

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

Предлагается численный метод исследования устойчивости вязкоупругих систем, находящихся под действием переменных во времени параметрических нагрузок, с произвольным ядром релаксации материала, в том числе и слабо сингулярным. Метод основан на получении решения системы интегродифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты с последующим вычислением максимального показателя Ляпунова. Процедура определения показателя Ляпунова обобщает подход, разработанный Беннеттиным и др., на случай интегродифференциальных уравнений. Приведенные примеры иллюстрируют эффективность и точность предлагаемого метода.

Проблема устойчивости вязкоупругих систем является весьма актуальной по двум причинам. С одной стороны, это связано со все большим внедрением в инженерную практику материалов, обладающих ярко выраженными вязкоупругими свойствами, а с другой стороны, при использовании наследственных моделей [1, 2] для описания внутреннего демпфирования материала уравнения колебаний упругих систем записываются в такой же форме, как и для вязкоупругих систем. Часто при рассмотрении упругих систем внутреннее трение материала учитывается с помощью модели Фойгта, хотя известно, что даже в системах с конечным числом степеней свободы большим единицы она приводит к некорректным результатам, поскольку для большинства материалов внутреннее трение фактически не зависит или, по крайней мере, слабо зависит от скорости колебаний на достаточно широком частотном диапазоне. В этом смысле более предпочтительной является модель материала, обладающего наследственными свойствами.

Анализ устойчивости вязкоупругих систем при динамических воздействиях вызывает большие трудности, поскольку связан с рассмотрением интегродифференциальных уравнений. В том случае, когда мера релаксации материала мала по сравнению с единицей, для решения задачи устойчивости может быть использован метод усреднения [3]. Если ядро релаксации материала представимо суммой экспонент [4], исследование устойчивости может быть сведено к рассмотрению систем дифференциальных уравнений. Как известно, для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и упругих систем, колебания которых описываются такими уравнениями, получено достаточно большое число результатов, имеющих принципиальное значение [5, 6].

При исследовании устойчивости интегродифференциальных уравнений чаще всего используется прямой метод Ляпунова [7]. Однако применение этого метода связано с выбором подходящего функционала Ляпунова, что в случае интегродифференциальных уравнений связано с преодолением таких трудностей, что процедуру конструирования подобных функционалов можно сравнить с искусством [8].

В последнее время для анализа поведения и устойчивости динамических систем, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, широкое применение получил метод показателей Ляпунова [9]. С этой целью в работе [10] предложен численный метод отыскания указанных показателей.

Применению метода показателей Ляпунова для анализа устойчивости вязкоупругих систем в случае вырожденных ядер релаксации материала посвящены статьи [11–13].

1. Постановка задачи. Рассмотрим некоторую вязкоупругую систему, зависимость между напряжениями $\sigma(t)$ и деформациями $\epsilon(t)$ для материала которой в случае

одноосного напряженного состояния записываются в виде

$$\sigma = E(1 - R)\epsilon \quad (1.1)$$

где E – модуль упругости материала

$$R\epsilon \equiv \int_{t_0}^t R(t, \tau) d\tau$$

$R(t, \tau)$ – ядро релаксации, удовлетворяющее условию ограниченной ползучести материала

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t R(t, \tau) d\tau < 1$$

t, τ – время.

Соотношение между касательными напряжениями и деформациями при чистом сдвиге имеют вид аналогичный (1.1).

Система находится под действием параметрических нагрузок, являющихся известными функциями времени. Используя метод конечных элементов, конечных разностей, метод Бубнова – Галеркина и т.п. движение вязкоупругой системы может быть описано с помощью системы линейных интегродифференциальных уравнений

$$M\ddot{X} + K(1 - R)X - CX = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $X = X(t)$ – вектор неизвестных; M, K, C – квадратные матрицы, являющиеся матрицей масс, матрицей жесткости и матрицей параметрических нагрузок соответственно. В дальнейшем будем считать матрицу масс не вырожденной. Точкой обозначена производная по времени t .

В случае неоднородной вязкоупругой системы под KR можно понимать также матрицу, составленную из операторов релаксации, учитывающих вязкие свойства различных элементов исходной вязкоупругой системы.

Невозмущенному движению (положению равновесия вязкоупругой системы), соответствует нулевое решение системы уравнений (1.2). Это движение может быть устойчивым или неустойчивым в смысле Ляпунова при возмущении начальных условий $X(t_0) = X_0$ и $\dot{X}(t_0) = V_0$.

Запишем систему уравнений (1.2) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{Y} = AY \equiv F(Y) \quad (1.3)$$

решение которой должно удовлетворять начальным условиям $Y(t_0) = Y_0$

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ V_0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}\{K(1 - R) - C\} & 0 \end{bmatrix}$$

В случае произвольного вектора Y_0 для системы уравнений (1.3) может быть найден максимальный показатель Ляпунова

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t - t_0)} \ln \frac{\|Y(t)\|}{\|Y_0\|} \quad (1.4)$$

где $\|Y(t)\|, \|Y_0\|$ – нормы вектора Y в евклидовом пространстве в текущий и начальный моменты времени.

Если максимальный показатель Ляпунова оказывается отрицательной величиной, то невозмущенное движение является асимптотически устойчивым по Ляпунову, если же $\lambda \geq 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

2. Решение системы интегродифференциальных уравнений. Для численного решения системы уравнений (1.3) воспользуемся методом Рунге – Кутты 4-го порядка, обобщенным на случай интегродифференциальных уравнений Вольтерра в статье [14]. Однако в этой работе ядра интегральных слагаемых считались регулярными и потому для вычисления интегралов предполагалось воспользоваться квадратурными формулами. Для того, чтобы иметь возможность рассматривать ядра релаксации, обладающие слабой особенностью [15, 16], объединим метод, предложенный в работе [14], с методом Крылова – Боголюбова решения интегральных уравнений [17], основанным на использовании теоремы о среднем для определенных интегралов. В результате алгоритм решения уравнений (1.3) сводится к следующему.

Рассматриваемый интеграл времени $[t_0, t_{n+1}]$ разбивается на равные промежутки времени продолжительностью Δt : $t_i = t_0 + i\Delta t$, $t_{n+1} = t_0 + (n + 1)\Delta t$.

Предполагается, что решения уравнений (1.3) для моментов времени t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) известны и равны \mathbf{Y}_i . Тогда решение той же системы для момента времени t_{n+1} может быть получено в виде

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \Phi(t_n, \{\mathbf{Y}_i\}_{i=0}^n) \quad (2.1)$$

$$\Phi(t_n, \{\mathbf{Y}_i\}_{i=0}^n) = \frac{1}{6}(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_5)$$

$$\mathbf{K}_1 = \Delta t \mathbf{F}(t_n, \mathbf{Y}_n, I(t_n, \{\mathbf{Y}_i\}_{i=0}^n))$$

$$\mathbf{K}_2 = \Delta t \mathbf{F}(t_n + \Delta t/2, \mathbf{Y}_n + \mathbf{K}_1/2, \tilde{I}(t_n, \{\mathbf{Y}_i\}_{i=0}^n, \Delta t/2, \mathbf{K}_1))$$

$$\mathbf{K}_3 = \Delta t \mathbf{F}(t_n + \Delta t/2, \mathbf{Y}_n + \mathbf{K}_2/2, \tilde{I}(t_n, \{\mathbf{Y}_i\}_{i=0}^n, \Delta t/2, \mathbf{K}_1))$$

$$\mathbf{K}_4 = \Delta t \mathbf{F}(t_n + \Delta t/2, \mathbf{Y}_n + \mathbf{K}_2/2, \tilde{I}(t_n, \{\mathbf{Y}_i\}_{i=0}^n, \Delta t/2, \mathbf{K}_2))$$

$$\mathbf{K}_5 = \Delta t \mathbf{F}(t_n + \Delta t, \mathbf{Y}_n + \mathbf{K}_4, \tilde{I}(t_n, \{\mathbf{Y}_i\}_{i=0}^n, \Delta t, \mathbf{K}_4))$$

$$I(t_n, \{\mathbf{Y}_i\}_{i=0}^n) = \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} R(t_n, \tau) d\tau (\mathbf{Y}_i + \mathbf{Y}_{i+1})/2$$

$$\tilde{I}(t_n, \{\mathbf{Y}_i\}_{i=0}^n, \gamma, \delta) = \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} R(t_n + \gamma, \tau) d\tau (\mathbf{Y}_i + \mathbf{Y}_{i+1})/2 +$$

$$+ \int_{t_n}^{t_n + \gamma} R(t_n + \gamma, \tau) d\tau [\mathbf{Y}_n + (\mathbf{Y}_n + \delta)]/2$$

В свою очередь, в зависимости от вида ядра релаксации $R(t - \tau)$ интегралы

$$I_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} R(t_n, \tau) d\tau$$

могут быть найдены точно или приближенно с использованием известных методов численного интегрирования.

3. Вычисление максимального показателя Ляпунова. В том случае, когда показатель λ оказывается отрицательной величиной, его определение не вызывает затруднений. Для этого можно воспользоваться непосредственно формулой (1.4) и для каждого момента времени t_n найти приближенное значение λ_n величины λ :

$$\lambda_n = \frac{1}{t_n - t_0} \ln \frac{\|\mathbf{Y}_n\|}{\|\mathbf{Y}_0\|}$$

По мере увеличения времени значения λ_n приближаются к постоянному значению, которое и является показателем Ляпунова.

Однако в том случае, когда невозмущенное движение неустойчиво, максимальный показатель Ляпунова положителен, тогда использование выражения (1.4) может оказаться невозможным из-за переполнения разрядной сетки персонального компьютера. В этой ситуации можно воспользоваться приемом вычисления λ , предложенным в [10], обобщим его на случай интегродифференциальных уравнений. Суть этого обобщения заключается в следующем.

Допустим, что норма вектора Y в начальный момент времени $t = t_0$ равна единице, т.е. $\|Y_0\| = 1$. Находим решения системы уравнений (1.4) для момента времени $t_1 = t_0 + \Delta t$. Его норма оказывается равной $d_1 = \|Y_1\|$. Нормируем это решение, для чего разделим все координаты вектора Y_1 на величину d_1 . Одновременно делятся на d_1 все компоненты вектора Y_0 . Используя новые векторы Y_0, Y_1 , находим решение системы уравнений (1.4) для момента времени $t_2 = t_0 + 2\Delta t$. Норма вектора Y_2 равна $d_2 = \|Y_2\|$. Снова нормируем вектор Y_2 , поделив для этого все его компоненты на величину d_2 . Одновременно делятся на величину d_2 компоненты векторов Y_0, Y_1 . Повторяя эту процедуру для всех последующих моментов времени, получим последовательность значений величин d_1, d_2, \dots, d_n . Тогда очевидно, что приближенное значение показателя Ляпунова для момента времени t_n будет найдено следующим образом:

$$\lambda_n = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{i=1}^n \ln d_i$$

Заметим, что процедуру нормирования можно выполнять не на каждом шаге решения системы уравнений, а через несколько шагов. В таком случае экономится время машинного счета.

4. Вязкоупругий стержень, находящийся под действием периодической продольной силы. Рассмотрим прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения шарнирно опертый по концам. Материал стержня обладает вязкоупругими свойствами. Будем считать, что ядро релаксации инвариантно относительно начала отсчета времени, вследствие чего интегральное слагаемое в соотношении (1.1) можно записать в виде

$$R\epsilon = \int_0^t R(t-\tau)\epsilon(\tau)d\tau$$

Поперечные колебания стержня, находящегося под действием продольной силы P , при использовании гипотезы плоских сечений описываются уравнением

$$m\ddot{w} + EI(1 - R)w'''' + Pw'' = 0 \quad (4.1)$$

Здесь w – прогиб стержня, EI – изгибная жесткость стержня, m – погонная масса, P – продольная сила, которую будем считать равной $P(t) = P_0 + P_1 \cos \theta t$, где P_0, P_1, θ – константы.

Штрихом в уравнении (4.1) обозначена производная по координате x , отсчитываемой вдоль оси стержня от одного из его концов.

Допустим, что начальные условия имеют вид

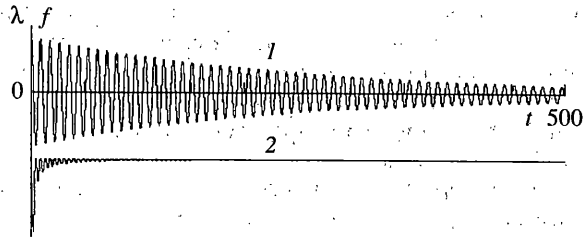
$$w(0, x) = f_0 \sin(\pi x / l), \quad \partial w / \partial t |_{t=0} = v_0 \sin(\pi x / l)$$

причем l – длина стержня.

Тогда решение уравнения (4.1) ищется в форме $w(t, x) = f(t) \sin(\pi x / l)$. Амплитуда прогиба $f(t)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$\dot{f} + \omega^2 [(1 - R) - \alpha_0 - \alpha_1 \cos \theta t] f = 0 \quad (4.2)$$

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 EI}{ml^4}, \quad \alpha_0 = \frac{P_0 l^2}{\pi^2 EI}, \quad \alpha_1 = \frac{P_1 l^2}{\pi^2 EI}$$



Фиг. 1

Заметим, что к аналогичному уравнению сводится исследование устойчивости не только стержня, но и прямоугольной пластины, шарнирно закрепленной по контуру и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, приложенной на уровне срединной плоскости пластины параллельно ее краям или тонкостенной цилиндрической оболочки, шарнирно опертой по торцам и нагруженной равномерно распределенной продольной нагрузкой, приложенной на торцах, и т.п.

Рассмотрим ядро релаксации экспоненциального типа

$$R(t - \tau) = \chi^* L \exp[-\chi^*(t - \tau)], \quad \chi^*, \quad L - \text{const}$$

Введем безразмерное время $t_1 = \omega t$, $\tau_1 = \omega \tau$. Тогда уравнение (4.1) принимает вид

$$f'' + (1 - \alpha_0 - \alpha_1 \cos 2\Omega t) f - \int_0^t \chi L e^{-\chi(t-\tau)} f(\tau) d\tau = 0 \quad (4.3)$$

Здесь для удобства время t_1 , τ_1 вновь обозначено через t , τ , $\chi = \chi^*/\omega$, $2\Omega = \theta/\omega$. Штрихом обозначена производная по безразмерному времени t .

Оценим точность решения, получаемого с помощью предлагаемого метода, сравнивая его с точным решением. Кроме того, поскольку экспоненциальное ядро является вырожденным, то интегродифференциальное уравнение (4.3) может быть заменено эквивалентной ему системой трех дифференциальных уравнений первого порядка [4]. Поэтому воспользуемся сравнением указанных результатов с результатом решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, найденным с помощью обычного метода Рунге – Кутты четвертого порядка [18].

На фиг. 1 показаны графики изменения функций $f(t)$ (кривая 1) и λ_n (кривая 2) в зависимости от времени (от количества шагов), построенные при $\chi = 0,04$; $L = 0,1$; $\alpha_0 = 0,5$; $\alpha_1 = 0$ и начальных условиях $f_0 = 0$; $\nu_0 = 1,0$. Решение уравнений (4.3) производилось с шагом $\Delta t = 0,2$. Числовые результаты расчетов представлены в таблицах 1–3, где через f_* и λ_{*} , f^* и λ^* обозначены значения функции $f(t)$ и оценки показателя Ляпунова, найденные путем решения уравнения (4.3) и системы дифференциальных уравнений 1-го порядка соответственно. Значения λ_{analyt} и λ определены из точного решения интегродифференциального уравнения, которое нетрудно получить с помощью преобразования Лапласа.

Данные табл. 1 соответствуют нулевой продольной силе, а данные табл. 2 – постоянной сжимающей силе, безразмерное значение α_0 которой равно 0,5.

Сопоставление результатов, найденных численным методом, с аналогичными результатами точного решения свидетельствует о достаточно высокой точности и эффективности предложенного метода. Одновременно эти данные говорят практически об одинаковой точности численного решения методом Рунге – Кутты интегродифференциального уравнения (4.3) и эквивалентной ему системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Далее рассмотрим случай периодической продольной силы с параметрами $\alpha_0 = 0$; $\alpha_1 = 0,5$; $\Omega = 1,0$. На фиг. 2 показан график изменения λ_n во времени, полученный для

Таблица 1

t	f^* $\Delta t = 0,1$	f^* $\Delta t = 0,2$	f^* $\Delta t = 0,1$	f^* $\Delta t = 0,2$	f_{analyt}
100	-0,42280	-0,42379	-0,42273	-0,42351	-0,42270
200	-0,59209	-0,59320	-0,59189	-0,59243	-0,59190
300	-0,54897	-0,54933	-0,54870	-0,54827	-0,54879
400	-0,37484	-0,37401	-0,37459	-0,37305	-0,37475
500	-0,15887	-0,15701	-0,15873	-0,15651	-0,15891

Таблица 2

t	f^* $\Delta t = 0,1$	f^* $\Delta t = 0,2$	f^* $\Delta t = 0,1$	f^* $\Delta t = 0,2$	f_{analyt}
100	0,95028	0,95073	0,95013	0,95011	0,95033
300	-0,42754	-0,42814	-0,42733	-0,42730	-0,42749
400	0,00324	0,00301	0,00322	0,00297	0,00325
500	0,19246	0,19291	0,19230	0,19228	0,19240

Таблица 3

α_0	Δt	t	λ_*	λ^*	λ
0	0,1	500	-0,00200	-0,00200	-0,00200
0	0,2	500	-0,00199	-0,00200	-0,00200
0,5	0,1	500	-0,00330	-0,00330	-0,00399
	0,2	500	-0,00329	-0,00330	-0,00399
	0,2	1000	-0,00398	-0,00399	-0,00399

Таблица 4

t	λ_n	λ_n^*
100	0,114	0,118
200	0,116	0,121
300	0,117	0,121
400	0,117	0,121
500	0,117	0,122

слабо сингулярного ядра релаксации

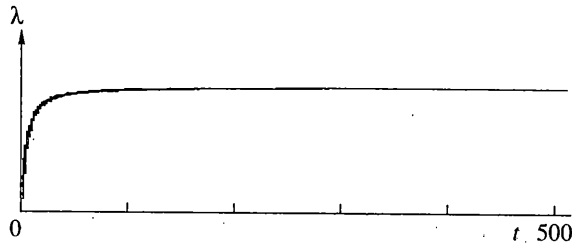
$$R(t - \tau) = \frac{B}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-a(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}, \quad B = 0,02, \quad a = 0,004 \quad (4.4)$$

Мера релаксации материала при таком ядре равна $L = B/\sqrt{a} = 0,1$. Вычисления проводились с шагом $\Delta t = 0,2$. Значения λ_n находились для каждого момента времени $t_i = \Delta t$.

В табл. 4 приведены значения λ_n , найденные для нескольких фиксированных моментов времени. Для сравнения в таблице представлены значения λ_n^* , полученные при тех же параметрах нагрузки и шаге Δt , но при экспоненциальном ядре релаксации, характеристики которого равны $\chi = 0,04$; $L = 0,1$. Заметим, что мера релаксации для обоих ядер одинакова. Как видно, значения λ для двух ядер релаксации оказываются очень близкими между собой, из чего следует, что наличие слабой сингулярности типа $(t - \tau)^{-0,5}$ не оказывает особо заметного влияния на интегральную характеристику траектории движения стержня, каковой является максимальный показатель Ляпунова.

Для оценки точности результатов, полученных в случае действия периодической продольной силы воспользуемся асимптотическим методом решения интегродифференциального уравнения (4.3) [3, 19–22]. С этой целью решение уравнения (4.3) ищем в виде $f(t) = A(t)\sin \psi$, $\psi = \Omega t + \varphi$.

После преобразований, стандартных для асимптотических методов, получим два



Фиг. 2

уравнения относительно медленно меняющихся функций $A(t)$ и $\varphi(t)$ (при $\Omega \sim \sqrt{1 - \alpha_0}$):

$$\dot{A} = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\alpha_1}{4} \sin 2\varphi + Z \right) A, \quad \dot{\varphi} = (\sqrt{1 - \alpha_0} - \Omega) + \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\alpha_1}{4} \cos 2\varphi - X \right)$$

Переходя к новым неизвестным $u_1 = A \cos \varphi$ и $u_2 = A \sin \varphi$, получим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{u}_1 = \frac{Z}{\Omega} u_1 + \frac{1}{\Omega} \left[\frac{\alpha_1}{4} + \Omega(\Omega - \sqrt{1 - \alpha_0}) + X \right] u_2$$

$$\dot{u}_2 = \frac{1}{\Omega} \left[\frac{\alpha_1}{4} + \Omega(\sqrt{1 - \alpha_0} - \Omega) - X \right] u_1 + \frac{Z}{\Omega} u_2$$

Корни характеристического уравнения λ_1, λ_2 для этой системы уравнений равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{Z}{\Omega} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{4\Omega} \right)^2 - \left[\sqrt{1 - \alpha_0} - \Omega - \frac{X}{\Omega} \right]^2} \quad (4.5)$$

В случае экспоненциального ядра релаксации величины Z и X равны

$$Z = -\frac{\chi\Omega L}{2(\Omega^2 + \chi^2)}, \quad X = \frac{\chi^2 L}{2(\Omega^2 + \chi^2)} \quad (4.6)$$

При $\chi = 0,04$, $L = 0,1$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0,5$, $\Omega = 1,0$ из соотношений (4,5), (4,6) имеем $\lambda_1 = 0,123$, $\lambda_2 = -0,127$. Как видно, значение λ^* из табл. 4, отвечающее $t = 500$, близко к значению λ_1 .

В случае ядра со слабой особенностью (4.4) величины Z и X равны

$$Z = -\frac{B}{2(a^2 + \Omega^2)^{1/4}} \sin\left(\frac{1}{2} \arctg \frac{\Omega}{a}\right)$$

$$X = \frac{B}{2(a^2 + \Omega^2)^{1/4}} \cos\left(\frac{1}{2} \arctg \frac{\Omega}{a}\right)$$

При тех же числовых значениях исходных параметров, что и в случае экспоненциального ядра релаксации, в итоге получим $\lambda_1 = 0,118$, $\lambda_2 = -0,132$.

Как видно, значение λ из табл. 4, соответствующее времени $t = 500$, также близко к значению λ_1 . Таким образом, предлагаемый метод дает возможность получить достаточно точные результаты и в случае действия периодической продольной силы.

5. Заключение. Предложен численный метод исследования устойчивости вязкоупругих систем, а также упругих систем, в которых демпфирование материала учитывается с помощью наследственных моделей. Материал конструкции обладает ограниченной ползучестью, но ядро ползучести или релаксации может обладать слабой

сингулярностью. Параметрические нагрузки, действующие на систему, могут быть постоянными или меняющимися во времени (в частности, периодическими).

Метод основан на получении решения интегродифференциальных уравнений, описывающих движение рассматриваемой системы, с помощью усовершенствованного метода Рунге – Кутты и вычислении максимального показателя Ляпунова.

Сравнение результатов решения конкретных интегродифференциальных уравнений с аналитическими решениями свидетельствует об эффективности и высокой точности предлагаемого метода.

Следует отметить, что известные на сегодняшний день методы анализа устойчивости интегродифференциальных уравнений (устойчивости вязкоупругих систем) позволяют получить лишь достаточные условия устойчивости, которые, как правило, дают существенно заниженные значения критических параметров, особенно в случае произвольных ядер интегральных операторов. В этом отношении рассматриваемый метод имеет существенное преимущество перед названными методами, потому что позволяет найти условия устойчивости, являющиеся необходимыми и достаточными.

Критическому значению какого-либо параметра β вязкоупругой системы соответствует нулевое значение максимального показателя Ляпунова. Поскольку зависимость $\lambda = \lambda(\beta)$ является нелинейной, то для получения значения β_* , при котором показатель Ляпунова обращается в нуль, нужно найти корень уравнения $\lambda(\beta) = 0$. Для этого можно воспользоваться известными методами решения нелинейных уравнений, например, простейшим из них – методом половинного деления.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–00–96).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сорокин Е.С., Муравский Г.Б. Об учете упругих несовершенств материалов методами наследственной упругости // Строит. механика и расчет сооружений. 1975. № 4. С. 41–46.
2. Кочнева Л.Ф. Внутреннее трение в твердых телах при колебаниях. М.: Наука, 1979. 96 с.
3. Матвиш В.И. О динамической устойчивости шарнирно опертого упруговязкого стержня // Механика полимеров. 1971. № 2. С. 293–300.
4. Потапов В.Д. Устойчивость вязкоупругого стержня, находящегося под действием случайной стационарной продольной силы // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 105–110.
5. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
6. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М.: Наука, 1972. 720 с.
7. Drozdov A.D., Kolmanovskii V.B. Stability in Viscoelasticity. Elsevier; Amsterdam. North-Holland, 1994. 600 p.
8. Колмановский В.Б. Об устойчивости некоторых систем с последействием и переменными коэффициентами // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 71–81.
9. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
10. Bennett G., Galgani L., Giorgoli A., Strelcyn J.M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. P. 1, 2. // Meccanica. 1980. V. 15. № 1. P. 9–20; P. 21–30.
11. Aboudi J., Cederbaum G., Elishakoff I. Dynamic stability analysis of viscoelastic plates by Lyapunov exponents // J. Sound and Vibrat. 1990. V. 139. № 3. P. 459–467.
12. Potapov V.D., Koirala P. Stability of elastic and viscoelastic systems under action of random stationary narrow – band loads // Intern. J. Mech. Sci. 1997. V. 39. № 8. P. 935–942.
13. Potapov V.D., Maraslanov A.Y. The investigation of the stability of elastic and viscoelastic rods under a stochastic excitation // Intern. J. Solids and Struct. 1997. V. 34. № 11. P. 1367–1377.
14. Feldstein A., Sopka J.R. Numerical method for nonlinear Volterra integro – differential equations // SIAM J. Numer. Analysis. 1974. V. 11. № 4. P. 826–846.
15. Ржаницын А.П. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 416 с.
16. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука. 1977. 384 с.

17. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
18. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Физматгиз, 1963, 400 с.
19. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.
20. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.
21. Филатов А.Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент: Фан, 1971. 279 с.
22. Потапов В.Д. Устойчивость вязкоупругого стержня при стохастическом и параметрическом возбуждении // Строит. механика и расчет сооружений. 1987. № 1. С. 52–56.

Москва

Поступила в редакцию
22.03.1999