

УДК 539.375

© 2001 г. **В.Ю. КИБАРДИН, В.Н. КУКУДЖАНОВ**

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТИНУАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ В УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ

Модели вязкопластических сред широко используются для исследования технологических процессов обработки металлов давлением. Первые работы в этом направлении были выполнены А.А. Ильюшиным [1]. В последние годы проявляется большой интерес к моделированию процессов разрушения в вязкопластических материалах как при технологических операциях, так и при использовании их в конструкциях [2, 3].

В основу настоящего исследования положена модель обобщенного упруго-вязкопластического материала, предложенная в работе [4], учитывающая наличие в материале микродефектов, их развитие, приводящее к разрушению материала.

Процесс вязкопластического деформирования предполагается происходящим в виде 2-х последовательных стадий. На первой стадии происходит вязкопластическое течение, которое сопровождается ростом остаточных напряжений и трансляционным упрочнением материала. На второй стадии на межзеренных границах кристаллов зарождаются и начинают расти микропоры. Это приводит к релаксации внутренних напряжений и к появлению пористости, к уменьшению эффективного предела текучести материала. На этой стадии, непосредственно предшествующей макроразрушению, в материале появляются полосы локализации пластических деформаций, которые, распространяясь, приводят к потере несущей способности конструкции.

Полная система определяющих уравнений этой модели записывается через макропараметры сплошной среды и связывает тензоры активных и остаточных напряжений с тензорами скоростей вязкопластических деформаций и повреждаемости. Показано, что эта система уравнений приводит к корректной математической постановке краевых задач не только на стадии упрочнения материала, но и при его разупрочнении [4, 5]. Для численного моделирования процессов разрушения в работе предлагается новый численный метод решения многомерных задач для вязкопластических уравнений при наличии разупрочнения, основанный на расщеплении или декомпозиции сложных реологических уравнений на простейшие составляющие. Этот метод хорошо зарекомендовал себя при решении подобных, но более простых упругопластических и вязкопластических уравнений [6, 7] и оказался весьма эффективным и при решении существенно более сложной полной системы уравнений, рассматриваемой в настоящей работе. Метод применен к решению квазистатических плоских и осесимметричных задач при использовании конечноэлементной дискретизации основных уравнений в слабой формулировке.

Решены задачи о разрушении растягиваемого цилиндрического образца, ослабленного небольшим вырезом, возмущающим однородное напряженно-деформированное состояние, под действием постоянной нагрузки, действующей на торцах цилиндра и при постоянной скорости перемещения торцов. Исследован характер локализации пластических деформаций, построены картины развития зон порообразования и разрушения.

Основные уравнения модели. Приведем полную систему определяющих уравнений, выраженную через макровеличины, предложенную в работах [4, 5] на основе феноменологической теории дислокаций и развития микродефектов, и дадим краткий комментарий к ним, поясняющий их сущность.

Упруговязкопластическое деформирование материала состоит из 2-х последовательных стадий. На первой стадии за счет движения дислокаций и их аккумуляции на межзеренных границах происходит вязкопластическое течение материала с одновременным ростом остаточных напряжений, которое приводит к кинематическому упрочнению материала. Эта стадия описывается следующими уравнениями:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \frac{Ds_{ij}}{Dt} + f[\gamma^p] \frac{\bar{\Psi}[T'_2 - \tau'_s]}{T'_2} \tau'_{ij}, \quad \sigma_{ii} = 3K\epsilon_{ii}$$

где $\gamma_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\epsilon_{kk}$ – девиатор тензора деформаций, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}$ – девиатор тензора напряжений, $\gamma_{ij}^p = \gamma_{ij} - \gamma_{ij}^e$ – девиатор тензора пластических деформаций, $\gamma^p = (\gamma_{ij}^p \gamma_{ij}^p)^{1/2}$, σ_{ij}^r – тензор остаточных напряжений, $\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^r$ – тензор активных напряжений, $\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}$, $T'_2 = (\tau'_{ij} \tau'_{ij})^{1/2}$:

$$\bar{\Psi}[z] = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \Psi[z], & z \geq 0 \end{cases}$$

Остаточные напряжения σ_{ij}^r определяются на основе экспериментальных данных по эффекту Баушингера и в первом приближении выражаются линейной зависимостью

$$\dot{s}_{ij}^r = 2\alpha \dot{\gamma}_{ij}^p, \quad \sigma_{kk}^r = 0$$

где $\dot{s}_{ij}^r$ – девиатор тензора остаточных напряжений, α – модуль кинематического упрочнения материала.

Функция $f[\gamma^p]$ характеризует зависимость времени релаксации материала от интенсивности пластической деформации, которой в первом приближении можно пренебречь и положить $f[\gamma^p] \equiv 1$, μ и K – упругие постоянные материала, τ_s – предел упругости.

$Ds_{ij}/Dt = \dot{s}_{ij} + \Omega_{ik}s_{kj} + \Omega_{ki}s_{jk}$ – производная по Яуманну.

$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i})$, v_i – скорости частиц материала.

Точкой обозначена материальная производная по времени t .

Вторая стадия наступает, когда интенсивность остаточных напряжений $s_2^r = (s_{ij}^r s_{ij}^r)^{1/2}$ достигает некоторого предельного значения $s_2^r \geq s_0^r$, тогда в материале образуются поры с начальной пористостью ρ_0 и происходит их рост с ростом объемной пластической деформации. Кроме того, повреждаемость материала, связанная с аннигиляцией дислокаций, приводит к релаксации остаточных напряжений, которые теперь определяются из уравнения

$$\dot{s}_{ij}^r + \frac{\bar{\Phi}[s_2^r - s_0^r]}{s_2^r} s_{ij}^r = 2\alpha \dot{\gamma}_{ij}^p$$

где $\bar{\Phi}[z]$ – функция, характеризующая релаксацию остаточных напряжений. Теперь материал состоит из матрицы и пор и представляет собой двухфазную среду, харак-

теристики которой могут быть определены, если известны свойства матрицы материала и форма пор, на основе микромеханики. Считая, что поры имеют форму, близкую к сферической, а матрица упруговязкопластическая, получаем следующее условие пластичности для эффективного материала [4, 8]:

$$F[\tau_{ij}, \rho, T_s] = \frac{3}{2} \frac{\tau'_{ij}\tau'_{ij}}{T_s^2} + 2\rho q_1 \operatorname{ch} \left[\frac{3q_2}{2} \frac{\tau_{kk}}{T_s} \right] - (1 + q_1^2 \rho^2)$$

где q_1, q_2 – подгоночные параметры порядка единицы, ρ – пористость, T_s – предел упругости матрицы пористого упруговязкопластического материала, который определяется из условия равенства пластичной работы для матрицы и эффективного материала

$$\tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = (1 - \rho) \dot{\gamma}^p (\tau_s [\gamma^p] + \Psi^{-1} [\dot{\gamma}^p]), \quad T_s = \tau_s [\gamma^p] + \Psi^{-1} [\dot{\gamma}^p] \quad (1)$$

Здесь $\dot{\gamma}^p$ – интенсивность скорости вязкопластической деформации матрицы. Из первого уравнения определяется γ^p , после чего из второго находим T_s . Активные напряжения τ_{ij} и скорости диссипативных деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ в эффективном материале связаны ассоциированным законом пластического течения

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}}$$

если ассоциативный закон имеет место для материала матрицы. Параметр Λ определяется из уравнения (1):

$$\Lambda = \frac{T_s}{\tau} \Psi[T_s - \tau_s[\gamma^p]] \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}} \tau_{ij} \right)^{-1} (1 - \rho)$$

Характеристики тензора аннигиляции b_{ij} связаны с повреждаемостью среды. Девiatorная часть этого тензора b'_{ij} связана с девiatorом деформации разрушения и приводит к релаксации остаточных напряжений. Шаровая часть b_{ii} пропорциональна объемной деформации разрушения $b_{ii} = \dot{\epsilon}_{ii}^p$ и связана с пористостью ρ [4].

Из уравнения неразрывности следует уравнение для пористости $\rho = \Delta V_n / V$

$$\dot{\rho} = (1 - \rho) \dot{\epsilon}_{kk}^p = \Lambda \frac{3\rho(1 - \rho)}{T_s} q_1 q_2 \operatorname{sh} \left[\frac{3q_2 \sigma_{kk}}{2T_s} \right]$$

которое замыкает систему определяющих уравнений.

Таким образом, полная система уравнений данной модели для случая малых деформаций имеет вид:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} f_i \delta U_i d\Omega + \int_{S_{\Omega}} g_i \delta U_i dS$$

$$\dot{s}_{ij} = 2\mu(\dot{\gamma}_{ij} - \dot{\gamma}_{ij}^p), \quad \dot{\sigma}_{ii} = 3K(\dot{\epsilon}_{ii} - \dot{\epsilon}_{ii}^p)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = (1 - \rho) \dot{\gamma}^p T_s \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}} \tau_{ij} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}}$$

$$\dot{\gamma}^p = \bar{\Psi}[T_s - \tau_s], \quad \dot{\rho} = (1 - \rho) \dot{\epsilon}_{ii}^p, \quad \tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = (1 - \rho) \dot{\gamma}^p T_s \quad (2)$$

$$\dot{s}_{ij}^r = 2\alpha \dot{\gamma}_{ij}^p - \frac{\Phi[s_2^r - s_o^r]}{s_r^2} s_{ij}^r, \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^r, \quad \sigma_{ii}^r = 0$$

Для расчетов было принято, что процессы релаксации активных и остаточных напряжений характеризуются степенными функциями

$$\overline{\Psi}[T_s - \tau_s] = \begin{cases} C_1(T_s - \tau_s)^n, & T_s > \tau_s \\ 0, & T_s \leq \tau_s \end{cases}, \quad \overline{\Phi}[s_2^r - s_0^r] = \begin{cases} C_2(s_2^r - s_0^r)^m, & s_2^r > s_0^r \\ 0, & s_2^r \leq s_0^r \end{cases}$$

где C_1 , τ_s , n , C_2 , s_0^r , m — константы материала.

Метод решения. При численном решении (2) расчет пластической деформации на каждой итерации вычислительного процесса будет проходить в 2 этапа, на первом этапе по приложенным нагрузкам будут вычисляться мгновенные упругие приращения деформаций и напряжений, на втором этапе будет происходить вязкопластическая релаксация этих величин.

Проведем расщепление системы определяющих уравнений по физическим процессам. Уравнение $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \Lambda \partial F / \partial \tau_{ij}$ заменим уравнениями относительно объемных и девиаторных компонент

$$\dot{\epsilon}_{kk}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \tau_{kk}} = 9\Lambda \frac{q_1 q_2 \rho}{T_s} \operatorname{sh} \left[\frac{3q_2}{2} \frac{\tau_{kk}}{T_s} \right], \quad \dot{\gamma}_{ij}^p = 3\Lambda \frac{\tau'_{ij}}{T_s^2}$$

$$\Lambda \equiv (1 - \rho) \dot{\gamma}^p T_s \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}} \tau_{ij} \right)^{-1} = H[T_s - \tau_s] \frac{C_1 T_s^3 (T_s - \tau_s)^n (1 - \rho)}{3\tau'_{ij} \tau'_{ij} + 3T_s \tau_{kk} q_1 q_2 \rho \operatorname{sh}[\frac{3}{2} q_2 (\tau_{kk} / T_s)]}$$

где $H[z]$ — функция Хэвисайда. Система определяющих уравнений примет вид:

$$\dot{s}_{ij} = 2\mu(\dot{\gamma}_{ij} - \dot{\gamma}_{ij}^p), \quad \dot{\sigma}_{kk} = 3K(\dot{\epsilon}_{kk} - \dot{\epsilon}_{kk}^p)$$

$$\dot{\gamma}_{ij}^p = 3\Lambda \frac{\tau'_{ij}}{T_s^2}, \quad \dot{\epsilon}_{kk}^p = 9\Lambda \frac{q_1 q_2 \rho}{T_s} \operatorname{sh} \left[\frac{3q_2}{2} \frac{\tau_{kk}}{T_s} \right]$$

$$\dot{\rho} = (1 - \rho) \dot{\epsilon}_{kk}^p, \quad \dot{s}_{ij}^r = 2\alpha \dot{\gamma}_{ij}^p - H[s_2^r - s_0^r] \frac{C_2 (s_2^r - s_0^r)^m}{s_2^r} s_{ij}^r \quad (3)$$

$$\sigma_{kk}^r = 0, \quad \tau'_{ij} = s_{ij} - s_{ij}^r, \quad \tau_{kk} = \sigma_{kk}$$

Интегрирование определяющих уравнений по времени проводится методом расщепления [6, 7].

Систему (3) расщепляем на 4 системы:

1. Система, описывающая мгновенные упругие приращения напряжений и полных деформаций

$$\dot{s}_{ij} = 2\mu \dot{\gamma}_{ij}, \quad \dot{\sigma}_{kk} = 3K \dot{\epsilon}_{kk} \quad (4)$$

2. Система, описывающая релаксацию остаточных напряжений, за счет аннигиляции дислокаций на границах кристаллов

$$\dot{\tau}'_{ij} = -\dot{s}_{ij}^r, \quad \dot{s}_{ij}^r = -H[s_2^r - s_0^r] \frac{C_2 (s_2^r - s_0^r)^m}{s_2^r} s_{ij}^r \quad (5)$$

3. Система, описывающая рост объемной компоненты тензора пластических деформаций, пористости и релаксацию объемных компонент тензоров полных и активных напряжений

$$\dot{\sigma}_{kk} = -3K \dot{\epsilon}_{kk}^p, \quad \dot{\rho} = (1 - \rho) \dot{\epsilon}_{kk}^p$$

$$\dot{\epsilon}_{kk}^p = 3H[T_s - \tau_s] \frac{C_1 q_1 q_2 T_s^2 (T_s - \tau_s)^n \rho (1 - \rho) \operatorname{sh}[\frac{3}{2} q_2 (\tau_{kk} / T_s)]}{\tau'_{ij} \tau'_{ij} + T_s \tau_{kk} q_1 q_2 \rho \operatorname{sh}[\frac{3}{2} q_2 (\tau_{kk} / T_s)]}, \quad \tau_{kk} = \sigma_{kk} \quad (6)$$

4. Система, описывающая рост девиаторных компонент тензора пластической деформации и релаксацию девиаторных компонент тензоров полных и активных напряжений за счет движения дислокаций и накопления их на границах кристаллов

$$\dot{s}_{ij} = -2\mu\dot{\gamma}_{ij}^p, \quad \dot{\gamma}_{ij}^p = H[T_s - \tau_s] \frac{C_1 T_s (T_s - \tau_s)^n (1 - \rho) \tau'_{ij}}{\tau'_{ij} \tau'_{ij} + T_s \tau_{kk} q_1 q_2 \rho \operatorname{sh}[\frac{3}{2} q_2 (\tau_{kk} / T_s)]} \quad (7)$$

$$\dot{s}'_{ij} = 2\alpha \dot{\gamma}_{ij}^p, \quad \tau'_{ij} = s_{ij} - s'_{ij}$$

Значения компонент тензоров, найденные при решении системы (4), будут использоваться в качестве начальных условий для системы (5), в свою очередь, значения, полученные при решении системы (5), будут использоваться в качестве начальных для системы (6), и, наконец, значения, полученные после решения системы (6), будут использоваться в качестве начальных для системы (7).

Приведем вкратце используемые формулы численного решения систем (5) – (7).

Система (5) решается аналитически. При $s'_2 \leq s'_0$ $s'_{ij} = s'_{ij0}$, $\tau'_{ij} = \tau'_{ij0}$, где s'_{ij0} , τ'_{ij0} – начальные значения. При $s'_2 > s'_0$ имеем

$$\tau'_{ij} = -s'_{ij}, \quad s'_{ij} = -\frac{C_2 (s'_2 - s'_0)^m}{s'_2} s'_{ij}$$

Учитывая, что $s'_2 = (s'_{ij} s'_{ij})^{1/2}$, получим $s'_2 = -C_2 (s'_2 - s'_0)^m$. Это уравнение имеет решения:

$$s'_2 = s'_0 + (s'_{20} - s'_0) \exp[-C_2 \Delta t] \quad \text{для } m = 1$$

$$s'_2 = s'_0 + ((s'_{20} - s'_0)^{1-m} - C_2 \Delta t (1-m))^{1/(1-m)} \quad \text{для } m \neq 1.$$

Далее для отдельных компонент тензора остаточных напряжений получаем

$$\frac{s'_{ij}}{s'_{ij0}} = \frac{s'_2}{s'_{20}} = -\frac{C_2 (s'_2 - s'_0)^m}{s'_2}, \quad s'_{ij} = \frac{s'_2}{s'_{20}} s'_{ij0}, \quad \tau'_{ij} = \tau'_{ij0} + s'_{ij0} - s'_{ij}$$

В случае $m = 1$ величина $\tau_2 = 1/C_2$ является характерным временем релаксации остаточных напряжений, ее значение нужно учитывать при подборе шага по времени для обеспечения достаточной точности численных расчетов. При решении систем (6) и (7) для случая $F[\tau'_{ij}, \tau_{kk}, \rho, \tau_s] > 0$, T_s находится численным решением уравнения

$$F[\tau'_{ij}, \tau_{kk}, \rho, T_s] = 0 \quad (8)$$

по методу Ньютона. При решении системы (6) фиксируются компоненты девиаторов: тогда $\tau'_{ij} = \tau'_{ij0}$ и из условия (8) получаем $T_s = T_s(\tau_{kk})$. При решении системы (7), соответственно, фиксируются объемные компоненты тензоров: тогда $\tau_{kk} = \tau_{kk0}$, $\rho = \rho_0$ и из условия (8) получаем $T_s = T_s((\tau'_{ij} \tau'_{ij})^{1/2})$.

Система (6) сводится к решению уравнения

$$\tau_{kk} = -3K\epsilon_k^p = -9H[T_s - \tau_s] \frac{KC_1 q_1 q_2 T_s^2 (T_s - \tau_s)^n \rho (1 - \rho) \operatorname{sh}[\frac{3}{2} q_2 (\tau_{kk} / T_s)]}{\tau'_{ij} \tau'_{ij} + T_s \tau_{kk} q_1 q_2 \rho \operatorname{sh}[\frac{3}{2} q_2 (\tau_{kk} / T_s)]}$$

или

$$\tau_{kk} = \Lambda_1[\tau_{kk}, T_s[\tau_{kk}], \rho[\tau_{kk}]]$$

Для численного решения заменяем дифференциальное уравнение на разностное

$$\frac{\tau_{kk} - \tau_{kk0}}{\Delta t} = \Lambda_1 \left[\frac{\tau_{kk} + \tau_{kk0}}{2}, T_s \left[\frac{\tau_{kk} + \tau_{kk0}}{2} \right], \rho \left[\frac{\tau_{kk} + \tau_{kk0}}{2} \right] \right]$$

Разностное уравнение решается по методу Ньютона.

Для решения системы (7) исключаем сначала γ_{ij}^p :

$$\dot{\tau}_{ij}' = -2(\mu + \alpha) \dot{\gamma}_{ij}^p = -2(\mu + \alpha) H[T_s - \tau_s] \frac{C_1 T_s (T_s - \tau_s)^n (1 - \rho) \tau_{ij}'}{\tau_{ij}' \tau_{ij}' + T_s \tau_{kk} q_1 q_2 \rho \operatorname{sh}[\frac{3}{2} q_2 (\tau_{kk} / T_s)]}$$

Т.е. получаем уравнение вида $\dot{\tau}_{ij}' = \Lambda_2 [T_2'] \tau_{ij}'$, где $T_2 = (\tau_{ij}' \tau_{ij}')^{1/2}$. Отсюда следует

$$\dot{T}_2' = \frac{\tau_{ij}' \dot{\tau}_{ij}'}{(\tau_{ij}' \tau_{ij}')^{1/2}} = \Lambda_2 [T_2'] T_2', \quad \frac{\dot{\tau}_{ij}'}{\tau_{ij}'} = \frac{\dot{T}_2'}{T_2'} = \Lambda_2 [T_2'], \quad \frac{\tau_{ij}'}{\tau_{ij0}'} = \frac{T_2'}{T_{20}'}$$

Здесь τ_{ij0}' , T_{20}' — начальные значения компонент девиатора тензора активных напряжений и его второго инварианта.

Решение системы (7), таким образом, сводится к решению уравнения

$$\dot{T}_2' = -2(\mu + \alpha) H[T_s - \tau_s] \frac{C_1 T_s (T_s - \tau_s)^n (1 - \rho) T_2'}{\tau_{ij}' \tau_{ij}' + T_s \tau_{kk} q_1 q_2 \rho \operatorname{sh}[\frac{3}{2} q_2 (\tau_{kk} / T_s)]}$$

или

$$\dot{T}_2' = \Lambda_2 [T_2', T_s [T_2']] T_2'$$

Для численного решения заменяем дифференциальное уравнение на разностное

$$\frac{T_2' - T_{20}'}{\Delta t} = \Lambda_2 \left[\frac{T_2' + T_{20}'}{2}, T_s \left[\frac{T_2' + T_{20}'}{2} \right] \right] \frac{T_2' + T_{20}'}{2}$$

Разностное уравнение решается по методу Ньютона.

В случае $n = 1$ величина $\tau_1 = 1/(2C_1(\mu + \alpha))$ является характерным временем релаксации активных напряжений, ее значение нужно учитывать при подборе шага по времени для обеспечения достаточной точности численных расчетов.

Применяемая здесь схема расщепления для каждого подшага является неявной и безусловно устойчивой, поэтому этим свойством обладает и полная схема интегрирования определяющих уравнений. Но хотя схема в вычислительном плане устойчива, она не может гарантировать достаточную точность расчета при произвольно большом шаге по времени, поэтому в практическом расчете необходимо накладывать ограничение на временной шаг. Этот выбор тесно связан с величинами временных констант τ_1 , τ_2 , входящих в определяющие уравнения. Величина относительного приращения интенсивности вязкопластической деформации $\Delta \varepsilon^p / \varepsilon^p$ должна быть ограничена в каждой гауссовой точке определенной константой. Шаг Δt выбирается из условия

$$(\dot{\varepsilon}_{ij}^n \dot{\varepsilon}_{ij}^n)^{1/2} \Delta t_n \leq (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij})^{1/2} \tau_*, \quad \Delta t_n \leq \tau_* \min_x \left[\frac{(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij})^{1/2}}{(\dot{\varepsilon}_{ij}^n \dot{\varepsilon}_{ij}^n)^{1/2}} \right]$$

Где τ_* в зависимости от задачи в практическом расчете может изменяться в интервале 0.5–2.0.

Если схема расчета явная, то для нее работает ограничение на шаг, связанное с устойчивостью, а не с точностью, и Δt в этом случае меньше, чем по неявной схеме. Теоретическая оценка для упруговязкопластического материала в одномерных динамических задачах дает условие, что $\Delta t \delta \leq 1$ [10], где $\delta = E/(\tau_0 \sigma_s)$.

Перейдем теперь к описанию численного решения полной системы (2). Решение проводилось с использованием метода конечных элементов. Запишем принцип возможных перемещений в терминах метода конечных элементов

$$\int_{\Omega} B^T \sigma d\Omega = \int_{\Omega} N^T F d\Omega + \int_{S_{\Omega}} N^T g dS \quad (9)$$

$$\Delta \epsilon = B \Delta d, \quad \Delta \sigma = D \Delta \epsilon^e, \quad K = B^T D B \quad (10)$$

Здесь d – вектор узловых перемещений; ϵ , ϵ^e , ϵ^p – вектора полной, упругой и пластической деформаций в гауссовых узлах элементов; F , g – вектора объемных и поверхностных сил в узлах элементов; σ – вектор напряжений в гауссовых узлах; N – матрица значений функций формы в гауссовых узлах; B – матрица производных функций формы в гауссовых узлах, связывающая вектор перемещений d и вектор деформаций ϵ ; K – матрица жесткости; D – матрица упругих модулей, связывающая вектор упругих деформаций ϵ^e и вектор напряжений σ .

Приведем численное решение для двумерной осесимметричной задачи. Область, на которой строилось решение, разбивалась на криволинейные изопараметрические восьмиузловые серендиповы элементы. Интегралы по области решения и по ее границе рассчитывались по формулам Гаусса, поэтому знак интеграла по области или по границе области в уравнении принципа возможных перемещений следует понимать как гауссову сумму. В связи с этим, кроме вектора узловых перемещений, вычислялись так же вектора пластических деформаций и напряжений в гауссовых узлах элементов.

Принимая во внимание соотношения (10), перепишем уравнение (9) через приращения на шаге

$$\Delta f \equiv \int_{\Omega} N^T \Delta F d\Omega + \int_{S_{\Omega}} N^T \Delta g dS$$

$$\int_{\Omega} B^T D \Delta \epsilon^e d\Omega = K \Delta d - \int_{\Omega} B^T D \Delta \epsilon^p d\Omega = \Delta f$$

Пусть задано приращение нагрузки Δf , которому соответствует шаг по времени Δt , и известны начальные значения векторов d^0 , σ^0 , $\epsilon^p{}^0$, σ^0 . Пользуясь методом расщепления определим в каждом гауссовом узле $\Delta \epsilon^p$ как функцию Δd следующим образом:

1. Находим упругое приращение нагрузки $\sigma = \sigma^0 + D B \Delta d$;
2. Используем σ^0 и $\tau = \sigma - \sigma^0$ в качестве начальных условий для системы (5), и решаем ее в каждом гауссовом узле описанным способом, получая новые значения τ , σ' ;
3. Используем новые значения τ , σ' а также $\epsilon^p{}^0$ в качестве входных данных для системы (6), решая ее описанным способом, находим новые значения τ , σ' , ϵ^p ;
4. Используем найденные значения τ , σ' , ϵ^p в качестве входных данных для системы (7), решая ее находим окончательные значения τ , σ' , ϵ^p ;
5. Находим приращения $\Delta \tau$, $\Delta \sigma'$, $\Delta \epsilon^p$, как разности между полученными значениями τ , σ' , ϵ^p и начальными значениями τ^0 , σ'^0 , $\epsilon^p{}^0$.

Введя таким образом зависимость $\Delta \epsilon^p(\Delta d)$, можем записать

$$K \Delta d - \int_{\Omega} B^T D \Delta \epsilon^p(\Delta d) d\Omega = \Delta f \quad (11)$$

Замкнутая нелинейная система (11) решалась относительно Δd с помощью метода

упругих решений:

$$\Delta d_n = K^{-1} (\Delta f + \int_{\Omega} B^T D \Delta \epsilon^p (\Delta d_{n-1}) d\Omega)$$

Этот итерационный процесс сходится, пока конструкция остается неразрушенной. Предлагаемая модель включает в себя определенный критерий разрушения материала, который необходим для определения несущей способности конструкций. В настоящей работе за такой критерий принимается условие достижения в частице материала критического значения пористости $\rho = \rho_*$. Это критическое значение $\rho = \rho_*$ зависит от многих внешних и внутренних факторов: температуры, скорости нагружения, структуры материала и, как показывают эксперименты, изменяется в пределах 0.1–0.5 [11]. После того, как ρ достигает своего критического значения в некоторой гауссовой точке изопараметрического элемента, материал в этой точке считается полностью разрушенным, и это обстоятельство учитывается в дальнейшем расчете при составлении глобальной матрицы жесткости. Вклад в жесткость разрушенного элемента в соответствующей гауссовой точке полагается равным нулю. По мере распространения разрушения жесткость глобальной матрицы падает, и, в определенный момент, происходит полная потеря несущей способности конструкции, которой соответствуют слишком большие изменения приращения вязкопластической деформации. При этом якобиан матрицы жесткости стремится к нулю и наступает расходимость итерационного процесса.

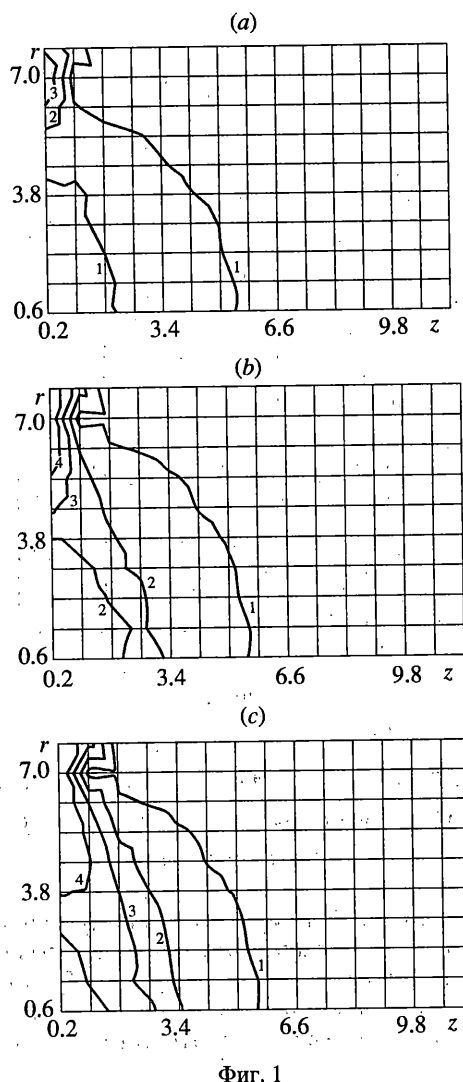
Примеры расчета. Рассмотрим задачу о разрушении цилиндрического образца с дефектом в виде небольшого кольцевого выреза посередине образца. Торцы цилиндра движутся с постоянной скоростью $V_0 = 0.1$ мм/с, что соответствует нагружению с постоянной усредненной скоростью деформации $8.33 \cdot 10^{-3}$ с $^{-1}$.

При расчете были приняты следующие параметры цилиндра и постоянные материала: длина цилиндра 24 мм, радиус цилиндра 8 мм, ширина выреза 1 мм, глубина выреза 0.5 мм, модуль Юнга 205.8 ГПа, коэффициент Пуассона 0.3, $\rho_0 = 0.005$, $\tau_s = 235.2$ МПа, $m = 1$, $n = 1$, $\tau_1 = 9 \cdot 10^{-3}$ с, $\tau_2 = 4.17 \cdot 10^{-3}$ с.

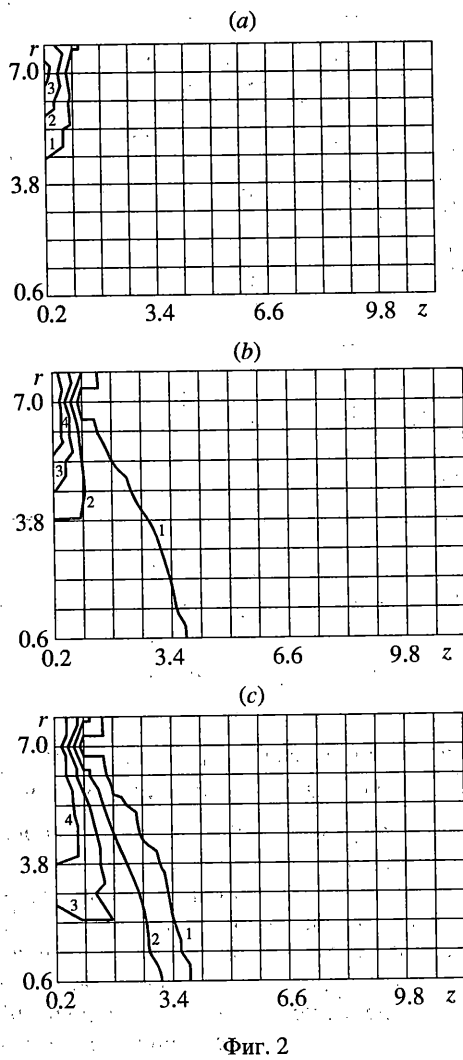
Варьировались параметр α , характеризующий линейное упрочнение материала, и критическое значение интенсивности остаточных напряжений, которое определяет переход ко второй стадии деформирования. Увеличение этого параметра увеличивает упрочнение материала и увеличивает предел, до которого происходит релаксация остаточных напряжений. Как показано в [4], изменение этих двух параметров, а так же времен релаксации τ_1 и τ_2 , позволяет получить осредненные диаграммы материалов σ – ϵ в широком диапазоне изменения свойств материала, как при упрочнении, так и при разупрочнении.

На фиг. 1, *a, b, c* показано распределение интенсивности пластической деформации в образце при различных значениях смещений торца в виде набора линий уровня, а на фиг. 2*a, b, c* показаны линии уровня пористости материала при тех же значениях смещения: $s_0^r = 117.6$ МПа, $\alpha = 9.8$ ГПа. На фиг. 1, *a, 2, a* – смещение торца 0.35 мм, на фиг. 1, *b, 2, b* – 0.47 мм, на фиг. 1, *c, 2, c* – 0.61 мм. Линии уровня соответствуют значениям: 1 – 4%, 2 – 8%, 3 – 12%, 4 – 16%.

Анализ приведенных результатов показывает, что линии равных уровней интенсивности пластических деформаций при первой стадии деформирования располагаются под углом к оси образца близким к 45°, но с ростом перемещения торцов этот угол увеличивается и становится близким к 90°. Изолинии пористости выглядят несколько иначе, вблизи выреза угол, образуемый с осью цилиндра, у них больше, а с увеличением перемещения торцов он также становится близким к 90°. Таким образом, при критерии разрушения, соответствующем критическому значению пористости ρ_* , разрушение будет происходить под углом, близким к 90° при больших значениях ρ_* , а при меньших значениях ρ_* этот угол уменьшается.



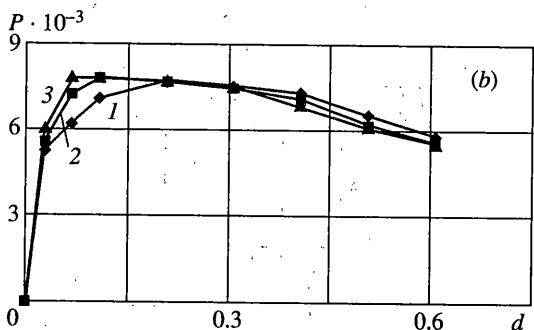
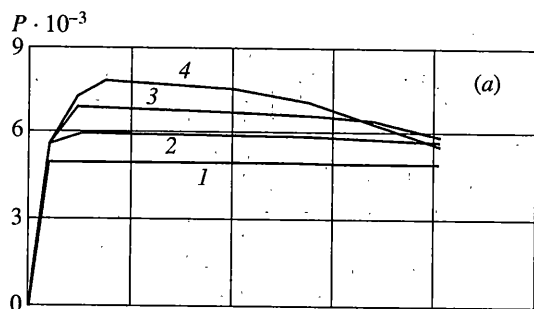
Фиг. 1



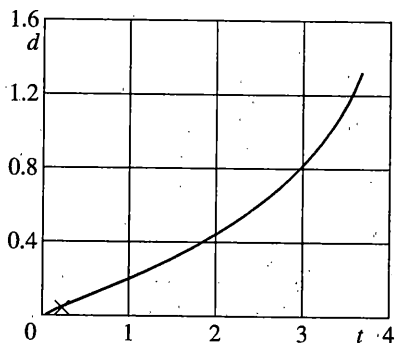
Фиг. 2

Следует обратить внимание на такой факт, что хотя локализация пластических деформаций вблизи поверхности образца происходит под углом, близким к 45° к оси образца, вблизи оси изолинии наклонены к ней под углом почти 90° . Этот факт наблюдается и в экспериментах по разрушению цилиндрических образцов при растяжении. Поверхность поперечного сечения после разрушения именно так и выглядит: вблизи внешней поверхности образца она представляет собой конус с углом около 45° , а вблизи оси – плоскость под углом 90° .

На фиг. 3 показаны диаграммы материалов в координатах "усилие на торце $P[H]$ – перемещение торцов d [мм]", при различных значениях α и s_0^r . На фиг. 3, а приведены диаграммы для $\alpha = 9.8$ гПа и четырех значений s_0^r . Кривой 1 отвечает значение $s_0^r = 0$ мПа, что означает, что рост пор начинается сразу с появлением пластических деформаций. Кривым 2, 3, 4 отвечают соответственно значения $s_0^r = 39.2$, $s_0^r = 78.4$, $s_0^r = 117.6$ мПа. На фиг. 3, б показано изменение усредненной диаграммы при изме-



Фиг. 3



Фиг. 4

нении параметра упрочнения α : $s_0^r = 117.6$ МПа, $\alpha_1 = 4.9$ ГПа, $\alpha_2 = 9.8$ ГПа, $\alpha_3 = 19.6$ ГПа. Видно, что разупрочнение на этих кривых существенно меняется, с изменением критического значения интенсивности остаточных напряжений s_0^r , и очень слабо зависит от изменения α .

Второй рассмотренный пример соответствовал измененному условию нагружения образца: к торцам прикладывалось усилие, которое возрастало достаточно быстро по линейному закону до значения, несколько превышающего критическое усилие P^* , при котором начинается разупрочнение на диаграмме "усилие на торце – перемещение торцов", далее усилие оставалось постоянным. Такое нагружение соответствует условиям нагружения при неустановившейся ползучести.

На фиг. 4 приведена зависимость перемещения торца d [мм] от времени t [с]. $s_0^r = 117.6$ МПа, $\alpha = 19.6$ ГПа, скорость роста растягивающего напряжения на торце в начальный момент времени 1.715 ГПа*с, максимальное растягивающее напряжение на торце 394.65 МПа. Крестом на графике отмечен момент прекращения увеличения нагрузки на торец. Как видно из фигуры, зависимость соответствует характерному виду экспериментальных кривых при неустановившейся ползучести в состоянии, близком к разрушению.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-01-00173) и научной программы "Университеты России" (проект 015.04.01.66).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А.А. Деформация вязкопластического тела // Уч. Зап. МГУ. Вып. 39. 1940. С. 28–41.
2. Maugin G.A. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge: University Press, 1992. 350 p.

3. *Lemaitre J. and Chaboche J.L.* Mechanics of Solid Materials. Cambridge: University Press. Cambridge, UK. 1990. 520 p.
4. *Кукуджанов В.Н.* Микромеханическая модель разрушения неупругого материала и ее применение к исследованию локализации деформаций // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 5. С. 72–87.
5. *Кукуджанов В.Н., Сантаойя К.* Термодинамика вязкопластических сред с внутренними параметрами // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 115–126.
6. *Кукуджанов В.Н.* Разностные методы решения задач механики деформируемых тел. М.: Изд-во МФТИ, 1992. 122 с.
7. *Кибардин В.Ю., Кукуджанов В.Н.* Численное моделирование локализации пластической деформации и разрушения упругопластических материалов // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 109–118.
8. *Gurson A.L.* Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth // Trans. ASME. Ser. H.J. Eng. Materials Technol. 1977. V. 99. № 1. P. 2–15.
9. *Hill R.* The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals // J. Mech. and Phys. of Solids. 1967. V. 15. № 2. P. 79–97.
10. *Кукуджанов В.Н.* Одномерные задачи распространения волн напряжений в стержнях // Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, В. 6. 1977. С. 55.
11. *Судзуки Т., Есиага Х., Такеути С.* Динамика дислокаций и пластичность. М.: Мир, 1989. С. 294.

Москва

Поступила в редакцию
10.01.2000