МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2001

УДК 539.3

© 2001 г. А.В. АКСЕНОВ

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ КЛАССА УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА – ПУАССОНА – ДАРБУ

Рассмотрим класс эллиптических уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу. Получены все линейные дифференциальные соотношения первого порядка между решениями этого класса. Представлена редукция трехмерного уравнения Лапласа к уравнению Эйлера – Пуассона – Дарбу. Показано, что полученные соотношения могут быть найдены на основе использования симметрий трехмерного уравнения Лапласа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\alpha}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \qquad \alpha\in R \tag{1.1}$$

Уравнение (1.1) представляет собой эллиптический аналог уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. Оно задает класс уравнений, определяемый параметром α. Уравнение (1.1) возникает во многих задачах механики и физики (см., например, [1–4]).

Дадим полное описание всех линейных дифференциальных соотношений первого порядка вида

$$u^{(\beta)}=A(r,z)\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}+B(r,z)\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}+C(r,z)u^{(\alpha)} \tag{1.2}$$

между решениями $u=u^{(\alpha)}$, $u=u^{(\beta)}$ класса уравнений (1.1).

В работе будут рассмотрены два способа построения таких соотношений. Первый способ основан на решении переопределенной системы уравнений для определения неизвестных функций A, B, C. Второй способ связан с применением групп Ли непрерывных преобразований трехмерного уравнения Лапласа. Отметим, что в широко известном учебнике А.А. Ильюшина [5] была указана важность и общность методов теории групп Ли непрерывных преобразований для исследования задач механики сплошной среды и изложены основные понятия этой теории применительно к моделям механики сплошной среды.

2. Нахождение линейных дифференциальных соотношений первого порядка. Введем в рассмотрение линейные дифференциальные операторы Эйлера – Пуассона – Дарбу

$$L_\alpha\equiv\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial z^2}$$

Из (1.2) следует

$$L_\beta\left(A\frac{\partial u}{\partial r}+B\frac{\partial u}{\partial z}+Cu\right)\bigg|_{L_\alpha u=0}=0 \tag{2.1}$$

Из (1.1) находим

$$\frac{\partial^2 u^{(\alpha)}}{\partial r^2}=-\frac{\alpha}{r}\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}-\frac{\partial^2 u^{(\alpha)}}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^3 u^{(\alpha)}}{\partial r^3}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{r^2}\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}+\frac{\alpha}{r}\frac{\partial^2 u^{(\alpha)}}{\partial z^2}-\frac{\partial^3 u^{(\alpha)}}{\partial r\partial z^2} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^3 u^{(\alpha)}}{\partial r^2\partial z}=-\frac{\alpha}{r}\frac{\partial^2 u^{(\alpha)}}{\partial r\partial z}-\frac{\partial^3 u^{(\alpha)}}{\partial z^3}$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получаем

$$\begin{gathered}\left\{\left[-2\frac{\partial A}{\partial r}+2\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{(\beta-\alpha)}{r}A\right]\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\left[2\frac{\partial A}{\partial z}+2\frac{\partial B}{\partial r}+\frac{(\beta-\alpha)}{r}B\right]\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}+\right.\\ +\left[\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}+\frac{(\beta-2\alpha)}{r}\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{\alpha(\alpha-\beta+1)}{r^2}A+2\frac{\partial C}{\partial r}+\frac{(\beta-\alpha)}{r}C\right]\frac{\partial u}{\partial r}+\\ \left.\left.+\left(\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}+\frac{\beta}{r}\frac{\partial B}{\partial r}+\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}+2\frac{\partial C}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}+\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}+\frac{\beta}{r}\frac{\partial C}{\partial r}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right)u\right\}\right|_{u=u^{(\alpha)}}=0\end{gathered} \tag{2.3}$$

Равенство (2.3) должно выполняться при произвольных значениях $\partial^2 u^{(\alpha)}/\partial z^2$, $\partial^2 u^{(\alpha)}/\partial r\partial z$, $\partial u^{(\alpha)}/\partial r$, $\partial u^{(\alpha)}/\partial z$, $u^{(\alpha)}$. Откуда следует система уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial A}{\partial r}-\frac{\partial B}{\partial z}+\frac{(\beta-\alpha)}{2r}A=0,\qquad \frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\partial B}{\partial r}+\frac{(\beta-\alpha)}{2r}B=0\\ \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}+\frac{(\beta-2\alpha)}{r}\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{\alpha(\alpha-\beta+1)}{r^2}A+2\frac{\partial C}{\partial r}+\frac{(\beta-\alpha)}{r}C=0\\ \frac{\partial^2 B}{\partial r^2}+\frac{\beta}{r}\frac{\partial B}{\partial r}+\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}+2\frac{\partial C}{\partial z}=0\\ \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}+\frac{\beta}{r}\frac{\partial C}{\partial r}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}=0\end{gathered} \tag{2.4}$$

Система уравнений (2.4) является переопределенной. Исследуя ее на совместность, можно доказать справедливость следующего предложения.

Предложение. При $(\beta^2-\alpha^2)(\beta+\alpha-2)(\beta+\alpha-4)[(\beta-\alpha)^2-4]\neq 0$ система уравнений (2.4) имеет единственное решение $A=B=C=0$.

Из предложения следует существование конечного числа значений параметра β (зависящих от α), при которых существуют линейные дифференциальные соотношения первого порядка между решениями $u=u^{(\alpha)}$, $u=u^{(\beta)}$ класса уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Класс уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\alpha}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\qquad \alpha\in R$$

при произвольных значениях параметра α допускает из всех соотношений между решениями $u=u^{(\alpha)}$, $u=u^{(\beta)}$ вида

$$u^{(\beta)}=A(r,z)\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}+B(r,z)\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}+C(r,z)u^{(\alpha)}$$

только следующие независимые базисные соотношения:

$$\tilde{u}^{(\alpha)} = u^{(\alpha)}, \quad \tilde{u}^{(\alpha)} = \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}, \quad \tilde{u}^{(\alpha)} = r\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + z\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}$$

$$\tilde{u}^{(\alpha)} = 2rz\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (z^2 - r^2)\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha z u^{(\alpha)}$$

$$u^{(2-\alpha)} = r^{\alpha-1}u^{(\alpha)}, \qquad u^{(\alpha-2)} = r\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (\alpha-1)u^{(\alpha)}$$

$$u^{(\alpha-2)} = rz\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - r^2\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + (\alpha-1)zu^{(\alpha)} \tag{2.5}$$

$$u^{(\alpha-2)} = r(r^2 - z^2)\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2r^2 z\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + [r^2 - (\alpha-1)z^2]u^{(\alpha)}$$

$$u^{(\alpha+2)} = \frac{1}{r}\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}, \qquad u^{(\alpha+2)} = \frac{z}{r}\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}$$

$$u^{(\alpha+2)} = \frac{(r^2 - z^2)}{r}\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2z\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha u^{(\alpha)}$$

При $\beta = \alpha = 0$ происходит расширение первых четырех базисных соотношений до базисных соотношений

$$\tilde{u}^{(0)} = u^{(0)}$$

$$\tilde{u}^{(0)} = \Psi(r,z)\frac{\partial u^{(0)}}{\partial r} + \Phi(r,z)\frac{\partial u^{(0)}}{\partial z} \tag{2.6}$$

где $A = \Psi(r, z)$, $B = \Phi(r, z)$ – произвольные решения системы уравнений Коши – Римана $\partial A/\partial r = \partial B/\partial z$, $\partial A/\partial z = -\partial B/\partial r$.

Отметим, что пятое соотношение из (2.5) получено в работе [6], а девятое – в работе [7].

3. Построение соотношений с помощью групп непрерывных преобразований. Уравнение (1.1) связано с трехмерным уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{3.1}$$

В цилиндрической системе координат r, φ, z:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

$$r \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \qquad -\infty < z < \infty$$

оно принимает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) имеет решения вида

$$V(r, \varphi, z) = Ce^{\pm i\lambda\varphi}r^{\lambda}u(r, z) \tag{3.3}$$

где C – произвольная постоянная, $i^2 = -1$, $\lambda = (\alpha - 1)/2$ и функция $u = u(r, z)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Соотношение (3.3) задает редукцию уравнения (3.2) к классу уравнений (1.1).

Уравнение (3.1) линейно и однородно. Для линейного однородного уравнения алгебра Ли операторов симметрии всегда содержит бесконечномерную подалгебру, порожденную операторами симметрии, зависящими от произвольных решений этого уравнения. Поэтому в дальнейшем для уравнения (3.1) будем рассматривать лишь конечномерную часть алгебры Ли операторов симметрии.

Уравнение (3.1) допускает алгебру Ли операторов симметрии со следующим базисом [8, с. 94]:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \partial/\partial x, \quad X_2 = \partial/\partial y, \quad X_3 = \partial/\partial z \\
&X_4 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_5 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \\
&X_6 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_7 = V\frac{\partial}{\partial V} \\
&X_8 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} \\
&X_9 = (x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} + 2xz\frac{\partial}{\partial z} - xV\frac{\partial}{\partial V} \\
&X_{10} = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2 - z^2)\frac{\partial}{\partial y} + 2yz\frac{\partial}{\partial z} - yV\frac{\partial}{\partial V} \\
&X_{11} = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (z^2 - x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial z} - zV\frac{\partial}{\partial V}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

В цилиндрической системе координат базис операторов симметрии (3.4) принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad X_2 = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\
&X_3 = \partial/\partial z, \quad X_4 = -\partial/\partial\varphi \\
&X_5 = z\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{z\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} - r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial z} \\
&X_6 = z\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{z\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} - r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial z} \\
&X_7 = V\frac{\partial}{\partial V}, \quad X_8 = r\frac{\partial}{\partial r} + z\frac{\partial}{\partial z} \\
&X_9 = (r^2 - z^2)\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(r^2 + z^2)}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2rz\cos\varphi\frac{\partial}{\partial z} - r\cos\varphi V\frac{\partial}{\partial V} \\
&X_{10} = (r^2 - z^2)\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(r^2 + z^2)}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2rz\sin\varphi\frac{\partial}{\partial z} - r\sin\varphi V\frac{\partial}{\partial V} \\
&X_{11} = 2rz\frac{\partial}{\partial r} + (r^2 - z^2)\frac{\partial}{\partial z} - zV\frac{\partial}{\partial V}
\end{aligned}
$$

Вместо операторов X_1, X_2 рассмотрим операторы

$$
\begin{aligned}
&Z_1 = X_1 + iX_2 = e^{i\varphi}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{ie^{i\varphi}}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\
&Z_2 = X_1 - iX_2 = e^{-i\varphi}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{ie^{-i\varphi}}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}
\end{aligned}
$$

а вместо операторов X_5, X_6 – операторы

$$Z_5 = X_5 + iX_6 = ze^{i\varphi}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{ize^{i\varphi}}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} - re^{i\varphi}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$Z_6 = X_5 - iX_6 = ze^{-i\varphi}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{ize^{-i\varphi}}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} - re^{-i\varphi}\frac{\partial}{\partial z}$$

и вместо X_9, X_{10} – операторы

$$Z_9 = X_9 + iX_{10} = (r^2 - z^2)e^{i\varphi}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i(r^2+z^2)e^{i\varphi}}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2rze^{i\varphi}V\frac{\partial}{\partial z} - re^{i\varphi}V\frac{\partial}{\partial V}$$

$$Z_{10} = X_9 - iX_{10} = (r^2 - z^2)e^{-i\varphi}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i(r^2+z^2)e^{-i\varphi}}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2rze^{-i\varphi}V\frac{\partial}{\partial z} - re^{-i\varphi}V\frac{\partial}{\partial V}$$

Справедливо следующее *утверждение*: Пусть линейное однородное уравнение $Lv = 0$ допускает оператор симметрии

$$X = \sum_{i=1}^{n}\xi^i(x,v)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x,v)\frac{\partial}{\partial v}, \qquad x \in R^n \tag{3.5}$$

Тогда, если $v = \varphi(x)$ является решением, то и

$$\tilde{v} = X[v - \varphi(x)]\,|_{v=\varphi(x)} \tag{3.6}$$

также является решением этого линейного однородного уравнения.

Доказательство. Группа преобразований, задаваемая инфинитезимальным оператором (3.5), преобразует решение $v = \varphi(x)$ в решение

$$v = \varphi(x) + aX[v - \varphi(x)]\,|_{v=\varphi(x)} + O(a^2)$$

где a – групповой параметр. Справедливость утверждения следует из линейности и однородности рассматриваемого уравнения.

Применим доказанное утверждение для получения новых решений уравнения (3.2) с помощью операторов симметрии $Z_1, Z_2, X_3, X_4, Z_5, Z_6, X_7, X_8, Z_9, Z_{10}, X_{11}$ действуя ими на решения вида (3.3). Если при этом вид решений (3.3) не будет меняться, то тогда можно получить новые решения уравнения (1.1), Они и определяют искомые соотношения между решениями рассматриваемого класса уравнений (1.1). Нетрудно показать, что таким способом также получаются соотношения (2.5), (2.6). При этом необходимо использовать симметрии уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–01153).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 296 с.
2. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во ИЛ, 1961. 588 с.
3. *Джаиани Г.В.* Решение некоторых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения и их приложения к призматическим оболочкам. Тбилиси: Изд-во ТбУ, 1982. 163 с.
4. *Жданов В.К., Трубников Б.А.* Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991. 176 с.
5. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.

6. *Weinstein A.* Discontinuous integrals and generalized potential theory // Trans. Americ. math. society. 1948. V. 63. № 2. P. 342–354.
7. *Weinstein A.* The singular solutions and the Cauchy problem for generalized Tricomi equations // Communic. Pure and Appl. Math. 1954. V. 7. № 1. P. 105–116.
8. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
9. *Аксенов А.В.* Периодические инвариантные решения уравнений абсолютно неустойчивых сред // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 14–20.

Москва

Поступила в редакцию
25.10.2000