного аналитического решения, так как оно не включено в наиболее полные на сегодняшний день справочники по обык-

Таблица 2

e	ω_{10}^{c}	ω_{10}^{s}
0	21,261	21,261
0,1	21,315	21,423
0,2	21,484	21,927
0,3	21,793	22,844
0,4	22,297	24,320
0,5	23,101	26,636
0,6	24,435	30,378
0,7	26,858	36,937
0,8	32,136	50,502
0,866	40,477 (38,86)	70,904 (62,40)
0,9	49,422	92,074
0,95	85,940	175,886

новенным дифференциальным уравнениям [10, 11]. Однако результат, полученный выше, косвенно свидетельствует о возможности найти решение уравнения (3.2) с помощью функций Бесселя первого порядка. Действительно, путем подстановки было показано, что решениями этого уравнения являются функции $J_1(\gamma r)$, $Y_1(\gamma r)$, $I_1(\gamma r)$ и $K_1(\gamma r)$. Следовательно, с учетом ограниченности в нуле, общее решение уравнения (3.2) может быть записано в виде

$$V(r) = c_1 J_1(\gamma r) + c_2 I_1(\gamma r) \tag{3.3}$$

Подстановка решения (3.3) в краевые условия, аналогичные (2.5), приводит к частотному уравнению

$$J_1(\gamma) I_1'(\gamma) - J_1'(\gamma) I_1(\gamma) = 0 \tag{3.4}$$

наименьший корень которого $\gamma_{11}^{c} = 4.611$ [6]. Отметим, что собственное число γ_{11} при $e = 0$ становится двукратно вырожденным [3, 6]. Таким образом, получаем оценку сверху для второго собственного числа (частоты) колебаний эллиптической пластины с узловой линией, совпадающей с малой осью эллипса

$$\lambda_{11}^{c} = \frac{\gamma_{11}^{c4}}{8}\left(\frac{5}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2}\right) \tag{3.5}$$

Если положить $w(r, \varphi) = V(r)\sin\varphi$, то можно получить приближенное выражение для следующей (третьей) моды колебаний. Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, находим

$$\lambda_{11}^{s} = \frac{\gamma_{11}^{s4}}{8}\left(\frac{1}{a^4} + \frac{5}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2}\right), \qquad \gamma_{11}^{s} = \gamma_{11}^{c} = 4.611 \tag{3.6}$$

Следует отметить, что λ_{11}^{c} и λ_{11}^{s} для эллиптической пластины являются невырожденными, в то время как для круглой пластины, где $a = b$, $\lambda_{11}^{c} = \lambda_{11}^{s}$.

В табл. 2 приведены оценки сверху первых собственных частот колебаний эллип-

тической пластины с одной узловой линией, выраженных параметрами $\omega_{10}^c = \sqrt{\lambda_{11}^c}a^2$ и $\omega_{10}^s = \sqrt{\lambda_{11}^s}a^2$ в зависимости от эксцентриситета e.

При эксцентриситетах $e \leqslant 0.6$ полученные по формулам (3.5), (3.6) оценки собственных частот отличаются от точных значений менее, чем на 1%. Для эксцентриситета $e = 0.866$ были также получены экспериментальные значения собственных частот $f_{11}^c = 902$ Гц, $f_{11}^s = 1390$ Гц, что соответствует $\omega_{10}^c = 38.86$, $\omega_{10}^s = 62.40$; расхождение с теоретическими оценками составило для первой из них 4.2%, для второй – 14%.

Здесь следует отметить, что полученные экспериментальные значения несколько ниже точных теоретических значений собственных частот. Естественно, они будут меньшими, чем построенные высокоточные оценки сверху. Это свойство хорошо известно и связано с тем обстоятельством, что в лабораторном эксперименте весьма затруднительно реализовать граничные условия жесткого защемления, особенно для высших частот. С ростом частоты условия закрепления края пластины становятся все более "мягкими", а измеряемые собственные частоты оказываются существенно меньшими теоретически ожидаемых значений. На резонансные частоты могут оказывать влияние другие возмущающие факторы [12].

4. Оценки собственных частот при $n \geqslant 2$. Кратко опишем алгоритм вычисления оценок частот более высоких мод собственных колебаний ($n \geqslant 2$). Координатные функции представляются в виде

$$w(r, \varphi) = V(r)\begin{cases}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{cases} \quad (n = 2, 3, \ldots) \tag{4.1}$$

Повторяя все выше изложенное для значения индекса $n = 2$, получаем уравнение Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d^4V}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3V}{dr^3} - \frac{9}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{9}{r^3}\frac{dV}{dr} - \gamma^4 V = 0 \tag{4.2}$$

$$\gamma^4 = \frac{16\lambda a^4 b^4}{7a^4 + 2a^2b^2 + 7b^4}$$

Уравнение (4.2) интегрируется с помощью функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя второго порядка. Ограниченное в нуле решение записывается в виде

$$V(r) = c_1 J_2(\gamma r) + c_2 I_2(\gamma r) \tag{4.3}$$

а затем стандартным образом строится частотное уравнение. Аналогично могут быть получены и проинтегрированы уравнения Эйлера – Лагранжа для $n > 2$. Следует отметить, что абсолютная погрешность при замене точных собственных значений (частот) оценками сверху, полученными при $n \geqslant 2$, возрастает с ростом номера n. Однако для прикладных задач эти оценки дают вполне удовлетворительные результаты для не очень больших значений эксцентриситета e.

5. Выводы. *1.* Разработан модифицированный метод типа метода Релея – Ритца для получения оценок сверху собственных чисел (частот) эллиптической, защемленной по контуру, пластины.

2. Установлена аналитическая связь оценок собственных частот и форм колебаний эллиптической пластины с точными значениями собственных частот и форм колебаний круговой пластины при аналогичных краевых условиях.

3. Полученные оценки собственных частот представлены простыми аналитическими формулами, позволяющими с достаточной для практики точностью рассчитывать собственные частоты в широком диапазоне изменения эксцентриситета эллипса, ограничивающего пластину.

4. Анализ научной литературы свидетельствует, что до настоящего времени были получены формулы, связывающие спектры собственных чисел (частот) эллиптической и круговой пластин только при малых $e \ll 1$, когда можно пользоваться теорией возмущений. Использование замены (2.1) с целью более эффективного построения пробных функций и выражений (2.10), (3.5) и (3.6) и т.п. в литературе не обнаружено.

Авторы благодарны Ф.Л. Черноусько и И.А. Шишмареву за конструктивное обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00222, 99-01-00276).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит. Т. 1. 1958. 930 с.; Т. 2. 1960. 896 с.
2. *Стретт М.Д.О.* Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков; Киев: Гостехиздат Украины. 1935. 238 с.
3. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Собственные колебания однородной эллиптической мембраны // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 191–202.
4. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
5. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
6. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с.
7. *Полиа Г., Сеге П.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматлит, 1962. 336 с.
8. *Стрэтт Дж.В.* Теория звука. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1940. 500 с.
9. *Shibaoka Y.* On the transverse vibration of an elliptic plate with clamped edge // J. of the Phys. Soc. of Japan. 1956. V. 11. No. 7. P. 797–803.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
11. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1995. 560 с.
12. *Ильюшин А.А., Ленский В.С.* Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 371 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.04.2000