

УДК 539.376

© 2000 г. Ю.Г. БАСАЛОВ, В.Н. КУЗНЕЦОВ, С.А. ШЕСТЕРИКОВ

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РЕОНОМНОГО МАТЕРИАЛА

Предложены определяющие соотношения для описания нелинейных реономных процессов при малых деформациях, основанные на концепции "перманентной" памяти. В соотношениях в деформационной форме учтены различия в процессах нагружения и разгрузки. В качестве использования общих уравнений рассмотрены случаи нагружения с постоянной скоростью деформирования, чистой релаксации и ползучести. Для ряда процессов деформирования выполнены расчеты и дано сравнение с экспериментальными данными, которое показало хорошее совпадение результатов прогноза при изменяющейся нагрузке с фактическим поведением исследуемых материалов. Модель ориентирована на такие материалы, как твердое топливо, асфальтобетон, углеродные и керамические композиты при высоких температурах.

1. Большинство исследований, посвященных нелинейной вязкоупругости и вязкоупругопластичности, обзоры которых имеются, например, в [1–5] используют "гипотезу затухающей памяти", аналогично тому, как это принято в теории линейной вязкоупругости, основанной на операторе Вольтерры, который можно записать в виде [3]:

$$w(t) = u(t) + \int_0^t K(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

Здесь функция $u = u(t)$ – "воздействие" на образец, $w = w(t)$ – "отклик", $K(t, \epsilon)$ – ядро оператора (функция влияния), t – время. Если при фиксированном t :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t, \tau) = 0 \quad (1.2)$$

то говорят, что выполнено условие затухающей памяти, требуя дополнительно, чтобы ядро с возрастанием t стремилось к нулю монотонно.

Гораздо меньше разработан другой подход, основанный на гипотезе "перманентной" памяти, суть которого состоит в том, что вместо интегральных операторов вида (1.1) с ядром, затухающим в смысле (1.2) используются интегральные операторы, не содержащие ядра (т.е. явной функции времени), и удовлетворяющие общему условию затухающей памяти [1, 6].

По-видимому, впервые подобная идея была высказана Беляевым [7]. Фицджеральд [8] предложил, со ссылкой на идею Коулмена и Нолла [9], в качестве оператора с перманентной памятью использовать для одномерного случая и при условии, что деформация $\epsilon(t)$ не убывает, отношение текущей деформации $\epsilon(t)$ к ее обобщенной норме Лебега $\|\epsilon(t)\|_p$ порядка p . В этом случае зависимость между напряжением σ и деформацией ϵ задается в виде

$$\sigma(t) = A_0 \left(\frac{|\epsilon(t)|}{\|\epsilon(t)\|_p} \right)^n \epsilon(t) \quad (1.3)$$

Здесь A_0, n, p – константы материала, а обобщенная норма Лебега определена формулой

$$|f(t)|_p = \left[\int_0^t |f(\tau)|^p d\tau \right]^{1/p}, \quad p > 1 \quad (1.4)$$

(норма (1.4) является обобщенной, так как верхний предел интегрирования переменный).

Если $\varepsilon(t)$ убывает, то зависимость (1.3) дополняется следующим образом:

$$\sigma(t) = A_0 \left(\frac{|\varepsilon(t)|}{\|\varepsilon(t)\|_p} \right)^n \varepsilon(t) + A_1 \left[1 - \frac{|\varepsilon(t)|}{\varepsilon_{\max}} \right]^k \int_0^t (t-\tau)^m \varepsilon(\tau) d\tau \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{\max} = |\varepsilon(t)|_{\max}, \quad A_1, k, m = \text{const}$$

Отметим, что при неубывающей по модулю деформации $\varepsilon(t)$ текущее значение ее по модулю совпадает с ее максимумом модуля ε_{\max} , и поэтому квадратная скобка в (1.5) обращается в ноль. При убывании $\varepsilon(t)$ имеем

$$|\varepsilon(t)| < \varepsilon_{\max} \quad (1.6)$$

скобка становится отличной от нуля и, тем самым, включает, при условии (1.6), второй член в (1.5), равный произведению скобки-выключателя на обычный линейный функционал типа Вольтерры со степенным ядром $(t-\tau)^m, m < 0$ [3].

Приведенное в [8] сравнение результатов экспериментов и расчетов по формуле (1.5), показало хорошее совпадение, но за исключением начальных стадий процессов. Можно показать, что в этом последнем случае, согласно модели (1.5), при деформировании с любой постоянной скоростью кривая деформирования $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ имеет бесконечный модуль упругости $d\sigma/d\varepsilon$ при $\varepsilon = 0$, что противоречит физическому смыслу и делает невозможным описание малых колебаний и других подобных процессов. Кроме того, в этой модели кривые релаксации напряжений, соответствующие ступенчатой деформации вида

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ \varepsilon_0 = \text{const} & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

уходят в бесконечность при $t = 0$.

Отметим также, что задавая деформацию как степенную функцию времени $\varepsilon = ct^x$, $c = \text{const}, x = \text{const}$ из уравнения (1.3) получаем, что при $x < n/p$ напряжения при $t = 0$ обращаются в бесконечность.

2. В настоящей работе построены достаточно общие определяющие соотношения на основе операторов с перманентной памятью, существенно обобщающие (1.5), которые позволяют физически корректно описать деформирование реальных материалов. Предлагаемые соотношения имеют следующий вид:

$$\sigma = F(\tilde{\gamma}) + A_1 \left[1 - \frac{|\varepsilon|}{|\varepsilon_{\max}|} \right]^k \int_0^t (t-\tau)^m \varepsilon(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{|\varepsilon|^{\alpha-1} \cdot (\|\dot{\varepsilon}\|_q)^\xi}{(\|\varepsilon\|_{p,\beta})^\eta} \varepsilon, \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad \alpha \geq 1 \quad (2.2)$$

Здесь введено обобщение нормы (1.4) по формуле

$$\|\varphi(t)\|_{p,\beta} = \left[\frac{1}{|t_2 - t_1|^\beta} \int_{t_1}^{t_2} |\varphi(\tau)|^p d\tau \right]^{1/p}, \quad p > 1 \quad (0 \leq \beta \leq 1) \quad (2.3)$$

где $\alpha, \beta, p, q, \xi, \eta$, – константы материала, которые, вообще говоря, зависят от температуры T .

Отметим, что для определяющих соотношений (2.1) при $\beta = 0$ характерной особенностью является релаксация напряжений до нулевого уровня, а при $\beta = 1$ – до некоторой конечной величины, что будет показано ниже.

Рассмотрим подробно эти основные частные случаи модели (2.1), (2.2) (при условии, что деформация $\varepsilon(t)$ не убывает и поэтому второй член в правой части отсутствует).

Полагая $\beta = 1$, имеем

$$\|\varepsilon(t)\|_{p,1} = \left[\frac{1}{t} \int_0^t |\varepsilon(\tau)|^p d\tau \right]^{1/p} \quad (2.4)$$

$$\sigma = F(\tilde{\gamma}) \quad (2.5)$$

3. Примем, что функция F такова, что при $\tilde{\gamma} \rightarrow 0$ имеем

$$F(\tilde{\gamma}) \approx A_0 \tilde{\gamma}, \quad A_0 = \text{const} \quad (3.1)$$

Рассмотрим начало нагружения и потребуем, чтобы при деформировании с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon} = a = \text{const}$, $\varepsilon = at$ соотношение (2.5) переходило в закон Гука с модулем упругости, зависящим от скорости деформирования

$$\sigma = E(a) \cdot \varepsilon \quad (3.2)$$

При $\varepsilon = at$ имеем

$$\|\dot{\varepsilon}\|_q = at^{1/q}, \quad \|\varepsilon\|_p = \frac{at}{(p+1)^{1/p}}, \quad \tilde{\gamma} = (p+1)^{\eta/p} a^{\alpha+\xi-\eta} t, \quad p > 1, \quad q > 1$$

$$\sigma = \frac{A_0}{(p+1)^{-\eta/p}} a^{\alpha+\xi-\eta} t^{\alpha+\xi/q-\eta} \quad (3.3)$$

Соотношение (3.2) выполняется, если $\sigma(t)$ есть линейная функция времени, откуда (условие "квазилинейности"):

$$\alpha + \xi/q - \eta = 1 \quad \text{или} \quad \alpha - \eta = 1 - \xi/q \quad (3.4)$$

Для модуля упругости $E(a)$ получаем выражение:

$$E(a) = A_0 (p+1)^{1/p} a^{1+\xi(1-1/q)} = A_0 (p+1)^{1/p} a^\psi, \quad \psi = \xi \left(\frac{q-1}{q} \right) \quad (3.5)$$

и закон Гука (3.2) принимает вид

$$\sigma = \frac{A_0 a^\psi}{(p+1)^{-\eta/p}} \cdot \varepsilon \quad (3.6)$$

Рассмотрим опыт на релаксацию, в котором за время t_0 образец деформируется с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon} = a$ до деформации $\varepsilon_0 = at_0$, а при $t > t_0$ эта деформация поддерживается постоянной, т.е.

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} at, & 0 \leq t \leq t_0 \\ at_0 = \text{const}, & t > t_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Оставаясь в области малых напряжений, в этом случае получаем выражение, согласно (3.1), (3.4):

$$\sigma = \begin{cases} E(a)ta, & 0 \leq t \leq t_0 \\ \frac{\sigma_0}{(p+1)^{\eta/p} \left(\frac{1}{1-1/(\mu t)} \right)^{\eta/p}}, & t > t_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\mu = \frac{p+1}{p}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}$$

При $\bar{t} = 1$ очевидно $\sigma = \sigma_0 = E(a)at_0$. Выражение в скобках в (3.8) соответствует убывающей части правой ветви дробно-линейной функции вида $y = x/(x - x_0)$ и в силу $p > 0, t_0 > 0, t > t_0$ имеем $\sigma > 0$. Таким образом кривая релаксации описывается (3.8) как положительная степень дробно-линейной функции в области $t_0 \leq t < \infty$.

Величина напряжения σ_∞ при $t \rightarrow \infty$ очевидно равна

$$\sigma_\infty = A_0 \varepsilon_0 a^\psi = \frac{\sigma_0}{(p+1)^{\eta/p}} \quad (3.9)$$

Таким образом, остаточное напряжение σ_∞ отлично от 0 и зависит от σ_0, p и η .

Отметим следующие соотношения, полезные в частности, при обработке экспериментальных данных

$$\sigma(t_0) / \sigma(\infty) = (p+1)^{\eta/p} \quad (3.10)$$

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_\infty} = \left(\frac{1}{1-1/(\mu \bar{t})} \right)^{\eta/p} \quad \text{при } t > t_0 \quad (3.11)$$

Последнее означает, что кривая релаксации при $t/t_0 \geq 1$ в относительных координатах

$$\bar{\sigma} = \sigma(t) / \sigma_\infty, \quad \bar{t} = t / t_0 \quad (3.12)$$

не зависит от условий опыта, то есть от σ_0 , а зависит только от констант $\mu, \nu = \eta/p$:

$$\bar{\sigma}(\bar{t}) = (1-1/(\mu \bar{t}))^{-\nu} \quad (3.13)$$

Безразмерная скорость убывания напряжений имеет вид

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{t}} = -\frac{\nu}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu \bar{t}} \right)^{-\nu-1} \frac{1}{\bar{t}^2}$$

и в начале убывания, при $\bar{t} = 1$ получаем

$$\left. \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{t}} \right|_{\bar{t}=1} = -\frac{\nu}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right)^{-\nu-1}$$

что, очевидно, тоже зависит только от констант материала.

Уравнение кривой ползучести в рассматриваемой модели можно получить, предположив, что в области малых напряжений (3.1) оно имеет вид

$$\varepsilon(t) = kt^x \quad (3.14)$$

где k не зависит от времени, а x – искомый показатель степени. Если можно подобрать величину $x = \text{const}$, такую, что при подстановке (3.14) в (2.5) с учетом (3.1) получим тождественно, что $\sigma(t) = \text{const}$, то задача будет решена.

Так как

$$\|\dot{\varepsilon}\|_q = \frac{xk}{(xq - q + 1)^{1/q}} t^{x-1+1/q}, \quad \|\varepsilon\|_p = \frac{k}{(xp + 1)^{1/p}} t^x$$

то основное уравнение $\sigma = A_0 \gamma$ дает

$$\sigma_0 = A_0 \frac{(xp + 1)^{\eta/p} x^\xi}{(xq - q + 1)^{\xi/q}} k^{\xi - \eta + \alpha} t^{(x-1+1/q)\xi - \eta + \alpha} \quad (3.15)$$

В силу условия $\sigma_0 = \text{const}$ показатель при t должен равняться нулю $x\xi - \xi + \xi/q - \eta + \alpha = 0$; откуда

$$x = \xi \frac{q-1}{\xi q + q - \xi} = \frac{\psi}{1+\psi}, \quad \psi = \xi \left(\frac{q-1}{q} \right) \quad (3.16)$$

Подставляя (3.16) в (3.15), находим

$$k = \left(\frac{\sigma_0}{A_0} \right)^{\frac{1}{\psi+1}} \frac{\left(1 - \frac{q}{1+\psi} \right)^{\xi/q}}{\left(1 + \frac{\psi}{1+\psi} p \right)^{\eta/p} \left(\frac{\psi}{1+\psi} \right)^\xi} \quad (3.17)$$

Таким образом (3.14) совместно с (3.16) и (3.17) полностью определяет кривую ползучести при постоянном напряжении σ_0 для низких уровней напряжений (2.5).

4. Рассмотрим общий случай определяющих соотношений (2.1) при условии $\dot{\varepsilon} \geq 0$:

$$\sigma = F(\tilde{\gamma}) \quad (4.1)$$

Во многих случаях естественной является аппроксимация [10]; таким образом примем, что F – дробно-линейная функция

$$\sigma = \frac{A_0 \tilde{\gamma}}{1 + C \tilde{\gamma}} \quad (4.2)$$

Очевидно, что при $\tilde{\gamma} \rightarrow 0$ получаем рассмотренный выше случай типа линейной упругости $\sigma \equiv A_0 \tilde{\gamma}$, что совпадает с выражением (3.1).

Рассмотрим деформирование с постоянной скоростью $a = \text{const}$, $\varepsilon = at > 0$; при этом

$$\|\dot{\varepsilon}\| = at^{1/q}, \quad \|\varepsilon\| = \frac{1}{(p+1)^{1/p}} \varepsilon$$

Отсюда следует

$$\tilde{\gamma} = \frac{a^{(1-\xi/q+\xi)}}{(p+1)^{1/q}} t = \frac{a^{1-\nu}}{\mu} t$$

Подставляя $\tilde{\gamma}$ в (4.2), получаем

$$\sigma = \frac{A_0 (a^{1-\nu} / \mu) t}{1 + C (a^{1-\nu} / \mu) t}$$

или, через деформацию $\varepsilon = at$:

$$\sigma = \frac{A_0 (a^{-\nu} / \mu) \varepsilon}{1 + C (a^{-\nu} / \mu) \varepsilon} \quad (4.3)$$

Это есть уравнение кривой "напряжение – деформация"; $A_0(a^{1-\nu}/\mu)$ – касательный модуль в начале координат, константа C находится из условия согласования зависимости (4.3) с экспериментальной кривой.

Рассмотрим процесс релаксации, когда деформация задается в виде

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} at, & 0 \leq t \leq t_0 \\ at_0 = \text{const}, & t > t_0 \end{cases}$$

В этом случае, согласно (3.8) имеем при $t \geq t_0$:

$$\tilde{\gamma}(t) = \varepsilon_0 a^{-\nu} \left(\frac{1}{1 - p/(p+1)t_0/t} \right)^{\eta/p} \quad (4.4)$$

Подставив (4.4) в (4.1) получим

$$\sigma = \frac{A'_0}{(1 + p't_0/t)^{\eta/p} + C'}; \quad \sigma|_{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{1 + C'}$$

$$\frac{p}{p+1} = p', \quad A'_0 = A_0 \frac{\varepsilon_0}{a^\nu}, \quad C'_0 = C \frac{\varepsilon_0}{a^\nu}$$

5. Для определения констант модели из опытов на деформирование с постоянной скоростью, ползучести и релаксации используем следующие установленные выше соотношения:

1. Зависимость напряжение – время в опыте на релаксацию ($\varepsilon_0 = \text{const}$):

$$\sigma = A a^{q_1(q-1)} \varepsilon_0 \left[1 - t_0 \frac{p}{p+1} \frac{1}{t} \right]^{-p_1} \quad (5.1)$$

Логарифмируя экспериментальную кривую, определим $p_1 = \eta/p$.

2. Из опыта на релаксацию получаем еще одно уравнение для определения констант, так как имеет место соотношение

$$\sigma_0 / \sigma_\infty = (p+1)^{p_1} = (p+1)^{\eta/p}, \quad p_1 = \eta/p \quad (5.2)$$

Таким образом, из уравнений (5.1) и (5.2) можно определить константы η и p .

3. Из зависимости деформация – время в опыте на ползучесть ($\sigma_0 = \text{const}$) $\varepsilon = br^x$ находим показатель степени x , логарифмируя кривую. В то же время

$$x = \frac{\xi - \xi/q}{\xi - \xi/q + 1} \quad (5.3)$$

что дает уравнение для констант ξ и q .

4. Для получения еще одного уравнения используем два опыта по деформированию с постоянной скоростью при разных скоростях a_1 и a_2 :

$$\sigma_1 = A(p+1)^{p_1} a_1^{q_1(q-1)} a_1 t$$

$$\sigma_k = A(p+1)^{p_1} a_2^{q_1(q-1)} a_2 t, \quad q_1 = \xi/q$$

$$\frac{\sigma_k}{\sigma_1} = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{q_1(q-1)} \frac{a_2}{a_1}$$

$$\left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{q_1(q-1)} = \frac{a_1 \sigma_k}{a_2 \sigma_1}$$

$$q_1(q-1) \lg \left(\frac{a_2}{a_1} \right) = \lg \left(\frac{\sigma_k a_1}{\sigma_1 a_2} \right) \quad (5.4)$$

Таким образом, соотношения (5.1) – (5.4) позволяют полностью определить все константы модели.

6. Определяющие соотношения полезно записать в безразмерном виде. Пусть E_* – характерное (максимальное) значение модуля упругости материала, определяемое ультразвуковым методом (динамический модуль). Полагая в соотношении $E(a) = E_*$, находим соответствующее характерное значение скорости деформирования $a_* = (E_* / A_0)^{1/\Psi} (p+1)^{\eta/p\Psi}$. Далее, на экспериментальной кривой деформирования с постоянной скоростью $\sigma = f(\epsilon)$ установим "условный" предел упругости e_s . Этот предел имеет следующий смысл: при деформациях $\epsilon < e_s$ достаточно использовать приближенное соотношение $\sigma = A_0 \dot{\gamma}$; при $\epsilon > e_s$ требуется введение основного определяющего соотношения: $\sigma = F(\tilde{\gamma})$. Примем за характерную деформацию $\epsilon_* = e_s$. Введем характерное время как $t_* = \epsilon_* / a_*$ и характерное напряжение $\sigma_* = E_* \epsilon_*$. Безразмерные величины определим, как обычно, по правилу $\bar{x} = x / x_*$, то есть $\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_*$, $\bar{\epsilon} = \epsilon / \epsilon_*$, $\bar{t} = t / t_*$, $\bar{E} = E / E_*$, $\bar{a} = a / a_*$. В безразмерном виде основные соотношения запишутся следующим образом:

$$\frac{\|\dot{\epsilon}\|_q}{e_s t_*^{(1-q)/q}} = \left[\int_0^{\tau} \left| \frac{d\tilde{\epsilon}}{d\tau} \right|^q d\tau \right]^{1/q}$$

$$\frac{\|\epsilon\|_p}{e_s} = \left[\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} |\tilde{\epsilon}(\tau)|^p d\tau \right]^{1/p}, \quad \tilde{\epsilon}(\tau) \equiv \bar{\epsilon}(\tau t_*)$$

$$\bar{\gamma} \equiv \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma_0} = \frac{|\tilde{\epsilon}|^{\alpha-1} |\dot{\tilde{\epsilon}}|_q^\xi}{\|\tilde{\epsilon}\|_p^\eta} \tilde{\epsilon}$$

$$\gamma_0 = e_s^{1-\Psi} t_*^{-\Psi}, \quad \eta = \alpha + \xi / q - 1$$

Определяющие соотношения преобразуем $\bar{\sigma}_* = F[\gamma_0 \bar{\gamma}(\bar{\epsilon}, \tau)]$. Положим

$$\frac{1}{\sigma_*} F[\gamma_0 \bar{\gamma}(\bar{\epsilon}, \tau)] \equiv \tilde{F}(\tilde{\gamma})$$

Тогда окончательно получим $\bar{\sigma} = \tilde{F}(\tilde{\gamma})$.

7. Рассмотрим второй основной случай модели (2.1), получающийся, если в (2.2) положить $\xi = \beta = 0$, что очевидно дает

$$\tilde{\gamma}|_{\xi=\beta=0} = \gamma = \frac{|\epsilon|^{\alpha-1}}{\|\epsilon\|_p^\eta} \epsilon \quad (7.1)$$

причем, как и в общей модели

$$\sigma = F(\tilde{\gamma}) + A_1 \left[1 - \frac{|\epsilon|}{\epsilon_{\max}} \right]^k \int_0^t (t-\tau)^m \epsilon(\tau) d\tau$$

Здесь A_1, m, k – константы материала; F – экспериментальная функция, а оператор $\tilde{\gamma}$ определен, как и прежде, на функциях, непрерывных на отрезке $[0, t]$ и имеющих ограниченную производную, следующим образом [11]:

$$\gamma = \left[\frac{|\epsilon|}{\|\epsilon\|_p} \right]^{\alpha-\eta} |\epsilon|$$

Здесь p, μ, α – константы материала, а функция F находится из опыта на деформирование с постоянной скоростью. Заметим, что (1.5) получается из (2.1) при $F(\gamma) = A_0\gamma, \mu = \eta$

Рассмотрим поведение соотношений (2.1) на основных характерных процессах.

Деформирование с постоянной скоростью $\varepsilon = at, a = \text{const}$. В этом случае γ определяется выражением $\gamma = (p+1)^{\mu/p} a^{\alpha-\mu} t^{\alpha-\mu-\mu/p}$. Будем считать, что введенная выше функция $F(\gamma)$ может быть разложена в ряд при $\gamma = 0$. Учитывая, что $F(0) = 0$, имеем

$$F(\gamma) = \frac{dF}{d\gamma} \Big|_{\gamma=0} \gamma + \frac{1}{2} \frac{d^2F}{d\gamma^2} \Big|_{\gamma=0} \gamma^2 + \dots$$

Рассмотрим два характерных случая:

1. Если $dF/d\gamma|_{\gamma=0} = H \neq 0$, то при малых γ имеем

$$F(\gamma) \approx H\gamma = (p+1)^{\mu/p} H a^{\alpha-\mu} t^{\alpha-\mu-\mu/p}$$

2. Если $dF/d\gamma|_{\gamma=0} = 0, d^2F/d\gamma^2|_{\gamma=0} = G \neq 0$, то имеем

$$F(\gamma) \approx \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{1}{2} G (p+1)^{2\mu/p} a^{2\alpha-\mu} t^{2(\alpha-\mu-\mu/p)}$$

Требование того, что при малых $\varepsilon = at$ из (7) должен следовать закон Гука, дает условие:

в случае (1): $\alpha - \mu - \mu/p = 1$

в случае (2): $2(\alpha - \mu - \mu/p) = 1$

В первом случае приемлемой может оказаться аппроксимация [10]:

$$F = \frac{A'\gamma}{1 + C'\gamma}, \quad A', C' = \text{const} \quad (7.2)$$

Во втором случае [11]:

$$F = \frac{A\gamma^2}{1 + C\gamma}, \quad A, C = \text{const} \quad (7.3)$$

В этом случае определяющие соотношения (2.1) с условием $\varepsilon(t) = \varepsilon_{\text{max}}$ запишутся в виде

$$\sigma = \frac{A\gamma^2}{1 + C\gamma}, \quad \gamma = Q\sqrt{t}, \quad Q = (p+1)^{\mu/p} a^{\alpha-\mu},$$

При растяжении с постоянной скоростью имеем

$$\sigma = \frac{AQ\sqrt{t}}{1 + CQ\sqrt{t}} \sqrt{t} = \frac{AQ t}{1 + CQ\sqrt{t}}$$

Отсюда зависимость "напряжение – деформация" имеет вид

$$\sigma = \frac{AQ\varepsilon/a}{1 + CQ\sqrt{\varepsilon/a}}$$

При достаточно малых ε знаменатель близок к 1 и

$$\sigma \cong E(a)\varepsilon, \quad E(a) = A(p+1)^{\mu/p} a^{\mu/p-1/2}$$

Таким образом, получаем закон Гука с модулем упругости, зависящим от скорости деформации a .

Отметим, что аппроксимация (7.2) используется, если кривая зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (при постоянной скорости деформирования) имеет горизонтальную асимптоту, а аппроксимация (7.3) – в противном случае.

В случае релаксации реальный процесс состоит из деформирования (например, с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon} = a$) до деформации $\varepsilon = at_0$, которая затем поддерживается постоянной

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} at & \text{при } t < t_0 \\ at_0 = \text{const} & \text{при } t \geq t_0 \end{cases}$$

Процесс по напряжениям в этом случае при $t > t_0$ имеет вид

$$\sigma = \frac{A\varepsilon_0^{\alpha-\mu}}{(x^{\mu/p} - C\varepsilon_0^{\alpha-\mu})x^{\mu/p}}, \quad x = t - t_0 \frac{p}{p+1} \quad (7.4)$$

При достаточно большом времени t соотношение (7.4) упрощается

$$\sigma = A\varepsilon_0^{\alpha-\mu} / t^{2\mu/p}$$

Из последнего выражения видно, что кривая релаксации имеет нулевую асимптоту.

Полезным свойством предлагаемой модели является то, что при неубывающей по модулю деформации определяющие соотношения (2.1) и, вообще говоря, любые соотношения, которые могут быть записаны в виде

$$\Phi(\sigma) = \varepsilon^\beta / \left(\int_0^t |\varepsilon|^p dt \right)^q, \quad \Phi(x) = F^{-1}(x) \text{ при } \varepsilon(t) \geq 0 \quad (7.5)$$

(где $\Phi = \Phi(\sigma)$ – неубывающая функция от $\sigma(t)$) допускают точное обращение. Подчеркнем, что в этом смысле $\Phi = \Phi(\sigma)$ считается известной функцией времени, а $\varepsilon = \varepsilon(t)$ подлежит определению. Действительно, из (7.5) получаем

$$\left(\int_0^t \varepsilon^p dt \right)^q = \frac{\varepsilon^\beta}{\Phi}$$

Отсюда следует

$$\varepsilon^p = \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon^{\beta/q}}{\Phi^{1/q}} \right) \quad (7.6)$$

Так как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon^{\beta/q}}{\Phi^{1/q}} \right) = \frac{\varepsilon^{\beta/q} ((\beta\dot{\varepsilon})/(q\varepsilon) - \dot{\Phi}/(q\Phi))}{\Phi^{1/q}} \quad (7.7)$$

то, подставляя (7.7) в (7.6), получаем дифференциальное уравнение относительно $\varepsilon(t)$:

$$\dot{\varepsilon} + f(t)\varepsilon^\psi + g(t)\varepsilon = 0 \quad (7.8)$$

$$\psi = p - \beta/q + 1, \quad f(t) \equiv -\frac{\beta}{q} \frac{\dot{\Phi}^{1/q}}{\Phi}, \quad g(t) \equiv -\frac{1}{\beta} \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}$$

Уравнение (7.8) известно [12] и его решение имеет вид

$$\varepsilon^{-(p-\beta/q)} = -\frac{p-\beta/q}{\beta/q} H(t) \int \frac{\Phi^{1/q}}{H(t)} dt \quad (7.9)$$

$$H(t) \equiv \exp \left[(\psi - 1) \int g(t) dt \right] \quad (7.10)$$

Входящая в решение функция $H(t)$ может быть вычислена в общем виде. Так как

$$H(t) = \exp\left[(\psi - 1) \int g(t) dt\right] = \exp\left[\int \frac{1 - \psi}{\beta} \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} dt\right]$$

то будем иметь

$$H(t) = \exp\left[\int \frac{1 - \psi}{\beta} \frac{d\Phi}{\Phi}\right] = \exp\left[\int \frac{1 - \psi}{\beta} \ln(C_1 \Phi)\right] = C_1 \Phi^{(1 - \psi)/\beta} \quad (7.11)$$

где C_1 – константа интегрирования.

Окончательно выражение деформации $\varepsilon(t)$ через напряжения $\sigma(t)$ получаем в виде:

$$\varepsilon(t) = B_0 \Phi^\eta \left(\int_0^t \Phi^\chi dt\right)^\lambda \quad (7.12)$$

$$B_0 = \left(\frac{\beta - pq}{\beta}\right)^{q/(\beta - pq)}, \quad \eta = \frac{1}{\beta}, \quad \chi = \frac{p}{\beta}, \quad \lambda = \frac{q}{\beta - pq}$$

Аналогичный результат имеем и при $\varepsilon(t) \leq 0$.

Приближенное выражение для квазиобращения определяющего соотношения (1.3) зададим в виде

$$\varepsilon(t) = B_0 \Phi(\sigma)^\eta \left(\int_0^t \Phi(\sigma)^\chi dt\right)^\lambda + B_1 \left(1 - \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_{\max}}\right) \int_0^t (t - \tau)^{\tilde{\gamma}} \sigma(\tau) dt \quad (7.13)$$

Здесь первый член в правой части представляет собой точное обращение выражения $\sigma = F(\gamma)$; второй член содержит вольтерровский оператор, ядро которого предполагается определенным экспериментально.

Представление (7.13) удобно преобразовать к виду:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \frac{K_2 + K_1}{K_2 + \varepsilon_{\max}}$$

$$K_1 = B_0 \Phi(\sigma)^\eta \left(\int_0^t \Phi(\sigma)^\chi dt\right)^\lambda, \quad K_2 = B_1 \int_0^t (t - \tau)^{\tilde{\gamma}} \sigma(\tau) dt$$

Применимость этого приближенного обращения подтверждается экспериментально¹. На фиг. 1 представлены результаты измерений в опыте по циклическому нагружению крутящим моментом цилиндрического образца из асфальтобетона и сравнение их с результатом расчета по формуле (7.13) при следующих значениях констант: $B_0 = 1 \cdot 10^{-4}$, $\eta = 0.5$, $\chi = 0.67$, $\lambda = 0.29$, $B_1 = 2.79 \cdot 10^{-4} \tilde{\gamma} = 0.65$.

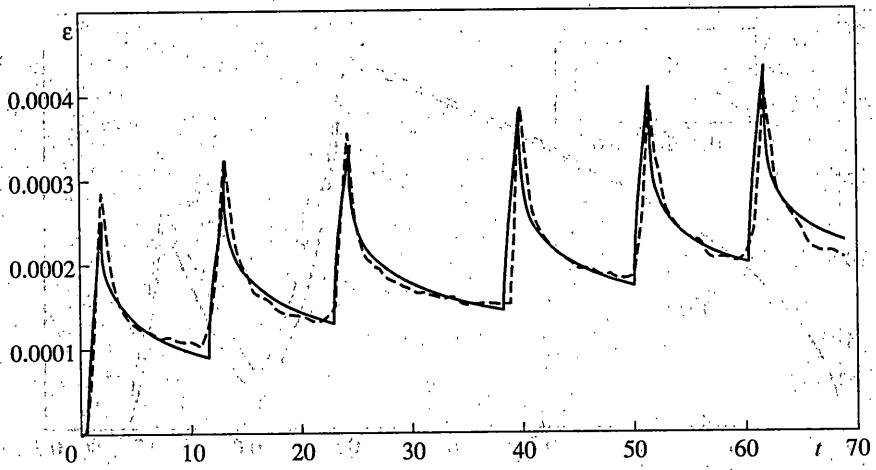
С помощью точного соотношения (7.12) можно непосредственно получить кривые ползучести для модели (2.1), подставив в (7.12) процесс вида

$$\sigma(t) = \begin{cases} bt & \text{при } t < t_0 \\ bt_0 = \sigma_0 = \text{const} & \text{при } t \geq t_0 \end{cases} \quad (7.14)$$

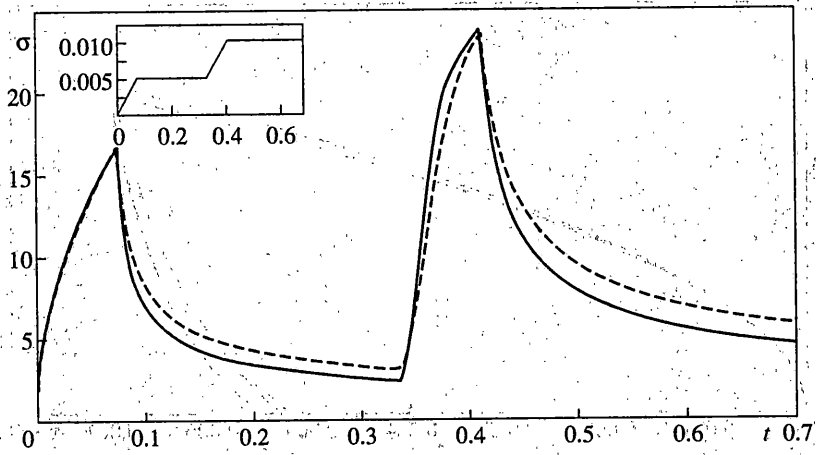
При достаточно больших по сравнению с t_0 значениях t зависимость $\varepsilon(t)$ близка к степенной

$$\varepsilon = B_0 \Phi^{\eta + \chi \lambda} t^\lambda, \quad \Phi_0 = \Phi(\sigma_0) = \text{const}$$

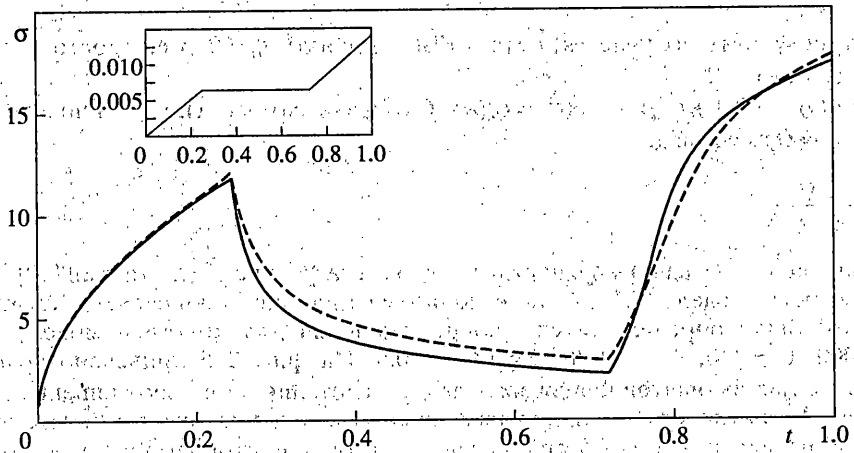
¹ Соответствующие опыты были проведены авторами в Институте Механики МГУ им. М.В. Ломоносова.



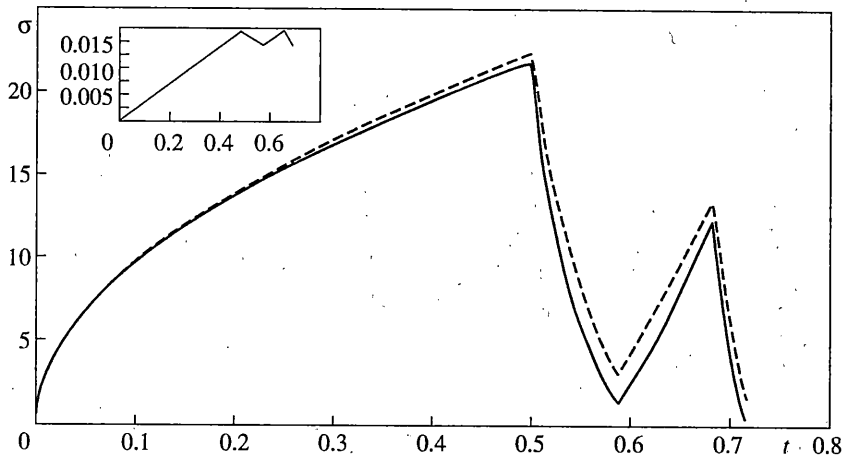
Фиг. 1



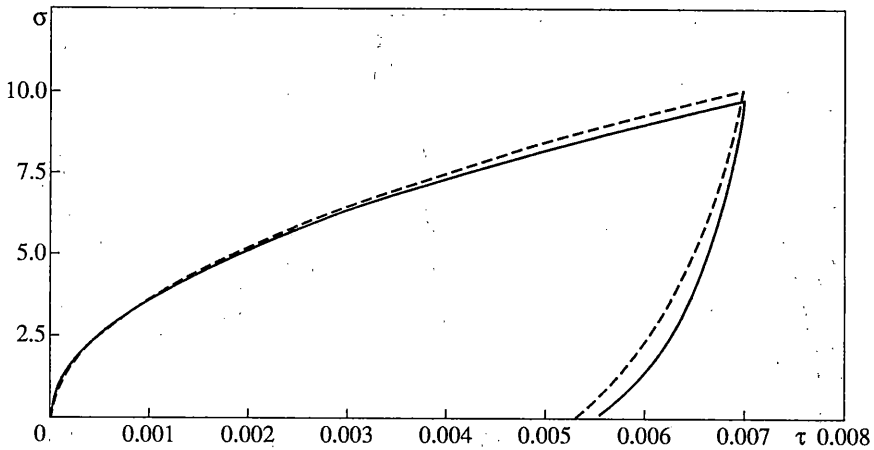
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Этот же результат получается, если в (7.14) принять $t_0 = 0$, т.е. просто положить $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ в (7.12).

Если $F(\gamma) = A\gamma/(1 + C'\gamma)$, то $\Phi(\sigma) = \sigma/(A - C'\sigma)$ и зависимость скорости ползучести от напряжения σ имеет вид:

$$\dot{\epsilon} \sim \left(\frac{\sigma}{A - C'\sigma} \right)^{\eta + \chi\lambda}$$

где величина показателя $\eta + \chi\lambda$ порядка 1, что согласуется с результатами [10].

Обобщенная модель (7.12) была использована для описания системы опытов [8]. При этом были определены следующие значения для констант модели (7.12): $A_0 = 78000$, $C = 320$, $A_1 = -A_0/C$, $p = 13$, $q = 0.5$. На фиг. 2–5 приведено сравнение кривых, взятых из опытов Фицджеральда с рассчитанными по соотношениям (7.12). Видно, что совокупность опытов, приведенных в [8], включающая в себя как простые опыты на релаксацию и деформирование с постоянной скоростью, так и опыты со ступенчатым процессом деформирования, включающим разгрузку, описывается с хорошей точностью.

Отметим, что по предварительным данным асфальтобетон при температурах 0–80°С может служить моделирующим материалом для углеродных и керамических материалов при высоких температурах, причем регулируемыми параметрами асфальтобетона является процентное содержание песка, использование полимерных модификаторов и температура опыта.

Тензорные определяющие соотношения для рассматриваемой среды удобно записать в виде, аналогичном уравнениям теории малых упругопластических деформаций [13], введя, наряду с тензорами напряжений σ_{ij} и малых деформаций ϵ_{ij} соответствующие девиаторы s_{ij} и e_{ij} и "интенсивности" $\sigma_u = (\frac{2}{3}s_{ij}s_{ij})^{1/2}$, $\epsilon_u = (\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij})^{1/2}$, обозначив, кроме того

$$\gamma_u \equiv \gamma(e_u) \equiv e_u^\beta / \left(\int_0^t e_u^\beta dt \right)^q, \quad \theta = \epsilon_{ij}\delta_{ij}$$

Тогда определяющие соотношения запишутся так (здесь приведен характерный случай несжимаемой среды $\theta = 0$):

$$s_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3e_u} e_{ij}, \quad \sigma_u = F(\gamma_u), \quad \theta = 0$$

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (гранты № 97-01-00991, № 99-01-00094).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дэй У.А. Термодинамика простых сред с затухающей памятью. М.: Мир, 1974. 192 с.
2. Ильющин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 128 с.
3. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
4. Расчеты на прочность в машиностроении / Под ред. С.Д. Пономарева. Т. 2. М.: МАШГИЗ, 1958. 974 с.
5. Розовский М.И. О некоторых особенностях упругонаследственных сред // Итоги науки. 1967. С. 87–92.
6. Ключников В.Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1994. 190 с.
7. Беляев Н.М. Применение теории пластических деформаций к расчетам на ползучесть деталей при высоких температурах // Изв. АН СССР. ОТН. 1943. № 7. С. 35.
8. Fitzgerald J.E., Vakili J. Nonlinear Characterization of Sand-asphalt Concrete by Means of Permanent-memory Norms // Proc. of the SESA. 1960. V. 30. No. 2. P. 504–510.
9. Coleman B.D., Noll W. An Approximation Theorem for Functionals with Applications in Continuum Mechanics // Arch. Rat. Mech. Anal. V. 6. 1960. 355 p.
10. Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнения состояний при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 86–91.
11. Басалов Ю.Г., Кузнецов В.Н. Определяющие соотношения для малых вязкоупруго-пластических деформаций ползучести // Изв. РАН. 1998. № 1. С. 29–34.
12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961. 704 с.
13. Ильющин А.А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.07.2000