МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2001

УДК 539.3:534.1

© 2001 г. В.П. ГЕОРГИЕВСКИЙ, А.Г. ТАРАСОВА

УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

В [1] исследовалась устойчивость цилиндрических оболочек с заполнителем при нагружении осевыми сжимающими усилиями, исходя из уравнений тонких оболочек и трехмерной теории упругой устойчивости для заполнителя, при условиях шарнирного отпирания торцов. Другие варианты граничных условий задачи рассмотрены в [2], где используются уравнения уточненной линейной теории типа Тимошенко.

В данной работе исследуется устойчивость ортотропной слоистой цилиндрической оболочки, связанной с внутренней стороны с изотропным заполнителем, при действии равномерного внешнего давления. Заполнитель, имеющий внутренний канал радиуса **a**, считается трехмерным телом и может описываться или уравнениями теории упругости, или линеаризованными уравнениями теории малых упругопластических деформаций. Деформация поперечного сдвига оболочки учитывается согласно гипотезе о прямолинейном элементе.

Учитывая радиальное и тангенциальное взаимодействие оболочки с заполнителем, будем иметь следующие уравнения равновесия оболочки:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial S}{\partial \theta}+q_x=0,\qquad \frac{1}{R}\frac{\partial T_2}{\partial \theta}+\frac{\partial S}{\partial x}+q_\theta=0$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial Q_2}{\partial \theta}+\frac{T_2}{R}-\left[q_r-\frac{N_2}{R^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right]=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial \theta}-Q_1=0,\qquad \frac{1}{R}\frac{\partial M_2}{\partial \theta}+\frac{\partial H}{\partial x}-Q_2=0$$

Здесь T_1, T_2, S – тангенциальные усилия; M_1, M_2, H – изгибающие и крутящий моменты; Q_1, Q_2 – перерезывающие усилия; N_2 – кольцевое усилие в безмоментном напряженном состоянии (считается положительным, если оно сжимающее); R – радиус срединной поверхности оболочки; x, θ – координаты точек срединной поверхности оболочки в цилиндрической системе координат; q_x, q_θ, q_r – контактные касательные и нормальное напряжения между оболочкой и заполнителем (распределенными моментами, возникающими относительно срединной поверхности, пренебрегаем).

Внутренние усилия и моменты связаны с осевым перемещением U, тангенциальным перемещением V, прогибом W срединной поверхности и функциями сдвигов φ, ψ соотношениями упругости

$$T_1=B_1\left[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\nu_2}{R}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}+W\right)\right],\qquad T_1=\frac{B_2}{R}\left[\frac{\partial V}{\partial \theta}+W+R\nu_1\frac{\partial U}{\partial x}\right]$$

$$S=\frac{B_3}{R}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}+R\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

$$M_1=-\frac{D_1}{R}\left(R\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right),\qquad M_2=-\frac{D_2}{R}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\nu_1 R\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \tag{2}$$

$$H=-\frac{D_3}{R}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+R\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

$$Q_1=-K_1\left(\varphi+\frac{\partial W}{\partial x}\right),\qquad Q_2=-K_2\left(\psi+\frac{1}{R}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)$$

$$B_1=\frac{E_1\delta}{1-\nu_1\nu_2},\quad B_2=\frac{E_2\delta}{1-\nu_1\nu_2},\quad B_3=G\delta,\quad D_1=\frac{E_1\delta^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}$$

$$D_2=\frac{E_2\delta^3}{12(1-\nu_1\nu_2)},\quad D_3=\frac{G\delta^3}{12},\quad K_1=\frac{5}{6}G_{13}\delta,\quad K_2=\frac{5}{6}G_{23}\delta$$

Здесь E_1, E_2, ν_1, ν_2 – модули Юнга и коэффициенты Пуассона в осевом и окружном направлениях ($E_1\nu_2=E_2\nu_1$); G – модуль сдвига в срединной поверхности; G_{13}, G_{23} – модули упругости при межслоевых сдвигах; δ – толщина оболочки.

Подставляя в (1) соотношения упругости (2) и исключая в полученных уравнениях функции φ и ψ, получаем однородную систему трех уравнений относительно перемещений

$$L_{ij}\xi_j+(1-\delta_{i3}L_{34})q_i=0\qquad (i,j=1,2,3) \tag{3}$$

$$\xi_{j=1,2,3}\equiv U,V,W,\qquad q_{i=1,2,3}\equiv q_x,q_\theta,q_r$$

$$L_{11}=B_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{B_3}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\qquad L_{12}=\frac{1}{R}(B_1\nu_2+B_3)\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x}$$

$$L_{13}=\frac{B_1}{R}\nu_2\frac{\partial}{\partial x},\quad L_{21}=\frac{1}{R}(B_2\nu_1+B_3)\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x},\quad L_{22}=\frac{B_2}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+B_3\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$L_{23}=\frac{B_2}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta},\qquad L_{31}=L\frac{B_2\nu_1}{R}\frac{\partial}{\partial x},\qquad L_{32}=L\frac{B_2}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{33}=-K_1(L_{12}^*L_{23}^*-L_{13}^*L_{22}^*)\frac{\partial}{\partial x}-\frac{K_2}{R}(L_{13}^*L_{21}^*-L_{11}^*L_{23}^*)\frac{\partial}{\partial\theta}-$$

$$-L\left[-K_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{R^2}(K_2+N_2)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{B_2}{R^2}\right],\qquad L_{34}=L+1$$

$$L=L_{11}^*L_{22}^*-L_{21}^*L_{12}^*$$

$$L_{11}^*=-D_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{D_3}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+K_1,\qquad L_{12}^*=-\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}(\nu_2D_1+D_3)\frac{1}{R}$$

$$L_{13}^*=K_1\frac{\partial}{\partial x},\qquad L_{21}^*=-\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}(\nu_1D_2+D_3)\frac{1}{R}$$

$$L_{22}^*=-\frac{D_2}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-D_3\frac{\partial^2}{\partial x^2}+K_2,\qquad L_{23}^*=\frac{K_2}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

где δ_{i3} – символ Кронекера.

Уравнения равновесия для заполнителя имеют вид:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{rx}}{\partial x}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta x}}{\partial x}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\tau_{rx}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta x}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\tau_{rx}}{r}=0$$

Запишем определяющие соотношения для материала заполнителя [1]:

$$\sigma_{ij}=\delta_{ij}a_{ik}\varepsilon_{kk}+2(1-\delta_{ij})G_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (i,j,k=1,2,3;\ i,j\not\Sigma) \qquad (5)$$

или в другой форме

$$\sigma_{ij}=\delta_{ij}a_{ik}u_{k,k}+(1-\delta_{ij})G_{ij}(u_{ij}+u_{ji})$$

где σ_{ij}, ε_{ij} – компоненты тензора напряжений и деформаций; $a_{ik}=a_{ki}$, G_{ij} – упругие постоянные; u_i $(i\to k,\ j)$ – компоненты вектора перемещений $(u_{i=1,2,3}\equiv u_r,\ u_\theta,\ u_x)$; u_r, u_θ, u_x – соответственно радиальная, тангенциальная и осевая составляющие перемещения, отсчитываемые от невозмущенного состояния.

Для линейно-упругого тела будем иметь

$$\sigma_r=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \sigma_\theta=\lambda\Delta+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)$$

$$\sigma_x=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad \tau_{r\theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right)$$

$$\tau_{\theta x}=\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial\theta}\right), \qquad \tau_{rx}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial x}\right)$$

$$\Delta=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad \lambda=\frac{E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}, \qquad \mu=\frac{E_3}{2(1+\nu_3)}$$

где λ, μ – постоянные Ляме заполнителя; E_3, ν_3 – модуль упругости и коэффициент Пуассона заполнителя. Для материала, проявляющего неупругие свойства, запишем линеаризованные соотношения теории малых упругопластических деформаций [3]:

$$\sigma_{ij}=2E_c\varepsilon_{ij}/3+\delta_{ij}[\varepsilon_{kk}(K-2E_c/3)-(E_k-E_c)(\varepsilon_{kk}-3\varepsilon_{33})(1/3-\delta_{i3})]/3 \qquad (6)$$

$$K=E/(1-2\nu)$$

где E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона линейного участка деформирования; E_c и E_k – секущий и касательный модули нелинейного участка. Заметим, что соотношения (6) являются приемлемыми также для нелинейно-упругого тела, поскольку в задаче об устойчивости процесс разгрузки не рассматриваем.

Из формул (5) и (6) для коэффициента a_{ik} получим

$$a_{11}=a_{22}=(5E_c/3-E_k/3+K)/3, \qquad a_{12}=a_{21}=-(E_c+E_k)/9+K/3$$

$$a_{13}=a_{31}=a_{23}=-4E_c/9+2E_k/9+K/3, \qquad a_{33}=8E_c/9-4E_k/9+K/3$$

$$G_{ij}=E_c/3 \qquad (7)$$

Не отличая радиус срединной поверхности оболочки от радиуса наружной поверхности заполнителя, запишем граничные условия, выражающие сопряжение оболочки и заполнителя (при $r=R$):

$$\tau_{r\theta}=-q_\theta, \quad \tau_{rx}=-q_x, \quad \sigma_r=-q_r. \qquad (8)$$

Граничные условия на внутренней поверхности заполнителя (при $r=a$) имеют вид

$$\tau_{rx}=0, \quad \tau_{r\theta}=0, \quad \sigma_r=0 \qquad (9)$$

Решение ищем в форме

$$u_r = w(r)\cos\beta\theta\sin\alpha x, \quad u_\theta = v(r)\sin\beta\theta\sin\alpha x, \quad u_x = u(r)\cos\beta\theta\cos\alpha x \tag{10}$$

$$U = u_R\cos\beta\theta\cos\alpha x, \quad V = v_R\sin\beta\theta\sin\alpha x, \quad W = w_R\cos\beta\theta\sin\alpha x \tag{11}$$

$$q_r = q_r^*\cos\beta\theta\sin\alpha x, \quad q_\theta = q_\theta^*\sin\beta\theta\sin\alpha x, \quad q_x = q_x^*\cos\beta\theta\cos\alpha x \tag{12}$$

$$u_R = u(R), \quad v_R = v(R), \quad w_R = w(R)$$

где α, β – параметры волнообразования в осевом и тангенциальном направлениях; q_r^*, q_θ^*, q_x^* – постоянные величины.

Подставляя соотношения упругости для заполнителя в (4) и разыскивая решение получающихся уравнений в виде (10), находим выражения для функций u, v; w:

$$u = \frac{C_3-\alpha C_5}{\beta}J_\beta(i\alpha r)+\frac{C_4-\alpha C_6}{\beta}N_\beta(i\alpha r)+$$

$$+\frac{ir}{2\beta}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\{[C_1(\beta-1)+\alpha C_3]J_{\beta-1}(i\alpha r)+[C_2(\beta-1)+\alpha C_4]N_{\beta-1}(i\alpha r)\} \tag{13}$$

$$v = \frac{1}{r}[C_5J_\beta(i\alpha r)+C_6N_\beta(i\alpha r)]+\frac{i}{2\alpha}\left\{\left[\frac{3\lambda+5\mu-\beta(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}C_1-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\alpha C_3\right]\times\right.$$

$$\left.\times J_{\beta-1}(i\alpha r)+\left[\frac{3\lambda+5\mu-\beta(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}C_2-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\alpha C_4\right]N_{\beta-1}(i\alpha r)\right\}$$

$$w = r\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\{[(\beta-1)C_1+\alpha C_3]J_\beta(i\alpha r)+[(\beta-1)C_2+\alpha C_4]N_\beta(i\alpha r)\}+\frac{\beta}{r}\times$$

$$\times[C_5J_\beta(i\alpha r)+C_6N_\beta(i\alpha r)]-i\left\{\frac{\beta}{2\alpha}\left[\frac{3\lambda+5\mu-\beta(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}C_1-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\alpha C_3\right]+\alpha C_5\right\}\times$$

$$\times J_{\beta-1}(i\alpha r)-i\left\{\frac{\beta}{2\alpha}\left[\frac{3\lambda+5\mu-\beta(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}C_2-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\alpha C_4\right]+\alpha C_6\right\}N_{\beta-1}(i\alpha r)$$

где C_1, C_2,..., C_6 – произвольные постоянные, $J_\beta(i\alpha r)$, $N_\beta(i\alpha r)$ – функции Бесселя мнимого аргумента первого и второго рода порядка β.

Выражения для напряжений, входящих в граничные условия, имеют вид:

$$\sigma_r = \sigma_r^*\cos\beta\theta\sin\alpha x, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^*\sin\beta\theta\sin\alpha x, \quad \tau_{rx} = \tau_{rx}^*\cos\beta\theta\cos\alpha x$$

$$\sigma_r^* = (\lambda+2\mu)\frac{dw}{dr}+\lambda\left(\frac{w}{r}+\frac{\beta v}{r}-\alpha u\right)$$

$$\tau_{r\theta}^* = \mu\left(-\frac{\beta}{r}w+\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r}\right), \quad \tau_{rx}^* = \mu\left(\alpha w+\frac{du}{dr}\right) \tag{14}$$

причем при $r = R$:

$$q_x^* = -\tau_{rx}^*, \quad q_\theta^* = -\tau_{r\theta}^*, \quad q_r^* = -\sigma_r^* \tag{15}$$

Из граничных условий при $r = a$ ($\sigma_r^* = \tau_{r\theta}^* = \tau_{rx}^* = 0$) и из выражений для u, v, w (13), записанных при $r = R$, можно выразить постоянные C_1, C_2,..., C_6 через u_R, v_R, w_R, а затем через последние величины q_x^*, q_θ^*, q_r^* согласно (14) и (15):

$$q_x^* = b_{11}u_R + b_{12}v_R + b_{13}w_R \tag{16}$$

$$q_\theta^* = b_{21}u_R + b_{22}v_R + b_{23}w_R, \quad q_r^* = b_{31}u_R + b_{32}v_R + b_{33}w_R$$

Предварительно подставив в уравнения (3) выражения (11) и (12) и затем выражения для q_x^*, q_θ^*, q_r^* из (16), получаем однородную систему уравнений относительно u_R, v_R, w_R:

$$\begin{aligned} &A_{11}u_R + A_{12}v_R + A_{13}w_R = 0 \\ &A_{21}u_R + A_{22}v_R + A_{23}w_R = 0 \\ &A_{31}u_R + A_{32}v_R + A_{33}w_R = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Коэффициенты b_{ik}, A_{ik} не приводятся в силу своего громоздкого выражения. Приравнивая определитель системы (17) нулю, получаем характеристическое уравнение для определения критического усилия N_2.

Более подробно рассмотрим решение для длинной оболочки. Граничные условия, выражающие сопряжение оболочки и заполнителя, будут: $\tau_{r\theta} = -q_\theta$, $\sigma_r = -q_r$ при $r = R$, $\tau_{r\theta} = 0$, $\sigma_r = 0$ при $r = a$.

Решение ищем в виде

$$u_r = w(r)\cos\beta\theta, \quad u_\theta = v(r)\sin\beta\theta, \quad W = w_R\cos\beta\theta, \quad V = v_R\sin\beta\theta,$$

$$q_r = q_r^*\cos\beta\theta, \quad q_\theta = q_\theta^*\sin\beta\theta \tag{18}$$

Из уравнений равновесия в перемещениях находим выражения для функций w и v:

$$w = \frac{C_1 r^{1+\beta}}{2(1+\beta)}\left(1 - \frac{2+\beta}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right) - \frac{C_2 r^{1-\beta}}{2(1-\beta)}\left(1 - \frac{2-\beta}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right) - C_3 r^{\beta-1} + C_4 r^{-\beta-1}$$

$$v = C_3 r^{\beta-1} + C_4 r^{-\beta-1} + \frac{C_1 r^{\beta+1}}{4(1+\beta)}\left(2 + \beta\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right) + \frac{C_2 r^{1-\beta}}{4(1-\beta)}\left(2 - \beta\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right) \tag{19}$$

Для q_r^* и q_θ^* согласно граничным условиям получаем следующие выражения:

$$q_r^* = \mu\left[-\frac{2-\beta}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}C_1R^\beta + \frac{2+\beta}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}C_2R^{-\beta} + 2(\beta-1)C_3R^{\beta-2} + 2(\beta+1)C_4R^{-\beta-2}\right]$$

$$q_\theta^* = \mu\left[-\frac{\beta}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}C_1R^\beta + \frac{\beta}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}C_2R^{-\beta} - 2(\beta-1)C_3R^{\beta-2} + 2(\beta+1)C_4R^{-\beta-2}\right] \tag{20}$$

Полагая в выражениях (19) $r = R$ (при этом $w(R) = w_R$, $v(R) = v_R$) и присоединяя к ним уравнения, выражающие граничные условия на внутренней поверхности, получим уравнения, связывающие постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 и величины w_R, v_R:

$$\begin{aligned} &\frac{C_1R^{1+\beta}}{2(1+\beta)}\left(1 - \frac{2+\beta}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right) - \frac{C_2R^{1-\beta}}{2(1-\beta)}\left(1 - \frac{2-\beta}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right) - C_3R^{\beta-1} + C_4R^{-\beta-1} = w_R \\ &\frac{C_1R^{1+\beta}}{4(1+\beta)}\left(2 + \beta\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right) + \frac{C_2R^{1-\beta}}{4(1-\beta)}\left(2 - \beta\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right) + C_3R^{\beta-1} + C_4R^{-\beta-1} = v_R \\ &\frac{2-\beta}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}C_1a^\beta - \frac{2+\beta}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}C_2a^{-\beta} - 2(\beta-1)C_3a^{\beta-2} - 2(\beta+1)C_4a^{-\beta-2} = 0 \\ &\frac{\beta}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}C_1a^\beta - \frac{\beta}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}C_2a^{-\beta} + 2(\beta-1)C_3a^{\beta-2} - 2(\beta+1)C_4a^{-\beta-2} = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Используя соотношения упругости и уравнения равновесия оболочки, а также учитывая формулы (20), в которых постоянные $C_1,\ldots, C_4$ предполагаются выраженными через w_R и v_R согласно (21), получаем систему двух однородных уравнений относительно w_R и v_R. Приравнивая определитель системы нулю, получаем характеристическое уравнение для определения критического усилия N_2.

Как показывает анализ, при выполнении условия $(R/a)^\beta \gg 1$, которое соблюдается во многих случаях, заполнитель можно рассматривать как сплошной цилиндр. Тогда следует положить $C_2 = C_4 = 0$, а для C_1 и C_3 получаем выражения

$$C_1 R^{\beta+1} = 2\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+3\mu}(1+\beta)(w_R + v_R)$$

$$C_3 R^{\beta-1} = w_R \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+3\mu}\left(1+\frac{\beta}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right) + \frac{v_R}{\lambda+3\mu}\left[\mu - \frac{\beta}{2}(\lambda+\mu)\right]$$

с учетом которых для q_r^* и q_θ^* будем иметь

$$q_r^* = \frac{2\mu}{R(\lambda+3\mu)}\{-w_R[\mu(2\beta-1)+\beta\lambda] + v_R[\mu(\beta-2)-\lambda]\}$$

$$q_\theta^* = \frac{2\mu}{R(\lambda+3\mu)}\{w_R[\mu(\beta-2)-\lambda] - v_R[\mu(2\beta-1)+\beta\lambda]\} \qquad (22)$$

С учетом формул (22) указанная выше система двух однородных уравнений относительно w_R и v_R будет иметь вид

$$v_R\{\beta^2 + c^2K[\eta(2\beta-1)+\beta]\} + w_R\{\beta + c^2K[\eta(2-\beta)+1]\} = 0$$

$$v_R(\{\beta - c^2K[\eta(\beta-2)-1]\}\left(1+\beta^2\frac{D_2}{c^2K_2R^2}\right) +$$

$$+w_R\left(\{1 + c^2K[\eta(2\beta-1)+\beta] - c^2t_2\beta^2\}\left(1+\beta^2\frac{D_2}{c^2K_2R^2}\right) + c^2\beta^4\right) = 0$$

$$K = \frac{R}{c^2B_2}\frac{2\mu\lambda}{\lambda+3\mu}, \qquad \eta = \frac{\mu}{\lambda}, \qquad t_2 = \frac{N_2}{c^2B_2}, \qquad c^2 = \frac{\delta^2}{12R^2}$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, находим

$$t_2 = \frac{\beta^2}{(1+\beta^2G^*)} + K\frac{(\beta^2-1)[\eta(2\beta+1)+\beta+K(1+\eta)(1+3\eta)]}{\beta^2\{\beta^2+K[\eta(2\beta-1)+\beta]\}}$$

$$G^* = \frac{6}{5}\frac{E_2}{G_{23}}\frac{\delta^2}{12(1-\nu_1\nu_2)R^2}$$

Придавая β различные целочисленные значения, находим наименьшее значение параметра t_2, определяющее критическую силу N_2 или соответствующее ей критическое давление $p = N_2/R$.

В частном случае несжимаемого заполнителя ($\lambda = \infty$) с учетом пренебрежения единицей по сравнению с β^2 имеем

$$t_2 = \frac{\beta^2}{(1+\beta^2G^*)} + \frac{K_0}{\beta}, \qquad K_0 = 2\mu\frac{(1-\nu_1\nu_2)R}{c^2E_2\delta} \qquad (23)$$

Считая параметр β изменяющимся непрерывно (при $\beta > 2$) и минимизируя выражение (23) по этому параметру, получим для безразмерного критического напряжения t_{2^*} зависимость от двух параметров G^* и K_0, связанных с жесткостью заполнителя и податливостью оболочки на сдвиг

$$t_{2^*} = \Phi(G^*, K_0) \tag{24}$$

Соотношение между β и K_0, при котором имеет место минимум функции t_2, будет $K_0 = 2\beta^3/(1 + \beta^2 G^*)^2$.

Как показывают расчеты, для фиксированного значения параметра G^*, начиная с некоторой величины жесткости заполнителя K_0, абсолютным минимумом функции t_2 является ее предел при $\beta \to \infty$, т.е., начиная с этой величины жесткости, дальнейшее ее увеличение не влияет на критические напряжения (они остаются постоянными).

Предельная величина критического давления оказывается равной $p_* = 5G_{23}\delta/6R$ и соответствует величине модуля упругости заполнителя $E_3 = 3,42G_{23}\sqrt{G_{23}/E_2}$.

Для заполнителей с небольшой жесткостью ($K_0 < 0,02$) влияние межслоевых сдвигов на критические напряжения оболочки несущественно для рассмотренного диапазона изменения параметра G^*. Для больших значений параметра K_0 критические усилия для цилиндрических слоистых оболочек с упругим заполнителем, определяемые по теории Кирхгофа – Лява, оказываются завышенными и должны определяться с учетом поперечного сдвига оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гузь А.Н., Бабич И.Ю.* Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1985. 285 с.
2. *Георгиевский В.П.* Устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки, скрепленной с нелинейно-упругим заполнителем // Прикл. механика. 1989. № 1. С. 60–65.
3. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.10.2000