МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2001

УДК 593.3

 М.У. НИКАБАДЗЕ

К ВАРИАНТУ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Применением нескольких базовых поверхностей при параметризации оболочечной области трехмерного евклидова пространства точнее описывается изменение по толщине напряженно-деформированного состояния оболочечной конструкции. Поэтому преимущество применения такой параметризации по сравнению с классической для многослойных оболочечных конструкций, в том числе и для толстых оболочек, несомненно. Причем, если при рассмотрении многослойных оболочечных конструкций в качестве базовых применяются лицевые поверхности слоев, то это дает возможность более реально учитывать характер межслойных контактов. Ниже приводятся исследование предлагаемой параметризации в общих чертах и ее частичное применение к построению порождающей ею теории многослойных конструкций.

1. Параметризация многослойной оболочечной области трехмерного евклидова пространства с несколькими базовыми поверхностями. Рассмотрим многослойную оболочечную область евклидова пространства, состоящую из не более чем счетного числа слоев. Пусть, слои пронумерованы по возрастанию, т.е., если, например, α – номер какого-нибудь слоя, то номером предыдущего слоя будет $\alpha - 1$, а номером последующего – $\alpha + 1$. Каждый слой имеет две лицевые поверхности. Лицевую поверхность слоя α, находящуюся со стороны предыдущего слоя $\alpha - 1$, назовем внутренней базовой поверхностью и обозначим через $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{S}}$, а лицевую поверхность слоя α, находящуюся со стороны последующего слоя $\alpha + 1$, назовем внешней базовой поверхностью и обозначим через $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{S}}$. Считаем, что лицевые поверхности каждого слоя – регулярные поверхности и в случае ограниченного незамкнутого слоя боковая поверхность является линейчатой поверхностью.

1.1. Векторное параметрическое уравнение слоя α *и система векторных параметрических уравнений многослойной оболочечной области.* Радиус-вектор произвольной точки $\underset{\alpha}{M}$ любого слоя α представляется в виде

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}(x^1, x^2, x^3) = \overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1, x^2) + x^3 \underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1; x^2) = (1 - x^3)\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1, x^2) + x^3 \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1, x^2) \tag{1.1}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad \forall x^3 \in [0, 1]$$

где векторные соотношения

$$\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}} = \overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1, x^2), \qquad \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}} = \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1, x^2), \qquad \forall \alpha \tag{1.2}$$

являются векторными уравнениями базовых поверхностей $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{S}}$ и $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{S}}$ соответственно,

x^1, x^2 – криволинейные (гауссовые) координаты на внутренней базовой поверхности $\underset{\alpha}{\overset{(-)}{S}}$, а $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

Вектор

$$\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1, x^2) = \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{r}}}(x^1, x^2) - \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{r}}}(x^1, x^2), \qquad \forall\alpha \tag{1.3}$$

топологически отображающий внутреннюю базовую поверхность $\underset{\alpha}{\overset{(-)}{S}}$ на внешнюю $\underset{\alpha}{\overset{(+)}{S}}$, вообще говоря, не является перпендикулярным к базовым поверхностям. Причем конец каждого $\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1, x^2)$ является началом $\underset{\alpha+1}{\mathbf{h}}(x^1, x^2)$, $\forall\alpha$, т.е. имеет место соотношение[1]

$$\underset{\alpha+\delta}{\overset{(+)}{\mathbf{r}}}(x^1, x^2) = \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{r}}}(x^1, x^2) + \sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+\delta} \underset{\nu}{\mathbf{h}} = \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{r}}}(x^1, x^2) + \sum_{\nu=\alpha+1}^{\alpha+\delta} \underset{\nu}{\mathbf{h}}, \qquad \forall\alpha, \delta \tag{1.4}$$

Легко усмотреть, что из (1.1) следует (1.3), но не следует (1.4).

Теперь посмотрим на соотношение (1.1) более внимательно. На самом деле, (1.1) при фиксированном α – векторное параметрическое уравнение слоя α, а при изменении α нужное число раз и соблюдении условий (1.4) представляет систему векторных параметрических уравнений многослойной оболочечной области.

Пусть $\underset{\alpha}{\overset{(-)}{M}} = (x^1, x^2, 0) = (x^1, x^2)$ – какая-нибудь точка на внутренней базовой поверхности $\underset{\alpha}{\overset{(-)}{S}}$, т.е. $\underset{\alpha}{\overset{(-)}{M}} \in \underset{\alpha}{\overset{(-)}{S}}$, а $\underset{\alpha}{M} = (x^1, x^2, x^3)$ и $\underset{\alpha}{\overset{(+)}{M}} = (x^1, x^2, 1)$ соответствующие ей точки на эквидистантной поверхности $\underset{\alpha}{S}$ и внешней базовой поверхности $\underset{\alpha}{\overset{(+)}{S}}$ соответственно[2], т.е. $\underset{\alpha}{M} \in \underset{\alpha}{S}$ и $\underset{\alpha}{\overset{(+)}{M}} \in \underset{\alpha}{\overset{(+)}{S}}$.

Обозначая через $\underset{\alpha}{Q}$ и Q соответственно множества точек слоя α и многослойной оболочечной области трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, нетрудно усмотреть, что их определения на языке математики получат вид

$$\underset{\alpha}{Q} = \left\{ \left(\underset{\alpha}{\overset{(-)}{M}}, \underset{\alpha}{z} \right) \in \mathbb{R}^3 : \forall \underset{\alpha}{\overset{(-)}{M}} \in \underset{\alpha}{\overset{(-)}{S}}, \;\; \forall \underset{\alpha}{z} \in [0, \underset{\alpha}{h}], \;\; \underset{\alpha}{h} = |\underset{\alpha}{\mathbf{h}}|, \;\; \underset{\alpha}{z} = x^3 \underset{\alpha}{h} \right\}, \; \forall\alpha \qquad Q = \bigcup_{\alpha} \underset{\alpha}{Q} \tag{1.5}$$

---

[1] Применяются обычные правила тензорного исчисления [1–3]. В основном, сохранены обозначения и соглашения, принятые в ранее опубликованных работах, с тем отличием, что теперь и под символами пишем индексы, обозначающие номера слоев. Используемые греческие индексы под символами принимают значения от обстоятельств, а прописные и строчные латинские индексы пробегают значения 1, 2 и 1, 2, 3 соответственно.

[2] В дальнейшем часто будем пользоваться краткой записью, подобной $\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{M}} \in \underset{\alpha}{\overset{(\star)}{S}}$, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, где $\emptyset$ обозначает пустое множество. Эта запись означает, что если $\star = -$, то $\underset{\alpha}{\overset{(-)}{M}} \in \underset{\alpha}{\overset{(-)}{S}}$, если $\star = \emptyset$, то $\underset{\alpha}{M} \in \underset{\alpha}{S}$, а если $\star = +$, то $\underset{\alpha}{\overset{(+)}{M}} \in \underset{\alpha}{\overset{(+)}{S}}$.

1.2. $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$*-семейства реперов (базисов) и порожденные ими* $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$*-семейства параметризаций поверхности*, $\star\in\{-,\varnothing,+\}$, $\forall\alpha$. Для производных от соотношений (1.1) и (1.2) по x^P в точках $\forall\,\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}}\in\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$, $\star\in\{-,\varnothing,+\}$, $\forall\alpha$, введем соответственно обозначения

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_P\equiv\partial_P\underset{\alpha}{\mathbf{r}}\equiv\partial_P\underset{\alpha}{\mathbf{r}}/\partial x^P,\qquad \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{\star}{P}}\equiv\partial_P\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}\equiv\partial\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}/\partial x^P \tag{1.6}$$
$$\star\in\{-,+\},\ \forall\alpha$$

Двойки векторов $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{\star}{1}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{\star}{2}}$, определенные в точках $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}}\in\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$, $\star\in\{-,\varnothing,+\}$, $\forall\alpha$ соответственно, следовательно, образуют двумерные ковариантные поверхностные базисы, а $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{\star}{1}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{\star}{2}}$, $\star\in\{-,\varnothing,+\}$, $\forall\alpha$, – двумерные ковариантные поверхностные реперы, порождающие в свою очередь соответствующие им параметризации рассматриваемых поверхностей. По этим реперам (базисам), как известно [1–3], можно построить соответствующие им контравариантные реперы $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{1}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{2}}$ (базисы $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{1}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{2}}$), $\star\in\{-,\varnothing,+\}$, $\forall\alpha$. Естественно, ковариантные и контравариантные базисы порождают свойственные порожденным порождающими реперами параметризациям геометрические характеристики.

Определяя в каждой точке поверхностей $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$, реперы (базисы), получим соответствующие семейства реперов (базисов), называемые $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$-семействами реперов (базисов) и порождающие ими соответствующие параметризации, называемые $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$-семействами параметризаций, $\star\in\{-,\varnothing,+\}$, $\forall\alpha$.

Геометрические характеристики, порожденные при $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$-семействах параметризаций называются $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$-семействами геометрических характеристик (символов Кристоффеля, компонент тензоров,...), $\star\in\{-,\varnothing,+\}$, $\forall\alpha$.

1.3. $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}{}_{\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{g}}}$*-семейства реперов (базисов) и порожденные ими* $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}{}_{\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{g}}}$*-семейства параметризаций области*, $\star\in\{-,\varnothing,+\}$, $\forall\alpha$. Учитывая в первом соотношении (1.6) выражение радиус-вектора $\mathbf{r}$ (1.1) и вводя обозначение $\underset{\alpha}{\mathbf{h}}_P\equiv\partial\underset{\alpha}{\mathbf{h}}/\partial x^P\equiv\partial_P\underset{\alpha}{\mathbf{h}}$, получим

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_P\equiv\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\bar{P}}+x^3\,\underset{\alpha}{\mathbf{h}}_P=(1-x^3)\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\bar{P}}+x^3\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{+}{P}},\qquad\forall\alpha \tag{1.7}$$

Теперь дифференцируя (1.1) по x^3, будем иметь

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_3\equiv\partial_3\underset{\alpha}{\mathbf{r}}\equiv\partial\underset{\alpha}{\mathbf{r}}/\partial x^3=\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1,x^2),\qquad\forall x^3\in[0,1],\qquad\forall\alpha \tag{1.8}$$

В силу (1.8) можно принять, что

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\bar{3}}\equiv\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_3\equiv\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{+}{3}}=\partial_3\underset{\alpha}{\mathbf{r}}=\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1,x^2),\qquad\forall x^3\in[0,1],\qquad\forall\alpha \tag{1.9}$$

Соотношение (1.9) дает возможность в точках $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}} \in \overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$, $\star \in \{-,+\}$, $\forall\alpha$, определить пространственные ковариантные базисы $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{\star}{p}}$, $\star \in \{-,+\}$, $\forall\alpha$, соответственно. Таким образом, третий базисный вектор пространственных ковариантных базисов в точках $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}} \in \overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$, $\star \in \{-,\emptyset,+\}$, для данного слоя α – один и тот же вектор $\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1, x^2)$.

Ввиду (1.9) соотношения (1.7) и (1.8) можно объединить и представить в виде

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_p = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\bar p} + x^3 \underset{\alpha}{\mathbf{h}}_p = (1-x^3)\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}_p + x^3 \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}_{\overset{+}{p}}, \quad \forall\alpha \tag{1.10}$$

Тройки векторов $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{\star}{1}}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{\star}{2}}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{\star}{3}}$, определенные в точках $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}} \in \overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$, $\star \in \{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$, соответственно, следовательно, образуют трехмерные ковариантные пространственные базисы, а $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{\star}{1}}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{\star}{2}}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{\star}{3}}$, $\star \in \{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$, – трехмерные ковариантные пространственные реперы, порождающие в свою очередь соответствующие им параметризации. По этим реперам (базисам), как известно [1–3], можно построить соответствующие им контравариантные реперы $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{1}}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{2}}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{3}}$ (базисы $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{1}}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{2}}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{3}}$), $\star \in \{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$. В самом деле, на основании их определения имеем

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde k} = \frac{1}{2}\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{C}}{}^{\tilde k\tilde p\tilde q}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde p}\times\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde q}, \qquad \sim\in\{-,\emptyset,+\}, \quad \forall\alpha \tag{1.11}$$

где $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{C}}{}^{\tilde k\tilde p\tilde q} = (\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde k}\times\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde p})\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde q}$ – контравариантные компоненты дискриминантных тензоров слоя α соответственно в рассматриваемых точках $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{M}} \in \overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{S}}$, $\sim\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$.

Видно, что (1.10) можно представить в виде

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_p = \underset{\alpha}{g}{}_p^{\overset{\star}{q}}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{\star}{q}} = \underset{\alpha}{g}_{p\overset{\star}{q}}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{q}}, \qquad \star\in\{-,+\}, \quad \forall\alpha \tag{1.12}$$

$$\underset{\alpha}{g}_{\breve p\tilde q} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\breve p}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde q}, \qquad \underset{\alpha}{g}{}_{\breve p}^{\tilde q} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\breve p}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde q}, \qquad \cup\in\{-,\emptyset,+\}, \qquad \sim\in\{-,+\}, \quad \forall\alpha \tag{1.13}$$

На основании (1.10) и (1.13) для $\underset{\alpha}{g}_{p\tilde q}$ и $\underset{\alpha}{g}{}_p^{\tilde q}$ имеем

$$\begin{aligned} \underset{\alpha}{g}_{p\breve q} &= \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_p\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\breve q} = (1-x^3)\underset{\alpha}{g}_{\bar p\breve q} + x^3\underset{\alpha}{g}_{\overset{+}{p}\breve q} \\ \underset{\alpha}{g}{}_p^{\breve q} &= \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_p\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\breve q} = (1-x^3)\underset{\alpha}{g}{}_{\bar p}^{\breve q} + x^3\underset{\alpha}{g}{}_{\overset{+}{p}}^{\breve q}, \qquad \cup\in\{-,+\}, \quad \forall\alpha \end{aligned} \tag{1.14}$$

Нетрудно получить выражения и для $\underset{\alpha}{g}_{pq}$. В самом деле, по (1.12) и (1.14) имеем

$$\underset{\alpha}{g}_{pq} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_p\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_q = \underset{\alpha}{g}_{p\overset{\star}{n}}\,\underset{\alpha}{g}{}_q^{\overset{\star}{n}} = (1-x^3)^2\underset{\alpha}{g}_{\bar p\bar q} + x^3(1-x^3)(\underset{\alpha}{g}_{\bar p\overset{+}{q}} + \underset{\alpha}{g}_{\overset{+}{p}\bar q}) + (x^3)^2\underset{\alpha}{g}_{\overset{+}{p}\overset{+}{q}} \tag{1.15}$$

$\star\in\{-,+\}$, $\forall\alpha$

Найдем выражения для $\sqrt{\underset{\alpha}{g}} = (\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_1 \times \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_2) \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_3$. В силу первого равенства (1.12) получаем

$$\sqrt{\underset{\alpha}{g}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}(\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_I \times \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_J)\cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}}\,\varepsilon^{IJ}\varepsilon_{KL}\,\underset{\alpha}{g}{}_I^{\tilde{K}}\,\underset{\alpha}{g}{}_J^{\tilde{L}} =$$

$$= \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}}\,\det(\underset{\alpha}{g}{}_p^{\tilde{q}}) = \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}}\,\det(\underset{\alpha}{g}{}_P^{\tilde{Q}}), \quad \sim \in \{-,+\}, \quad \forall\alpha \tag{1.16}$$

$$\sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}} = (\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{1}} \times \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{2}})\cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{3}}, \qquad \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(-)}{g}}} = \sqrt{\underset{\alpha}{g}}\Big|_{x^3=0}, \qquad \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(+)}{g}}} = \sqrt{\underset{\alpha}{g}}\Big|_{x^3=1}$$

где ε^{IJ}, ε_{KL} – символы Леви – Чивита.

Из (1.16) в свою очередь имеем

$$\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\vartheta}} \equiv \sqrt{\underset{\alpha}{g}\,\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}{}^{-1}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}\varepsilon_{KL}\,\underset{\alpha}{g}{}_I^{\tilde{K}}\,\underset{\alpha}{g}{}_J^{\tilde{L}} = \det(\underset{\alpha}{g}{}_P^{\tilde{Q}}), \qquad \sim \in \{-,+\}, \quad \forall\alpha \tag{1.17}$$

Целесообразно ввести еще обозначения

$$\underset{\alpha}{\overset{(\breve{\sim})}{\vartheta}} \equiv \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}\,\underset{\alpha}{\overset{(\cup)}{g}}{}^{-1}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{IJ}\varepsilon_{KL}\,\underset{\alpha}{g}{}_{\tilde{I}}^{\breve{K}}\,\underset{\alpha}{g}{}_{\tilde{J}}^{\breve{L}}, \qquad \cup, \sim \in \{-,+\}, \quad \forall\alpha$$

Не представляет большого труда выразить $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^k$, $\forall\alpha$ через $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{m}}$ или $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{m}}$, $\sim \in \{-,+\}$, $\forall\alpha$. Учитывая в соотношении (1.11) при $\sim = \emptyset$, например, первое равенство (1.12), получаем

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^k = \frac{1}{2}\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\vartheta}}{}^{-1}\,\varepsilon^{kpq}\varepsilon_{lmn}\,\underset{\alpha}{g}{}_p^{\tilde{m}}\,\underset{\alpha}{g}{}_q^{\tilde{n}}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{l}}, \qquad \sim \in \{-,+\}, \quad \forall\alpha \tag{1.18}$$

где ε^{kpq}, ε_{lmn} – символы Леви – Чивита.

В силу (1.18) можно ввести обозначения

$$\underset{\alpha}{g}{}_{\tilde{l}}^{k} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}^k \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{l}} = \tfrac{1}{2}\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\vartheta}}{}^{-1}\,\varepsilon^{kpq}\varepsilon_{lmn}\,\underset{\alpha}{g}{}_p^{\tilde{m}}\,\underset{\alpha}{g}{}_q^{\tilde{n}}$$

$$\underset{\alpha}{g}{}^{k\tilde{l}} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}^k \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{l}} = \tfrac{1}{2}\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\vartheta}}{}^{-1}\,\varepsilon^{kpq}\varepsilon_{smn}\,\underset{\alpha}{g}{}_p^{\tilde{m}}\,\underset{\alpha}{g}{}_q^{\tilde{n}}\,\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{s}\tilde{l}}, \qquad \sim \in \{-,+\}, \quad \forall\alpha \tag{1.19}$$

и тогда соотношение (1.18) представится в искомом виде

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^p = \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde{q}}^{p}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{q}} = \underset{\alpha}{g}{}^{p\tilde{q}}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{q}}, \qquad \sim \in \{-,+\}, \quad \forall\alpha \tag{1.20}$$

Из первого соотношения (1.19) имеем

$$\underset{\alpha}{g}{}_{\tilde{K}}^{K} = \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\vartheta}}{}^{-1}\,\underset{\alpha}{g}{}_I^{\tilde{I}} \Rightarrow \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde{K}}^{\breve{K}}\,\underset{\alpha}{\overset{(\breve{\sim})}{\vartheta}} = \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde{I}}^{\breve{I}}, \qquad \cup, \sim \in \{-,+\}, \quad \forall\alpha$$

Введем еще обозначения

$$\underset{\alpha\beta}{g}{}_{\breve{p}\cdot}^{\cdot\tilde{q}} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\breve{p}}\cdot \underset{\beta}{\mathbf{r}}^{\tilde{q}}, \qquad \cup, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \qquad \forall\alpha,\beta \tag{1.21}$$

и обозначения, получаемые из (1.21) жонглированием индексами. Нетрудно подсчитать, что число таких обозначений равно 36.

При $\alpha=\beta$ (1.21) содержит (1.12), (1.15) и (1.19). В самом деле, из (1.21) будем иметь

$$\underset{\alpha}{g}{}_{\tilde p}^{\tilde q} = \underset{\alpha\alpha}{g}{}_{\tilde p\,\cdot}^{\,\cdot\,\tilde q} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}_{\breve p}\cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde q}, \qquad \breve{},\tilde{} \in \{-,\emptyset,+\},\quad \forall\alpha \tag{1.22}$$

и, жонглируя индексами, очевидно, получим упомянутые выше обозначения и еще $\underset{\alpha}{g}{}^{pq} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{p}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{q}$, $\forall\alpha$, т.е. и в этом случае число введенных величин равно 36.

Нетрудно заметить, что в силу (1.21) и (1.22) связи между различными семействами базисов представляются в виде

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}_{\tilde p} = \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde p}^{\breve n}\,\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}_{\breve n} = \underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde p\,\cdot}^{\,\cdot\,\breve n}\,\underset{\beta}{\mathbf{r}}{}_{\breve n}, \qquad \breve{},\tilde{} \in \{-,\emptyset,+\},\quad \forall\alpha\beta \tag{1.23}$$

сохраняющие силу при жонглировании немыми и свободными индексами.

В силу (1.23) нетрудно показать, что имеют место соотношения

$$\underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde p\,\cdot}^{\,\cdot\,\breve q} = \underset{\alpha\delta}{g}{}_{\tilde p\,\cdot}^{\,\cdot\,\overset{\star}{n}}\;\underset{\delta\beta}{g}{}_{\overset{\star}{n}\,\cdot}^{\,\cdot\,\breve q}, \qquad \breve{},\tilde{},\star \in \{-,\emptyset,+\},\quad \forall\alpha,\beta,\delta \tag{1.24}$$

Естественно, ковариантные и контравариантные базисы порождают свойственные порожденным порождающими реперами параметризациям геометрические характеристики.

Определяя в каждой точке поверхностей $\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{S}}$ пространственные реперы (базисы), получим соответствующие семейства пространственных реперов (базисов), называемые $\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{S}}{}_{\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{g}}}$-семействами реперов (базисов) и порождающие ими соответствующие семейства параметризаций, называемые $\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{S}}{}_{\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{g}}}$-семействами параметризаций, $\star\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$.

Геометрические характеристики, сопровождающие $\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{S}}{}_{\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{g}}}$-семейства параметризаций, будем называть $\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{S}}{}_{\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{g}}}$-семействами геометрических характеристик (символов Кристоффеля, компонент тензоров,...), $\star\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$.

1.4. Мультипликативные базисные тензоры. Для представления в предлагаемой теории тензоров, ранг которых не меньше двух, полезно вводить в рассмотрение мультипликативные базисные тензоры. Полагая, что число слоев многослойной оболочечной области не меньше двух, ограничимся введением следующих диад

$$\begin{gathered}\underset{\alpha\beta}{\mathbf{R}}{}_{\tilde m\breve n}^{\cdot\;\cdot} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}_{\tilde m}\otimes\underset{\beta}{\mathbf{r}}{}_{\breve n}, \qquad \underset{\alpha\beta}{\mathbf{R}}{}_{\tilde m\,\cdot}^{\,\cdot\,\breve n} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}_{\tilde m}\otimes\underset{\beta}{\mathbf{r}}{}^{\breve n}, \qquad \underset{\alpha\beta}{\mathbf{R}}{}^{\tilde m\,\cdot}_{\,\cdot\,\breve n} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde m}\otimes\underset{\beta}{\mathbf{r}}{}_{\breve n} \\ \underset{\alpha\beta}{\mathbf{R}}{}^{\tilde m\breve n}_{\cdot\;\cdot} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde m}\otimes\underset{\beta}{\mathbf{r}}{}^{\breve n}, \qquad \tilde{},\breve{} \in \{-,\emptyset,+\},\quad \forall\alpha,\beta\end{gathered} \tag{1.25}$$

Следует заметить, что по терминологии, принятой, например, в [3], (1.25) – двуточечные тензоры. Аналогично можно вводить многоточечные тензоры более общего вида.

1.5. Различные семейства символов Кристоффеля. Для нахождения ковариантных производных от тензоров и их компонент нам понадобятся символы Кристоффеля. Естественно, введенное выше каждое семейство базисов порождает свойственное ему семейство символов Кристоффеля, для которого следует вводить соответствующее обозначение. Например, для $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{S}}{}_{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}}$-семейств символов Кристоффеля первого и второго родов введем соответственно обозначения $\underset{\alpha}{\Gamma}_{\tilde p\tilde q,\tilde n}$ и $\underset{\alpha}{\Gamma}{}^{\tilde n}_{\tilde p\tilde q}$.

Математически $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{S}}{}_{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}}$-семейства символов Кристоффеля, $\sim\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$, определяются следующим образом:

$$\underset{\alpha}{\Gamma}_{\tilde p\tilde q,\tilde n}\equiv\partial_q\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde p}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde n}\equiv\partial_q\partial_p\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde n}\equiv\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde p\tilde q}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde n}$$

$$\underset{\alpha}{\Gamma}{}^{\tilde n}_{\tilde p\tilde q}\equiv\partial_q\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde p}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde n}\equiv\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde p\tilde q}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde n},\qquad\sim\in\{-,\emptyset,+\},\ \forall\alpha \tag{1.26}$$

1.6. Представления единичных тензоров второго и четвертого (одного из трех изотропных тензоров четвертого ранга) рангов. Исходя из обычного представления единичного тензора второго ранга [2, 3] с учетом (1.23) и (1.24), получаем его искомое представление

$$\underset{\sim}{\mathbf{E}}=\underset{\tilde\alpha}{\mathbf{E}}=\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde p}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\breve p}=\underset{\alpha}{\mathbf{R}}{}_{\breve n}{}^{\cdot\tilde n}_{\cdot}=\underset{\alpha}{g}{}^{\breve n}_{\tilde p}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde p}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\breve n}=\underset{\tilde\beta}{\mathbf{E}}=\underset{\beta}{\mathbf{r}}{}^{\breve n}\underset{\beta}{\mathbf{r}}_{\breve n}=\underset{\beta}{\mathbf{R}}{}_{\tilde n}{}^{\cdot\tilde n}_{\cdot}=$$

$$=\underset{\beta}{g}{}^{\breve n}_{\tilde p}\underset{\beta}{\mathbf{r}}{}^{\tilde p}\underset{\beta}{\mathbf{r}}_{\breve n}=\underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde p}{}^{\cdot\breve n}_{\cdot}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde p}\underset{\beta}{\mathbf{r}}_{\breve n},\qquad\sim,\cup\in\{-,\emptyset,+\},\ \forall\alpha,\beta \tag{1.27}$$

сохраняющее силу при жонглировании немыми индексами.

Как видно из (1.27), введенные выше величины (1.21) и (1.22) представляют компоненты единичного тензора второго ранга.

Рассмотренная выше параметризация, характеризующаяся заданием радиус-вектора произвольной точки любого слоя α в виде (1.1) и соблюдением условия (1.4) называется параметризацией многослойной оболочечной области с несколькими базовыми поверхностями.

Компоненты $\underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde p}{}^{\cdot\breve n}_{\cdot}$, $\sim\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$, $\cup\in\{-,+\}$, $\forall\alpha,\beta$ и получаемые из них жонглированием индексами их образы, будем называть компонентами переноса единичного тензора второго ранга, а компоненты $\underset{\alpha\beta}{g}{}^{\cdot\cdot}_{\tilde p\tilde q}$, $\underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde p}{}^{\cdot\tilde q}_{\cdot}$, $\underset{\alpha\beta}{g}{}^{\tilde p\tilde q}_{\cdot\cdot}$ $\sim=-\ (\sim=+)$, $\forall\alpha,\beta$ и компоненты переноса $\underset{\alpha\beta}{g}{}^{\cdot\cdot}_{\tilde p\tilde q}$, $\underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde p}{}^{\cdot\tilde q}_{\cdot}$, $\sim=+$, $\cup=-\ (\sim=-,\ \cup=+)$, $\forall\alpha,\beta$ – основными компонентами единичного тензора второго ранга, если в качестве базовых принимаются внутренние (внешние) базовые поверхности слоев.

Нетрудно найти выражения для $\underset{\alpha\beta}{g}{}_{pq}$ посредством основных компонент переноса. В самом деле, в силу (1.21) и (1.24) имеем

$$\underset{\alpha\beta}{g}{}_{pq}=\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_p\cdot\underset{\beta}{\mathbf{r}}_q=\underset{\alpha}{g}{}^{\breve m}_{p}\underset{\beta}{g}{}^{\tilde n}_{q}\underset{\alpha\beta}{g}{}_{\breve m\tilde n},\qquad\sim,\cup\in\{-,+\},\ \forall\alpha,\beta \tag{1.28}$$

Учитывая (1.14) в (1.28), получаем

$$\underset{\alpha\beta}{g}_{pq} = (1-x^3)^2 \underset{\alpha\beta}{g}_{\overset{-}{p}\overset{-}{q}} + x^3(1-x^3)\left(\underset{\alpha\beta}{g}_{\overset{-}{p}\overset{+}{q}} + \underset{\alpha\beta}{g}_{\overset{+}{p}\overset{-}{q}}\right) + (x^3)^2 \underset{\alpha\beta}{g}_{\overset{+}{p}\overset{+}{q}}, \ \forall\alpha,\beta \tag{1.29}$$

Из (1.29) при $\alpha = \beta$ следует (1.15).

Нетрудно увидеть, что для единичного тензора четвертого ранга, обозначаемого $\underset{\tilde\alpha}{\mathbf{\Delta}}$, $\forall\alpha$ и его компонент будем иметь представления

$$\underset{\tilde\alpha}{\mathbf{\Delta}} = \underset{\tilde\alpha}{\Delta}_{\tilde m\breve n\hat p\check q}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde m} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\breve n} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\hat p} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\check q}, \qquad \underset{\alpha}{\Delta}_{\tilde m\breve n\hat p\check q}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{1}{2}\left(\underset{\alpha}{g}_{\tilde m\hat p}\underset{\alpha}{g}_{\breve n\check q} + \underset{\alpha}{g}_{\tilde m\check q}\underset{\alpha}{g}_{\breve n\hat p}\right)$$

$$\sim, \cup, \wedge, \vee \in \{-, \emptyset, +\}, \ \forall\alpha$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

1.7. Связи между различными семействами параметризаций многослойной оболочечной области. Будем говорить, что связь между двумя семействами параметризаций многослойной оболочечной области осуществлена, если найдены связи между порождающими эти семейства параметризаций семействами базисов и, вообще, между порожденными порождающими семействами базисов любыми семействами соответствующих геометрических характеристик, сопровождающими связываемые параметризации.

Очевидно, зная связь между двумя порождающими рассматриваемые семейства параметризаций семействами базисов, легко найти связь, например, между порожденными ими семействами символов Кристоффеля и, вообще, между порожденными ими любыми семействами соответствующих геометрических характеристик. Ограничимся нахождением связей между некоторыми семействами соответствующих геометрических характеристик, сопровождающими эти параметризации.

a. Связи между различными семействами многоточечных базисных тензоров. Как видно из (1.23) связи между $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{S}}_{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}}$- и $\overset{(\cup)}{\underset{\beta}{S}}_{\underset{\beta}{\overset{(\cup)}{g}}}$-семействами базисных векторов, $\sim, \cup \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall\alpha, \beta$ осуществляются соотношением

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde p} = \underset{\alpha\beta}{g}_{\tilde p\,\cdot}^{\cdot\,\breve n} \underset{\beta}{\mathbf{r}}_{\breve n}, \qquad \sim, \cup \in \{-, \emptyset, +\}, \forall\alpha, \beta \tag{1.30}$$

конечно, сохраняющим силу при жонглировании индексами.

В силу (1.30) можно найти связи между многоточечными мультипликативными базисными тензорами. В самом деле, нетрудно заметить, что связи, например, между двуточечными мультипликативными базисными тензорами будут иметь вид

$$\underset{\alpha\beta}{\mathbf{R}}_{\tilde p\,\cdot}^{\cdot\,\check q} = \underset{\alpha\gamma}{g}_{\tilde p\,\cdot}^{\cdot\,\hat m} \underset{\beta\delta}{g}_{\cdot\,\breve n}^{\check q\,\cdot} \underset{\gamma\delta}{\mathbf{R}}_{\hat m\,\cdot}^{\cdot\,\breve n}, \quad \sim, \cup, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \forall\alpha, \beta, \gamma, \delta \tag{1.31}$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

b. Связи между $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{S}}_{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}}$- и $\overset{(\cup)}{\underset{\alpha}{S}}_{\underset{\alpha}{\overset{(\cup)}{g}}}$-семействами символов Кристоффеля $\forall\alpha, \beta$, $\sim, \cup \in \{-, \emptyset, +\}$. Найдем связи между $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{S}}_{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}}$- и $\overset{(\cup)}{\underset{\beta}{S}}_{\underset{\beta}{\overset{(\cup)}{g}}}$-семействами символов Кристоффеля, $\sim, \cup \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall\alpha, \beta$. Дифференцируя (1.30) по x^q и пользуясь определениями символов Кристоффеля (1.26), получаем

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde p\tilde q}=\left(\partial_q\, \underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde p\,\cdot}^{\cdot\,\breve n}+\underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde p\,\cdot}^{\cdot\,\breve m}\,\underset{\beta}{\Gamma}{}^{\breve n}_{\breve m\tilde q}\right)\underset{\beta}{\mathbf{r}}_{\breve n}=\left(\partial_q\, \underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde p\breve n}^{\cdot\cdot}-\underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde p\,\cdot}^{\cdot\,\breve m}\,\underset{\beta}{\Gamma}{}_{\breve m\tilde q,\breve n}\right)\underset{\beta}{\mathbf{r}}^{\breve n} \tag{1.32}$$

$\sim,\ \cup\in\{-,\ \emptyset,+\},\ \forall\alpha,\beta$

Умножая (1.32) почленно на $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde l}=\underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde l\,\cdot}^{\cdot\,\breve k}\,\underset{\beta}{\mathbf{r}}_{\breve k}$ и $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde l}=\underset{\alpha\beta}{g}{}^{\tilde l\,\cdot}_{\cdot\,\breve k}\,\underset{\beta}{\mathbf{r}}^{\breve k}$ и учитывая определения символов Кристоффеля (1.26), получим искомые связи

$$\underset{\alpha}{\Gamma}{}_{\tilde p\tilde q,\tilde l}=\underset{\alpha\beta}{g}{}^{\cdot\cdot}_{\tilde l\breve n}\left(\partial_q\, \underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde p\,\cdot}^{\cdot\,\breve n}+\underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde p\,\cdot}^{\cdot\,\breve m}\,\underset{\beta}{\Gamma}{}^{\breve n}_{\breve m\breve q}\right)=\underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde l\,\cdot}^{\cdot\,\breve n}\left(\partial_q\, \underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde p\breve n}^{\cdot\cdot}-\underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde p\,\cdot}^{\cdot\,\breve m}\,\underset{\beta}{\Gamma}{}_{\breve m\breve q,\breve n}\right)$$

$$\underset{\alpha}{\Gamma}{}^{\tilde l}_{\tilde p\tilde q}=\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde l\tilde n}_{\cdot\,\cdot}\,\underset{\alpha}{\Gamma}{}_{\tilde p\tilde q,\tilde n},\qquad \sim,\cup\in\{-,\emptyset,+\},\ \forall\alpha,\beta \tag{1.33}$$

2. Кинематическая гипотеза. Векторы перемещений и их вариации. Рассмотрим две конфигурации пространства многослойной конструкции: отсчетную и актуальную.

Радиус-вектор произвольной точки любого слоя α в актуальной конфигурации представляется в виде (1.1), а в отсчетной – соотношением[3]

$$\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2,x^3)=(1-x^3)\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+x^3\overset{(\overset{\circ}{+})}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)=$$

$$=\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+x^3\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{h}}}(x^1,x^2),\qquad \forall\alpha\in\mathbb{N},\quad \forall x^3\in[0,1] \tag{2.1}$$

где векторные соотношения $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}=\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)$, $\overset{(\overset{\circ}{+})}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}=\overset{(\overset{\circ}{+})}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)$, $\forall\alpha$ задают базовые поверхности $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\alpha}{S}}$, $\overset{(\overset{\circ}{+})}{\underset{\alpha}{S}}$ соответственно, а x^1, x^2 – криволинейные (гауссовые) координаты на внутренней базовой поверхности $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\alpha}{S}}$.

Вектор

$$\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{h}}}(x^1,x^2)=\overset{(\overset{\circ}{+})}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)-\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2),\ \forall\alpha \tag{2.2}$$

топологически отображающий внутреннюю базовую поверхность $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\alpha}{S}}$, $\forall\alpha$ на внешнюю $\overset{(\overset{\circ}{+})}{\underset{\alpha}{S}}$, $\forall\alpha$, перпендикулярен к внутренней базовой поверхности $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\alpha}{S}}$, $\forall\alpha$. Причем конец $\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{h}}}$ является началом $\underset{\alpha+1}{\overset{\circ}{\mathbf{h}}}$ для любого α, поэтому аналогично (1.4) имеем соотношение

$$\overset{(\overset{\circ}{+})}{\underset{\alpha+\delta}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)=\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}+\sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+\delta}\underset{\nu}{\overset{\circ}{\mathbf{h}}}=\overset{(\overset{\circ}{+})}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}+\sum_{\nu=\alpha+1}^{\alpha+\delta}\underset{\nu}{\overset{\circ}{\mathbf{h}}},\quad \forall\alpha,\delta \tag{2.3}$$

---

[3] В отсчетной конфигурации применяются те же самые обозначения, что и в актуальной с тем различием, что над символами дополнительно пишем знак градуса.

Соотношение (2.1) при фиксированном α, очевидно, представляет векторное параметрическое уравнение слоя α в отсчетной конфигурации, а если α пробежит все свои значения и будут выполнены условия (2.3), то соотношения (2.1) представляют систему векторных параметрических уравнений многослойной оболочечной области в отсчетной конфигурации.

2.1. Кинематическая гипотеза. Точка отсчетной конфигурации любого слоя α *пространства многослойной конструкции с радиус-вектором (2.1) в актуальной конфигурации займет определенное радиус-вектором (1.1) положение.*

Как видно из принятой кинематической гипотезы, семейства параметризаций в отсчетной конфигурации являются частными случаями соответствующих семейств параметризаций в актуальной конфигурации. В связи с чем все соотношения (характеристики) теории, имеющие место в актуальной конфигурации, имели бы место и в отсчетной конфигурации при условии, что величины, символы, компоненты тензоров, а иногда и тензоры, относящиеся к отсчетной конфигурации, надо дополнительно снабжать сверху знаком градуса и в соотношениях, где это необходимо, учитывать соответствующие поправки ввиду того, что вектор $\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{h}}}$ перпендикулярен к внутренней базовой поверхности $\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{S}}\left(\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{h}}}\perp\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{S}}\right)$, $\forall\alpha$. Таким образом, для отсчетной конфигурации нет надобности заново выписать соотношения (характеристики) теории, если они уже выписаны для актуальной конфигурации. Достаточно лишь снабжать их сверху знаком градуса и по мере надобности сделать поправки, вносимые условием $\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{h}}}\perp\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{S}}$, $\forall\alpha$.

2.2. Векторы перемещений и их вариации. Рассмотрением двух конфигураций и принятой кинематической гипотезой обусловлено введение векторов перемещений. В предлагаемом варианте теории вводятся в рассмотрение векторы перемещений точек внутренней и внешней базовых поверхностей и вектор перемещения произвольной точки для каждого слоя α. Они определяются обычным образом, т.е. как разности радиус-векторов рассматриваемой точки в актуальной и отсчетной конфигурациях. Обозначая векторы перемещений точек внутренней и внешней базовых поверхностей слоя α соответственно через $\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}(x^1,x^2)$ и $\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}(x^1,x^2)$, в силу их определения будем иметь

$$\begin{aligned}\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}(x^1,x^2)&=\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)-\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)\\ \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}(x^1,x^2)&=\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)-\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2),\quad\forall\alpha\end{aligned}\qquad(2.4)$$

Следовательно, для вектора перемещения произвольной точки слоя α, обозначая его через $\underset{\alpha}{\mathbf{u}}(x^1,x^2,x^3)$, имеем

$$\underset{\alpha}{\mathbf{u}}(x^1,x^2,x^3)=\underset{\alpha}{\mathbf{r}}(x^1,x^2,x^3)-\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2,x^3),\quad\forall\alpha\qquad(2.5)$$

Видно, что в силу (1.1), (2.1) и (2.4) из (2.5) следует

$$\underset{\alpha}{\mathbf{u}}(x^1,x^2,x^3)=(1-x^3)\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}(x^1,x^2)+x^3\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}(x^1,x^2),\quad\forall\alpha\qquad(2.6)$$

В силу (2.4) и (2.5) и (2.6) для вариаций векторов перемещений имеем

$$\delta \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{u}}}(x^1, x^2) = \delta \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{r}}}(x^1, x^2), \quad \sim \in \{-, +\}$$

$$\delta \underset{\alpha}{\mathbf{u}}(x^1, x^2, x^3) = \delta \underset{\alpha}{\mathbf{r}} = (1 - x^3)\delta \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}} + x^3 \delta \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}, \quad \forall\alpha \tag{2.7}$$

2.3. Набла-операторы. Вводятся в рассмотрение свойственные предлагаемым семействам параметризаций семейства набла-операторов. Например, при $\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{S}}{}_{\underset{\alpha}{\underset{g}{\overset{\circ}{(\sim)}}}}$- и $\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{S}}{}_{\underset{\alpha}{\underset{g}{(\sim)}}}$-семействах параметризаций, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall\alpha$, определяются соответственно следующие набла-операторы

$$\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}} \equiv \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\tilde{p}} \partial_p \equiv \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\tilde{p}} \partial / \partial x^p, \qquad \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\nabla}} \equiv \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{p}} \partial_p \equiv \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{p}} \partial / \partial x^p, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \forall\alpha \tag{2.8}$$

2.4. Градиенты места и векторов перемещений и их вариации в отсчетной конфигурации. С помощью, например, набла-операторов (2.8) можно вводить в рассмотрение следующие градиенты места в отсчетной и актуальной конфигурациях

$$\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}} \underset{\beta}{\overset{(\cup)}{\mathbf{r}}} = \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\tilde{p}} \partial_p \underset{\beta}{\overset{(\cup)}{\mathbf{r}}} = \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\tilde{p}} \underset{\beta}{\overset{(\cup)}{\mathbf{r}}}{}_{\tilde{p}}, \quad \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\nabla}} \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\cup)}}{\mathbf{r}}} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{p}} \partial_p \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\cup)}}{\mathbf{r}}} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{p}} \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\cup)}}{\mathbf{r}}}{}_{\tilde{p}}, \quad \cup, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \forall\alpha, \beta \tag{2.9}$$

Нетрудно определить и градиенты векторов перемещений. В самом деле, в силу (2.4) и (2.5) и (2.9) имеем

$$\underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\cup)}}{\nabla}} \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{u}}} = \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\cup)}}{\nabla}} \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{r}}} - \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\cup)}}{\nabla}} \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\mathbf{r}}}, \qquad \underset{\beta}{\overset{(\cup)}{\nabla}} \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{u}}} = \underset{\beta}{\overset{(\cup)}{\nabla}} \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{r}}} - \underset{\beta}{\overset{(\cup)}{\nabla}} \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\mathbf{r}}}, \quad \cup, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \forall\alpha, \beta \tag{2.10}$$

С целью нахождения вариаций от градиентов векторов перемещений в отсчетной конфигурации следует исходить из первого соотношения (2.10). Варьируя его, получаем

$$\delta \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\cup)}}{\nabla}} \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{u}}} = \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\cup)}}{\nabla}} \delta \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{u}}} = \delta \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\cup)}}{\nabla}} \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{r}}} = \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\cup)}}{\nabla}} \delta \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\mathbf{r}}}, \quad \cup, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \forall\alpha, \beta \tag{2.11}$$

Следует отметить, что в отсчетной конфигурации оператор вариации и набла-оператор коммутируют, а в актуальной не коммутируют.

Нетрудно заметить, что в силу (2.6) транспонированные градиенты векторов перемещений в отсчетной конфигурации связаны между собой соотношением

$$\underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}} \underset{\alpha}{\mathbf{u}}{}^T = \left[\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}(x^1, x^2) - \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}(x^1, x^2) \right] \underset{\beta}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\tilde{3}} + (1 - x^3) \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}} \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}{}^T + x^3 \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}} \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}{}^T \tag{2.12}$$

$\sim \in \{-, \emptyset, +\}, \forall\alpha, \beta$

Варьируя (2.12) и учитывая (2.11), получаем

$$\delta \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}} \underset{\alpha}{\mathbf{u}}{}^T = \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}} \delta \underset{\alpha}{\mathbf{u}}{}^T = \left[\delta \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}} - \delta \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}} \right] \underset{\beta}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{3} + (1 - x^3) \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}} \delta \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}{}^T + x^3 \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}} \delta \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}{}^T \tag{2.13}$$

$\sim \in \{-, \emptyset, +\}, \forall\alpha, \beta$

Видно, что представления, например, (2.13) в семействах мультипликативных базисных тензоров будут иметь вид

$$\delta \overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\underset{\beta}{\nabla}} \underset{\alpha}{\mathbf{u}}^T = \left[\overset{\circ}{g}{}^{\tilde{3}}_{\beta\tilde{p}} \left(\delta \overset{(+)}{\underset{\alpha}{u}}{}_{\breve{q}} - \delta \overset{\overset{\circ}{(-)}}{\underset{\alpha}{u}}{}_{\breve{q}} \right) + (1-x^3)\nabla_p \delta \overset{\overset{\circ}{(-)}}{\underset{\alpha}{u}}{}_{\breve{q}} + x^3 \nabla_p \delta \overset{\overset{\circ}{(-)}}{\underset{\alpha}{u}}{}_{\breve{q}} \right] \overset{\circ}{\underset{\alpha\beta}{\mathbf{R}}}{}^{\breve{q}\tilde{p}}_{\cdot\cdot} \tag{2.14}$$

$\cup, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \forall\alpha, \beta$

3. Тензоры напряжений Коши – Лагранжа и Пиолы – Кирхгофа и их представления. Как известно [2, 4, 5], тензор истинных напряжений Коши – Лагранжа определен в актуальной конфигурации и, если не рассматриваются полярные среды, является симметричным тензором. В данном случае его можно представить, например, в виде

$$\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \underset{\alpha}{P}{}^{\tilde{p}\breve{q}}_{\cdot\cdot} \underset{\alpha}{\mathbf{R}}{}^{\cdot\cdot}_{\tilde{p}\breve{q}} = \underset{\alpha\beta}{P}{}^{\tilde{p}\cdot}_{\cdot\breve{q}} \underset{\alpha}{\mathbf{R}}{}^{\cdot\breve{q}}_{\tilde{p}\cdot}, \quad \cup, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \forall\alpha, \beta \tag{3.1}$$

С помощью тензора истинных напряжений Коши – Лагранжа вводятся в рассмотрение и другие тензоры напряжений [2, 4, 5]. В частности, введение тензора условных напряжений Пиолы – Кирхгофа основывается на замене ориентированной площадки в актуальной конфигурации ее прообразом в отсчетной конфигурации [2]. Аналогично (3.1) для тензора напряжений Пиолы – Кирхгофа имеем представление

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} = \overset{\circ}{\underset{\alpha}{P}}{}^{\tilde{p}\breve{q}}_{\cdot\cdot} \overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{R}}}{}^{\cdot\cdot}_{\tilde{p}\breve{q}} = \overset{\circ}{\underset{\alpha\beta}{P}}{}^{\tilde{p}\cdot}_{\cdot\breve{q}} \overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{R}}}{}^{\cdot\breve{q}}_{\tilde{p}\cdot}, \quad \cup, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \forall\alpha, \beta$$

Следует отметить, что для формул Коши, связывающих между собой вектор напряжения на ориентированной площадке и тензор напряжений, имеем

$$\underset{\alpha}{\mathbf{T}}{}^{(l)}_{\alpha} = \underset{\alpha}{\mathbf{l}} \cdot \underset{\tilde{\alpha}}{\mathbf{P}} = \underset{\alpha}{\mathbf{P}} \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{l}} = \underset{\alpha}{\mathbf{T}}{}^{\tilde{p}} \underset{\alpha}{l}{}_{\tilde{p}}, \quad \underset{\alpha}{\mathbf{T}}{}^{\tilde{p}} = \underset{\alpha}{P}{}^{\tilde{p}\breve{q}} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}_{\breve{q}}$$

$$\overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{T}}}{}^{\overset{\circ}{(l)}}_{\alpha} = \overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{l}}} \cdot \overset{\circ}{\underset{\tilde{\alpha}}{\mathbf{P}}} = \overset{\circ}{\underset{\tilde{\alpha}}{\mathbf{P}}}{}^T \cdot \overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{l}}} = \overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{T}}}{}^{\tilde{p}} \overset{\circ}{\underset{\alpha}{l}}{}_{\tilde{p}}, \quad \overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{T}}}{}^{\tilde{p}} = \overset{\circ}{\underset{\alpha}{P}}{}^{\tilde{p}\breve{q}}_{\cdot\cdot} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}_{\breve{q}}$$

$\cup, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \forall\alpha, \beta$

Здесь $\underset{\alpha}{\mathbf{T}}{}^{(l)}_{\alpha}$ и $\overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{T}}}{}^{\overset{\circ}{(l)}}_{\alpha}$ – относящиеся к слою α, векторы напряжения на площадках с нормалями $\underset{\alpha}{\mathbf{l}}$ и $\overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{l}}}$ в отсчетной и актуальной конфигурациях соответственно.

4. Принцип виртуальной работы. В механике сплошной среды этот принцип, отнесенный к отсчетной конфигурации, имеет вид [6]

$$\iiint_{\overset{\circ}{V}} \overset{c}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot\, \delta \overset{c}{\underset{\sim}{\varepsilon}}\, d\overset{\circ}{V} = \iiint_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}(\overset{\circ}{\mathbf{q}} - \mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{r}\, d\overset{\circ}{V} + \iint_{\overset{\circ}{S}} \overset{\circ}{\mathbf{T}}{}^{\overset{\circ}{(l)}} \cdot \delta\mathbf{r}'\, d\overset{\circ}{S} \tag{4.1}$$

где $\overset{c}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}$ и $\overset{c}{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ – сопряженные пары тензоров [5], $\overset{\circ}{\mathbf{q}}$ – плотность массовых сил, а $\mathbf{a}$ – плотность ускорения.

Удельная элементарная работа, если в качестве сопряженных пар тензоров [5] взяты тензор условных напряжений Пиолы – Кирхгофа и градиент места, представится в виде

$$\delta' a = \overset{c}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot\, \delta \overset{c}{\underset{\sim}{\varepsilon}}{}^T = \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot\, (\delta \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r})^T = \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot\, (\overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r})^T = \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot\, (\overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{u})^T \tag{4.2}$$

В силу (4.2) принцип виртуальной работы (4.1) получит вид

$$\iiint_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot (\overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{u})^T d\overset{\circ}{V} = \iiint_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}(\overset{\circ}{\mathbf{q}} - \mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{r} d\overset{\circ}{V} + \iint_{\overset{\circ}{S}} \overset{\circ}{\mathbf{T}}^{(l)} \cdot \delta \mathbf{r}' d\overset{\circ}{S} \tag{4.3}$$

Записывая (4.3) для любого слоя α, будем иметь

$$\iiint_{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{V}}} \underset{\tilde{\alpha}}{\overset{\circ}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot (\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\nabla}} \delta \underset{\alpha}{\mathbf{u}})^T d\underset{\alpha}{\overset{\circ}{V}} = \iiint_{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{V}}} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\rho}} (\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{q}}} - \underset{\alpha}{\mathbf{a}}) \cdot \delta \underset{\alpha}{\mathbf{r}} d\underset{\alpha}{\overset{\circ}{V}} +$$

$$+\iint_{\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\overset{\circ}{S}}}} \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\overset{\circ}{\mathbf{R}}}} \cdot \delta \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{r}}} d \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\overset{\circ}{S}}} + \iint_{\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\overset{\circ}{S}}}} \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\overset{\circ}{\mathbf{R}}}} \cdot \delta \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{r}}} d \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\overset{\circ}{S}}}, \quad \forall \alpha \tag{4.4}$$

где $\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\overset{\circ}{\mathbf{R}}}} \left(\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\overset{\circ}{\mathbf{R}}}} \right)$ – плотность контактных сил, действующих на $\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\overset{\circ}{S}}} \left(\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\overset{\circ}{S}}} \right)$.

С целью получения принципа виртуальной работы в предлагаемой теории следует преобразовать интегралы, входящие в (4.4). В частности, объемные интегралы следует привести к поверхностным. В связи с этим желательно некоторые соотношения из ранее опубликованных работ записать в нужной для рассматриваемого случая форме.

Нетрудно заметить, что для любого слоя α требуемое соотношение[4] можно представить в виде

$$dx^1 dx^2 dx^3 = d \underset{\alpha}{\overset{(\cup)}{\overset{\circ}{V}}} \Big/ \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(\cup)}{\overset{\circ}{g}}}} = \left(d \underset{\alpha}{\overset{(\cap)}{\overset{\circ}{S}}} dx^3 \right) \Big/ \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(\cap)}{g}} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}{}^{\overset{3}{3}\overset{3}{3}}} \Rightarrow d \underset{\alpha}{\overset{(\cap)}{\overset{\circ}{S}}} = \overset{(\cup)}{\underset{(\cap)}{\overset{\circ}{c}}} \, d \underset{\alpha}{\overset{(\cup)}{\overset{\circ}{S}}}$$

$$\overset{(\cup)}{\underset{(\cap)}{\overset{\circ}{c}}} \equiv \sqrt{\left(\underset{\alpha}{\overset{(\cap)}{\overset{\circ}{g}}} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}{}^{\overset{3}{3}\overset{3}{3}} \right) \Big/ \left(\underset{\alpha}{\overset{(\cup)}{\overset{\circ}{g}}} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}{}^{\overset{3}{3}\overset{3}{3}} \right)}, \quad \cap, \cup \in \{-, \emptyset, +\}, \forall \alpha \tag{4.5}$$

Из первого соотношения (4.5) при $\cup = \emptyset$ с учетом (1.17) имеем

$$d\underset{\alpha}{\overset{\circ}{V}} = \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\overset{\circ}{\vartheta}}} \sqrt{\left(\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}{}^{\overset{3}{3}\overset{3}{3}} \right)^{-1}} d \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\overset{\circ}{S}}} = \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\overset{\circ}{\eta}}} d \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\overset{\circ}{S}}}, \quad \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\overset{\circ}{\eta}}} \equiv \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\overset{\circ}{\vartheta}}} \sqrt{\left(\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}{}^{\overset{3}{3}\overset{3}{3}} \right)^{-1}}, \tag{4.6}$$

$\sim \in \{-, \emptyset, +\}, \forall \alpha$

Следует учитывать, что, если многослойная конструкция состоит из N слоев, то на первую внутреннюю (последнюю внешнюю) поверхность могут действовать заданные силы с плотностью $\underset{1}{\overset{(-)}{\overset{\circ}{\mathbf{F}}}} \left(\underset{N}{\overset{(+)}{\overset{\circ}{\mathbf{F}}}} \right)$.

Принимая в качестве основной базовой внутреннюю базовую поверхность $\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\overset{\circ}{S}}}$, $\forall \alpha$, приводя все интегралы в (4.4) с учетом (4.5) и (4.6), кроме второго в правой части, к интегрированию по $\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\overset{\circ}{S}}}$, $\forall \alpha$, и воспользуясь теоремой Стокса, приводящей поверхностный интеграл к контурному, получим искомый принцип виртуальной

[4] См.: *Никабадзе М.У.* К теории оболочек на основе двух базовых поверхностей. М., 1988. 45 с. – Деп. в ВИНИТИ 16.11.88, 8149-В88.

работы

$$\oint_{\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{L}}} \left(\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{M}}{}^{I\breve{n}}\, \delta \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{u}}{}_{\breve{n}} + \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{M}}{}^{I\breve{n}}\, \delta \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{u}}{}_{\breve{n}} \right) \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\nu}}{}_{\bar{I}}\, d \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{s}} =$$

$$= \iint_{\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{S}}} \left[\left(\nabla_I \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{M}}{}^{I\breve{n}} + \underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{3\breve{n}} + \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{H}}{}^{\breve{n}} + \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{X}}{}^{\breve{n}} - \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{W}}{}^{\breve{n}} \right) \delta \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{u}}{}_{\breve{n}} + \right.$$

$$\left. + \left(\nabla_I \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{M}}{}^{I\breve{n}} - \underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{3\breve{n}} + \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{H}}{}^{\breve{n}} + \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{X}}{}^{\breve{n}} - \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{W}}{}^{\breve{n}} \right) \delta \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{u}}{}_{\breve{n}} \right] d \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{S}}, \quad \cup, \in \{-, \emptyset, +\}, \forall\alpha \qquad (4.7)$$

$$\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{M}}{}^{I\breve{n}} = \int_0^1 \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\eta}}\, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{P}}{}^{I\breve{n}} (1 - x^3)\, dx^3, \qquad \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{M}}{}^{I\breve{n}} = \int_0^1 \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\eta}}\, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{P}}{}^{I\breve{n}}\, x^3 dx^3$$

$$\underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{3\breve{n}} = \int_0^1 \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\eta}}\, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{P}}{}^{3\breve{n}} dx^3, \quad \cup \in \{-, \emptyset, +\}, \qquad \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\eta}} = \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\vartheta}} \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}{}_{33}}$$

$$\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\vartheta}} = \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}\, \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{g}}{}^{-1}}, \quad \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}} = \left(\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}_1 \times \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}_2 \right) \cdot \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}_3, \quad \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{g}} = \underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}} \Big|_{x^3=0}, \quad \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{g}} = \underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}} \Big|_{x^3=1}$$

$$\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\mathbf{X}}} = \int_0^1 \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\eta}}\, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\rho}}\, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{q}}} (1 - x^3)\, dx^3, \qquad \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{\mathbf{X}}} = \int_0^1 \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\eta}}\, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\rho}}\, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{q}}}\, x^3 dx^3, \qquad \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\mathbf{H}}} = \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\mathbf{R}}}$$

$$\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{\mathbf{H}}} = \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(\mp)}}{c}}\, \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{\mathbf{R}}}, \qquad \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\mathbf{W}}} = \int_0^1 \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\eta}}\, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\rho}}\, \underset{\alpha}{\mathbf{a}}{}^{\alpha} (1 - x^3)\, dx^3, \qquad \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{\mathbf{W}}} = \int_0^1 \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\eta}}\, \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\rho}}\, \underset{\alpha}{\mathbf{a}}{}^{\alpha} x^3 dx^3, \quad \forall\alpha$$

5. Динамические уравнения и межслойные контактные и граничные условия.

В силу произвольности вариаций векторов перемещений $\delta \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}$ и $\delta \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}$, $\forall\alpha$, из (4.7) получаем искомые уравнения

$$\begin{aligned} &\nabla_I \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{M}}{}^{I\breve{n}} + \underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{3\breve{n}} + \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{H}}{}^{\breve{n}} + \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{X}}{}^{\breve{n}} - \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{W}}{}^{\breve{n}} = 0 \\ &\nabla_I \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{M}}{}^{I\breve{n}} + \underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{3\breve{n}} + \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{H}}{}^{\breve{n}} + \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{X}}{}^{\breve{n}} - \underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{W}}{}^{\breve{n}} = 0, \quad \cup \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall\alpha \end{aligned} \qquad (5.1)$$

К уравнениям (5.1) следует присоединять условия, учитывающие характер межслойных контактов. Например, если конструкция состоит из N слоев, то в случае полного контакта между слоями, будем иметь

$$\underset{1}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\mathbf{R}}} = \underset{1}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\mathbf{F}}}, \quad \underset{1}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}} = \underset{1}{\overset{(-)}{\mathbf{U}}}{}_0, \quad \underset{N}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{\mathbf{R}}} = \underset{N}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{\mathbf{F}}}, \quad \underset{N}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{\mathbf{u}}} = \underset{N}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{\mathbf{U}}}{}_0$$

$$\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\mathbf{R}}} + \underset{\alpha-1}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{\mathbf{R}}} = 0, \quad \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}} = \underset{\alpha-1}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}, \quad \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}} = \underset{\alpha+1}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}} \quad (\alpha = 2, 3, \ldots, N)$$

где $\underset{1}{\overset{(-)}{\mathbf{U}}}{}_0$ ($\underset{N}{\overset{(+)}{\mathbf{U}}}{}_0$) – заданный вектор перемещения внутренних точек поверхности $\underset{1}{\overset{\overset{\circ}{(-)}}{S}}$ ($\underset{N}{\overset{\overset{\circ}{(+)}}{S}}$).

В зависимости от характера наложенных связей на $\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}$, $\forall\alpha$, из (4.7) следуют и граничные условия. Действительно, например, смешанные граничные условия будут иметь вид

$$
\begin{gathered}
\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{M}}{}^{I\breve{n}}\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\nu}}{}_{\bar{I}} = \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{Q}}{}^{\breve{n}} \ \text{на}\ \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}{}_{I},\quad \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}} = \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}{}_0 \ \text{на}\ \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}{}_{II}\\
\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{M}}{}^{I\breve{n}}\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\nu}}{}_{\bar{I}} = \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{Q}}{}^{\breve{n}} \ \text{на}\ \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}}{}_{I},\quad \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}} = \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}{}_0 \ \text{на}\ \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}}{}_{II}\\
\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}} = \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}{}_{I} \bigcup \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}{}_{II},\quad \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}} = \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}}{}_{I} \bigcup \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}}{}_{II},\quad \cup \in \{-, \varnothing, +\},\ \forall\alpha
\end{gathered}
\tag{5.2}
$$

Нетрудно выписать также граничные условия как при жестком защемлении краев, так и при свободных краях. При жестком защемлении краев будем иметь

$$
\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}} = 0 \ \text{на}\ \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}},\quad \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}} = 0 \ \text{на}\ \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}},\ \forall\alpha
\tag{5.3}
$$

а при свободных краях получаем

$$
\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{M}}{}^{I\breve{n}}\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\nu}}{}_{\bar{I}} = 0 \ \text{на}\ \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}},\quad \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{M}}{}^{I\breve{n}}\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\nu}}{}_{\bar{I}} = 0 \ \text{на}\ \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}},\quad \cup \in \{-, \varnothing, +\},\ \forall\alpha
\tag{5.4}
$$

Уравнения (5.1) и граничные условия (5.2), (5.3) и (5.4) можно представить в краткой форме. Умножая первое соотношение (5.1) на $1 - x^3$, а второе на x^3, $\forall x^3 \in [0, 1]$ и складывая полученные соотношения почленно, получим

$$
\nabla_I \underset{\alpha}{\overset{\circ}{M}}{}^{I\breve{n}} + (1 - 2x^3)\underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{3\breve{n}} + \underset{\alpha}{\overset{\circ}{H}}{}^{\breve{n}} + \underset{\alpha}{\overset{\circ}{X}}{}^{\breve{n}} - \underset{\alpha}{\overset{\circ}{W}}{}^{\breve{n}} = 0
$$

$\cup \in \{-, \varnothing, +\}, \forall\alpha, \quad \forall x^3 \in [0, 1]$

$$
\underset{\alpha}{\overset{\circ}{M}}{}^{I\breve{n}} = (1 - x^3)\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{M}}{}^{I\breve{n}} + x^3\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{M}}{}^{I\breve{n}},\qquad \underset{\alpha}{\overset{\circ}{H}}{}^{\breve{n}} = (1 - x^3)\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{H}}{}^{\breve{n}} + x^3\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{H}}{}^{\breve{n}}
$$

$$
\underset{\alpha}{\overset{\circ}{X}}{}^{\breve{n}} = (1 - x^3)\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{X}}{}^{\breve{n}} + x^3\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{X}}{}^{\breve{n}},\qquad \underset{\alpha}{\overset{\circ}{W}}{}^{\breve{n}} = (1 - x^3)\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{W}}{}^{\breve{n}} + x^3\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{W}}{}^{\breve{n}}
$$

$\cup \in \{-, \varnothing, +\}, \forall\alpha, \quad \forall x^3 \in [0, 1]$

Аналогично из (5.2), (5.3) и (5.4) имеем соответственно

$$
\underset{\alpha}{\overset{\circ}{M}}{}^{I\breve{n}}\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\nu}}{}_{\bar{I}} = \underset{\alpha}{\overset{\circ}{Q}}{}^{\breve{n}} \ \text{на}\ \underset{\alpha}{\overset{\circ}{L}}{}_{I},\quad \underset{\alpha}{\mathbf{u}} = \underset{\alpha}{\mathbf{u}}{}_0 \ \text{на}\ \underset{\alpha}{\overset{\circ}{L}}{}_{II}
$$

$$
\underset{\alpha}{\mathbf{u}} = 0 \ \text{на}\ \underset{\alpha}{\overset{\circ}{L}},\quad \underset{\alpha}{\overset{\circ}{M}}{}^{I\breve{n}}\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\nu}}{}_{\bar{I}} = 0 \ \text{на}\ \underset{\alpha}{\overset{\circ}{L}},\quad \cup \in \{-, \varnothing, +\}
$$

$$
\underset{\alpha}{\mathbf{u}}{}_0 = (1 - x^3)\,\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}{}_0 + x^3\,\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}{}_0,\qquad \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{Q}}} = (1 - x^3)\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\mathbf{Q}}} + x^3\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{\mathbf{Q}}}
$$

$$
\underset{\alpha}{\overset{\circ}{L}}{}_{I} = (1 - x^3)\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}{}_{I} + x^3\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}}{}_{I},\qquad \underset{\alpha}{\overset{\circ}{L}}{}_{II} = (1 - x^3)\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}{}_{II} + x^3\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}}{}_{II}
$$

$$
\underset{\alpha}{\overset{\circ}{L}} = \underset{\alpha}{\overset{\circ}{L}}{}_{I} \bigcup \underset{\alpha}{\overset{\circ}{L}}{}_{II} = (1 - x^3)\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}} + x^3\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}},\quad \forall\alpha,\quad \forall x^3 \in [0, 1]
$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.
2. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
4. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды: М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
5. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
6. *Никабадзе М.У.* Новая кинематическая гипотеза и новые уравнения движения и равновесия теорий оболочек и плоских криволинейных стержней // Вестн. МГУ. Сер. Математика. Механика. 1991. № 6. С. 54–61.

Москва

Поступила в редакцию
19.09.2000