

УДК 539.374

© 2000 г. Е.В. ЛОМАКИН

## ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ДИЛАТИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Процесс пластического деформирования многих материалов включает в себя не только механизм скольжения, но также развитие существующих и образование новых элементов несплошности, разрушение и перемещение структурных элементов, приводящих к дилатансии среды [1]. Теоретическое описание процесса дилатансии обычно основывается на использовании в условии пластичности гидростатической компоненты напряжений [2–7]. На основе численного моделирования поведения пористого материала с использованием трехмерной ячеистой структуры установлено, что характеристики пластического разрыхления зависят не только от величины среднего нормального напряжения, но и от параметра вида напряженного состояния, характеризуемого отношением среднего напряжения к интенсивности касательных напряжений [8–11]. Этот вывод подтверждается результатами многочисленных экспериментальных исследований пластических свойств материалов, содержащих различного рода неоднородности структуры [12–14]. Поведение неоднородностей структуры зависит от характера внешних воздействий, поэтому эффект дилатансии среды не носит, в общем случае, чисто кинематический характер [15, 16], а зависит от вида нагружения среды.

В данной работе рассмотрен возможный подход к описанию зависимости характеристик пластического деформирования дилатирующей среды от реализуемого при нагружении вида напряженного состояния. Исследована зависимость характеристик предельного состояния твердых тел от параметров чувствительности пластических свойств материалов к изменению вида напряженного состояния применительно к условиям плоской деформации. Рассмотрен способ построения полей скоростей перемещений, позволяющий исследовать характер дилатансии среды и провести согласование между полями напряжений и скоростей деформаций в пластических областях.

1. Условие пластичности для дилатирующей среды примем в следующем обобщенном виде [13]:

$$F(\sigma_{ij}) = f(\xi)\sigma_0 = k \quad (1.1)$$

Здесь  $\xi = \sigma/\sigma_0$  – параметр вида напряженного состояния, характеризующий в среднем соотношение между нормальными и касательными напряжениями в точке сплошной среды,  $\sigma = 1/3\sigma_{ij}$  – среднее нормальное напряжение,  $\sigma_0 = \sqrt{3/2 S_{ij}S_{ij}}$  – интенсивность касательных напряжений,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ . Не нарушая общности, можно принять, что при чистом сдвиге ( $\xi = 0$ ) значение функции  $f(0) = 1$ . Тогда  $k = \sqrt{3}\tau_s$ , где  $\tau_s$  – предел текучести при сдвиге. При произвольном виде напряженного состояния параметр  $\xi$  принимает значения в диапазоне от  $-\infty$  (равномерное трехосное сжатие) до  $\infty$  (равномерное трехосное растяжение).

Принимая различные аналитические выражения для функции  $f(\xi)$ , можно получить некоторые из известных условий пластичности для гранулированных, пористых и пов-

режденных сред. В случае линейной функции

$$f(\xi) = 1 + C\xi \quad (1.2)$$

из (1.1) получим обобщенное условие Кулона – Мора  $\sigma_0 + C\sigma = k$  [12], находящее широкое применение в механике грунтов.

Если функцию  $f(\xi)$  принять в виде

$$f(\xi) = \sqrt{1 + a\xi^2} \quad (a > 0) \quad (1.3)$$

то получим условие пластичности Грина  $\sigma_0^2 + \alpha\sigma^2 = k^2$  [5], предложенное для пористых сред. При этом считалось, что коэффициенты  $\alpha$  и  $k$  представляют собой функции параметра пористости среды.

При  $f(\xi) \equiv 1$  условие (1.1) совпадает с условием пластичности Губера – Мизеса  $\sigma_0 = k$  [17]. Для различных материалов рассмотрены также другие виды функции  $f(\xi)$  [13].

Принимая ассоциированный с условием (1.1) закон течения  $\dot{\epsilon}_{ij} = h' \partial F / \partial \sigma_{ij}$ , в случае жесткопластического тела получим связь между скоростями деформаций и напряжениями

$$\dot{\epsilon}_{ij} = h' [\frac{1}{3} \Lambda(\xi) \delta_{ij} + \frac{2}{3} \lambda(\xi) f(\xi) S_{ij} / k] \quad (1.4)$$

$$\Lambda(\xi) = f'(\xi), \quad \lambda(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi), \quad h' = H / \chi(\xi)$$

$$H = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}, \quad \chi(\xi) = \sqrt{\frac{1}{3} \Lambda^2(\xi) + \frac{2}{3} \lambda^2(\xi)}$$

Функции  $\lambda(\xi)$  и  $\Lambda(\xi)$  и их производные связаны соотношениями  $\lambda(\xi) + \xi \Lambda(\xi) = f(\xi)$ ,  $\lambda'(\xi) + \xi \Lambda'(\xi) = 0$ . Согласно (1.4) можно получить выражения для интенсивности скоростей пластических деформаций  $\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} = h' \lambda(\xi)$ , где  $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \delta_{ij}$ , и скорости объемной деформации  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij} = h' \Lambda(\xi)$ . Из данных выражений видно, что функция  $\lambda(\xi)$  должна быть положительно определенной. При этом скорость остаточной объемной деформации пропорциональна интенсивности скоростей деформации

$$\dot{\epsilon} = \Gamma \Lambda(\xi) / \lambda(\xi) \quad (1.5)$$

Коэффициент пропорциональности  $\Lambda(\xi) / \lambda(\xi)$ , в общем случае, зависит от параметра вида напряженного состояния  $\xi$ , т.е. принимает различные значения для разных соотношений между нормальными и касательными напряжениями в среде. В случае, когда функция  $f(\xi)$  представляется выражением (1.2), коэффициент в соотношении (1.5) постоянный.

Согласно (1.4) скорость диссипации механической энергии, приходящаяся на единицу объема,  $D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = kH / \chi(\xi)$ . Поверхность текучести в пространстве напряжений, определяемая выражением (1.1), является невогнутой при выполнении условия  $f''(\xi) \geq 0$ .

2. В случае плоской деформации  $\dot{\epsilon}_{33} = \dot{\epsilon}_{13} = \dot{\epsilon}_{23} = 0$  и, воспользовавшись соотношениями (1.4), можно выразить напряжение  $\sigma_{33}$  через  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  и исключить его из условия пластичности (1.1). В результате получим

$$\sigma_{33} = \sigma - \frac{2}{9} \sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{\lambda(\xi)}, \quad \sigma_0 = S_0 \left[ 1 - \frac{\Lambda^2(\xi)}{9\lambda^2(\xi)} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma = S - \sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{9\lambda(\xi)}$$

$$S_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2]^{\frac{1}{2}}, \quad S = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2.1)$$

Вводя параметр  $\zeta = S/S_0$ , с помощью (2.1) можно выразить  $\zeta$  через  $\xi$ :

$$\zeta = [\xi + \frac{1}{9} \Lambda(\xi) / \lambda(\xi)] [1 - \frac{1}{9} \Lambda^2(\xi) / \lambda^2(\xi)]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

Равенство (2.2) определяет взаимнооднозначное соответствие между  $\xi$  и  $\zeta$  при выполнении условий

$$3\lambda(\xi) > |\Lambda(\xi)|, \quad \Lambda'(\xi) \geq 0 \quad (2.3)$$

Второе условие (2.3) совпадает с условием невогнутости поверхности текучести (1.1). На основе (2.1) и (2.2) условие пластичности (1.1) может быть представлено в виде

$$f_1(\zeta)S_0 = k, \quad f_1(\zeta) = f[\xi(\zeta)][1 - 1/9 \Lambda_1^2(\zeta) / \lambda_1^2(\zeta)]^{-1/2} \quad (2.4)$$

$$\Lambda_1(\zeta) = \Lambda[\xi(\zeta)], \quad \lambda_1(\zeta) = \lambda[\xi(\zeta)]$$

Поскольку  $\zeta = S/S_0 = Sf_1(\zeta)/k$ , то параметр  $\zeta$  и напряжение  $S_0$  можно выразить через  $S$ , причем зависимость  $\zeta = \zeta(S)$  взаимнооднозначная при выполнении условий (2.3). При этом  $S_0 = \sqrt{3}kF(S)$ , где  $F(S) = 3^{-1/2} f_1^{-1}[\zeta(S)]$ . Тогда известные формулы для напряжений в случае плоской деформации могут быть представлены в виде [18]:

$$\sigma_{11} = S - kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{22} = S + kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{12} = kF(S) \cos 2\theta \quad (2.5)$$

Здесь  $\theta$  – угол между осью  $x_1$  и направлением площадки, на которой действует максимальное касательное напряжение. Подставляя выражения (2.5) в уравнения равновесия, получим систему уравнений для определения напряженного состояния в среде, которая имеет такой же вид, как и уравнения общей плоской задачи идеальнопластической несжимаемой среды [19, 20]:

$$S_{,1} - kF'(S)(S_{,1} \sin 2\theta - S_{,2} \cos 2\theta) - 2kF(S)(\theta_{,1} \cos 2\theta + \theta_{,2} \sin 2\theta) = 0 \quad (2.6)$$

$$S_{,2} + kF'(S)(S_{,1} \cos 2\theta + S_{,2} \sin 2\theta) - 2kF(S)(\theta_{,1} \sin 2\theta - \theta_{,2} \cos 2\theta) = 0$$

Штрихом обозначена производная по  $S$ . Характеристики системы уравнений (2.6), которые можно обозначить индексами  $\alpha$  и  $\beta$ , а также соотношения вдоль них имеют вид

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} \varphi_{\alpha, \beta} = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - k^2 F'^2}}{-kF' + \sin 2\theta}, \quad dS \mp \frac{2kF d\theta}{\sqrt{1 - k^2 F'^2}} = 0 \quad (2.7)$$

Рассмотрим случай гиперболичности системы (2.6), когда  $|kF'| < 1$ . Это накладывает определенные ограничения на степень чувствительности пластических свойств среды к изменению вида напряженного состояния, но для многих материалов оно выполняется [13]. Характеристики (2.7) ортогональны только в случае  $f(\xi) \equiv \text{const}$ , когда условие (1.1) совпадает с условием пластичности Губера–Мизеса.

Используя соотношения (1.4), (2.4) и (2.5), получим систему уравнений для скоростей

$$(v_{1,2} + v_{2,1}) \operatorname{tg} 2\theta + v_{1,1} - v_{2,2} = 0 \quad (2.8)$$

$$(v_{1,1} + v_{2,2}) \cos 2\theta + (v_{1,2} + v_{2,1}) kF' = 0$$

Характеристики системы уравнений (2.8) совпадают с характеристиками уравнений (2.6) и вдоль них выполняются соотношения Гейрингер [19]:

$$dv_\alpha - v_3 d\varphi_\alpha = 0, \quad dv_\beta - v_4 d\varphi_\beta = 0 \quad (2.9)$$

Здесь  $v_\alpha$  и  $v_\beta$  – скорости вдоль характеристик  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $v_3$  и  $v_4$  – нормальные к характеристикам компоненты скорости

$$v_3 = (v_\beta - v_\alpha \cos \varphi) / \sin \varphi, \quad v_4 = (v_\beta \cos \varphi - v_\alpha) / \sin \varphi, \quad \varphi = \varphi_\beta - \varphi_\alpha \quad (2.10)$$

Соотношения (2.7) вдоль характеристик могут быть проинтегрированы и для частных видов функции  $f(\xi)$  представлены в конечном виде. В случае функции  $f(\xi)$ , представленной выражением (1.2), зависимость между параметрами  $\xi$  и  $\zeta$  линейная  $\xi = \sqrt{1 - C^2/9}\zeta - C/9$  и для функции  $F(S)$  получаем выражение

$$F(S) = m(C^{-1} - S/k), \quad m = \sqrt{3}C/\sqrt{9 - C^2} \quad (2.11)$$

При этом соотношения вдоль характеристик имеют вид

$$\operatorname{tg} \varphi_{\alpha, \beta} = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - m^2}}{m + \sin 2\theta}, \quad \frac{\sqrt{1 - m^2}}{2m} \ln \left( 1 - C \frac{S}{k} \right) \pm \theta = \text{const} \quad (2.12)$$

Система уравнений (2.6) гиперболическая при  $|m| < 1$ , что соответствует  $|C| < 3/2$ . При положительных значениях  $C$  пределы текучести в условиях сжимающих напряжений превышают пределы текучести при растяжении.

Рассмотрим случай, когда  $f(\xi)$  имеет вид (1.3). При  $\alpha \geq 0$  поверхность текучести (1.1) выпуклая. Случай, когда  $\alpha = 0$ , соответствует условию Губера-Мизеса. Из соотношения (2.2) находим  $\xi = \zeta / \sqrt{(1 + \alpha/9)^2 + \alpha^2 \zeta^2 / 9}$ . Функция  $f_1(\zeta)$  в условии (2.4) имеет вид  $f_1(\zeta) = \sqrt{1 + \beta \zeta^2}$ , где  $\beta = \alpha / (1 + \alpha/9)$ . При этом функция  $F(S) = \sqrt{1 - \beta S^2 / k^2} / \sqrt{3}$ . Условие гиперболичности системы (2.6) сводится к неравенству  $(S/k)^2 < 3 / [\beta(3 + \beta)]$ . Уравнения характеристик и соотношения вдоль них имеют вид

$$\operatorname{tg} \varphi_{\alpha, \beta} = \frac{-\cos 2\theta \sqrt{1 - (\beta S/k)^2 / [3(1 - \beta S^2/k^2)]}}{\beta S/k \sqrt{3(1 - \beta S^2/k^2)} + \sin 2\theta} \quad (2.13)$$

$$\sqrt{\frac{3 + \beta}{\beta}} \arcsin \left[ \sqrt{\frac{\beta(3 + \beta)}{3}} \frac{S}{k} \right] - \arcsin \left[ \frac{\beta S}{k \sqrt{3(1 - \beta S^2/k^2)}} \right] \mp 2\theta = \text{const}$$

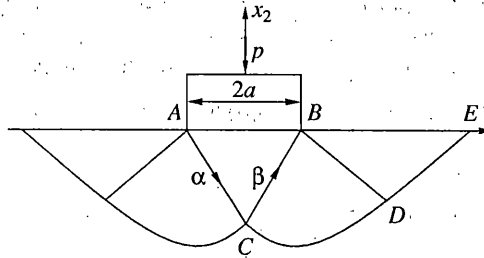
Поскольку при формулировке условия пластичности считалось, что коэффициенты  $\alpha$  и  $k$  в выражении (1.3) зависят от пористости среды, то в рамках рассматриваемого подхода уравнения (2.13) могут быть использованы для расчета характеристик предельного состояния тел с некоторым определенным значением параметра пористости.

Нетрудно показать, что в среде, поведении которой характеризуется определяющими соотношениями (1.4), разрыв скорости перемещений невозможен. Действительно, скорости деформации при переходе через линию разрыва определяются выражениями [4]  $\epsilon_n = \partial v_n / \partial n$ ,  $\epsilon_t = 0$ ,  $2\epsilon_m = \partial v_t / \partial n$ , где через  $t$  и  $n$  обозначены касательное и нормальное направление к линии разрыва скорости. Из физических соображений можно допустить только разрыв касательной составляющей скорости  $v_t$ . Из уравнений (2.8), записанных в системе координат  $(t, n)$ , следует, что линия разрыва касательной составляющей скорости совпадает с одной из характеристик (2.7) и на этой линии

$$\frac{\partial}{\partial n} [\pm \sqrt{1 - k^2 F'^2} v_n + 2kF'v_t] = 0 \quad (2.14)$$

Поскольку напряжения на характеристиках непрерывны и значения нормальной составляющей скорости с разных сторон от линии разрыва равны,  $v_n^+ = v_n^-$ , то из (2.14) следует, что касательная составляющая скорости также не имеет разрыва,  $v_t^+ = v_t^-$ .

3. Влияние зависимости характеристик пластичности среды от вида напряженного состояния на распределение напряжений в пластических областях, а также метод



Фиг. 1

построения полей скоростей, характеризующих дилатансию среды, можно проиллюстрировать на основе одной из простейших задач о вдавлении штампа с плоским основанием в жесткопластическое полупространство.

При помощи формул (2.5) можно получить выражения для граничных значений нормального и касательного напряжений

$$\sigma_n = S - kF(S)\sin 2(\theta - \varphi); \quad \tau_n = kF(S)\cos 2(\theta - \varphi) \quad (3.1)$$

Здесь  $\varphi$  — угол между нормалью к границе и осью  $x_1$ . В случае отсутствия касательных напряжений на границе из (3.1) следует

$$\theta - \varphi = \pm \pi/4 + n\pi; \quad S = \sigma_n \pm kF(S) \quad (3.2)$$

Знак в выражении (3.2) определяется исходя из механической постановки задачи на основе знака нормального напряжения  $\sigma_t = 2S - \sigma_n$  у контура границы.

Проведем расчеты для функций  $f(\xi)$  и  $F(S)$ , представленных выражениями (1.2) и (2.11). На фиг. 1 показан один из возможных случаев распределения характеристик в предельном состоянии для значений  $C > 0$ . В области BDE угол  $\theta = \pi/4$  и напряжение  $S$  определяется из условия (3.2) при  $\sigma_n = 0$ :

$$S = -km/[C(1 - m)] \quad (3.3)$$

В данной области реализуется однородное напряженное состояние двухосного сжатия. Используя формулы (2.1), (2.5) и (3.3), находим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -2km/[C(1 - m)], \quad \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{33} &= -km(1 + m)/[C(1 - m)], \quad \sigma_{12} = 0 \end{aligned}$$

В области ABC угол  $\theta = -\pi/4$  и из соотношений (2.11) вдоль характеристик, используя (3.3), находим

$$S = (k/C)[1 - 1/(1 - m)\exp(\pi m/\sqrt{1 - m^2})] \quad (3.4)$$

Выражения для напряжений в области ABC имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (1 - m)S + km/C, \quad \sigma_{22} = (1 + m)S - km/C \\ \sigma_{33} &= (1 + m^2)S - km^2/C, \quad \sigma_{12} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь  $S/k$  представлено выражением (3.4). Предельная нагрузка  $p = 2a\sigma_{22}$ , где  $\sigma_{22}$  определяется выражением (3.5). В случае несжимаемого материала предельная нагрузка  $p_* = 2ak(2 + \pi)/\sqrt{3}$ . В табл. 1 приведены значения напряжений в области ABC, отношения предела текучести при сжатии  $\sigma_s^-$  к пределу текучести при растяжении  $\sigma_s^+$ , вычисленные по формулам (1.1), (1.2), (3.4), (3.5) для разных значений коэффициента  $C$ . Приведенные значения свидетельствуют о том, что в области ABC реализу-

| $C$                       | 0.12  | 0.5   | 0.8    | 1      |
|---------------------------|-------|-------|--------|--------|
| $\sigma_s^- / \sigma_s^+$ | 1.08  | 1.41  | 1.74   | 1.98   |
| $\sigma_{11}/k$           | -2.05 | -3.24 | -5.72  | -10.44 |
| $\sigma_{22}/k$           | -3.6  | -7.58 | -18.59 | -46.71 |
| $\sigma_{33}/k$           | -2.88 | -6.05 | -15.24 | -39.67 |
| $p/p_*$                   | 1.2   | 2.5   | 6.2    | 12.5   |

ется напряженное состояние неравномерного трехосного сжатия. В последней графе таблицы приведены значения отношения предельных нагрузок, полученных на основе выражений (3.5), к нагрузке  $p_*$ . При данном виде нагружения даже незначительное различие пределов текучести при растяжении и сжатии оказывает заметное влияние на величину предельной нагрузки. Например, при  $C = 0.12$ , когда отношение  $\sigma_s^- / \sigma_s^+ = 1,08$ , предельная нагрузка превышает значение  $p_*$  в 1.2 раза. При исследовании предельного состояния балок с надрезами это влияние было не столь существенным [21, 22].

Исследуем распределение скоростей в пластических областях. Поскольку пластическое течение рассматриваемых сред сопровождается дилатансией, то традиционное построение разрывного поля скоростей не может быть использовано без каких-либо дополнительных гипотез о поведении среды в окрестности предполагаемой поверхности разрыва. Поэтому рассмотрим вариант построения непрерывного поля скоростей, характеризующего дилатансию среды.

В области  $ABC$  напряжения постоянны и согласно (1.4) скорости деформаций также постоянны. Поэтому скорости перемещений могут быть представлены в виде

$$u_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad v_2 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \quad (3.6)$$

Вследствие симметрии распределения скорости  $v_1$  относительно оси  $x_2$  находим  $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$ . Используя условия на поверхности штампа  $|x_1| \leq a, x_2 = 0, v_2 = -V$ , где  $V$  — скорость вдавливания штампа, находим  $\beta_0 = -V, \beta_1 = 0$ . Таким образом, в выражениях (3.6) остаются два коэффициента, подлежащие определению

$$u_1 = \alpha_1 x_1, \quad v_2 = -V + \beta_2 x_2 \quad (3.7)$$

Согласно (2.12) углы наклона характеристик в области  $ABC$  определяются выражениями

$$\operatorname{tg} \varphi_\alpha = -\sqrt{(1+m)/(1-m)}, \quad \operatorname{tg} \varphi_\beta = \sqrt{(1+m)/(1-m)} \quad (3.8)$$

На основе (3.7) и (3.8) с помощью формул преобразования находим выражения для скоростей вдоль характеристик

$$v_\alpha = \alpha_1 x_1 \sqrt{(1-m)/2} - (\beta_2 x_2 - V) \sqrt{(1+m)/2} \quad (3.9)$$

$$v_\beta = \alpha_1 x_1 \sqrt{(1-m)/2} + (\beta_2 x_2 - V) \sqrt{(1+m)/2}$$

Поскольку в области  $ABC$  скорости  $v_\alpha$  и  $v_\beta$  постоянны вдоль каждой характеристики соответствующего семейства, то, приравнявая значения  $v_\beta$  в точках  $B$  и  $C$ , получаем соотношение между  $\alpha_1$  и  $\beta_2$ , а именно,  $\alpha_1 = -(1+m)/(1-m)\beta_2$ . В точке  $C$  нормальные к характеристикам скорости непрерывны и на границе пластической области  $v_2 = 0$ . Используя выражения (2.10), (3.9), находим  $\beta_2 = -\sqrt{(1-m)/(1+m)}V/a$ . При этом компоненты тензора скорости деформации и скорость относительного

изменения объема в области  $ABC$ :

$$\dot{\epsilon}_{11} = \sqrt{(1+m)/(1-m)}V/a, \quad \dot{\epsilon}_{22} = -\sqrt{(1-m)/(1+m)}V/a \quad (3.10)$$

$$\dot{\epsilon}_{12} = 0, \quad \dot{\epsilon} = 2m/\sqrt{1-m^2}V/a$$

На основе (2.9), (2.10) и (3.9) находим скорости в области  $BCD$ :

$$v_\alpha = \left[ \sqrt{2(1+m)a} - \rho\sqrt{1-m^2} \right] \exp \left[ -m/\sqrt{1-m^2} (\varphi_\alpha + \arcsin \sqrt{(1+m)/2}) \right] V/a$$

$$v_\beta = 0, \quad \rho = \sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2} \quad (3.11)$$

В области  $BDE$  углы наклона характеристик определяются выражениями

$$\operatorname{tg} \varphi_\alpha = \sqrt{(1-m)/(1+m)}, \quad \operatorname{tg} \varphi_\beta = -\sqrt{(1-m)/(1+m)} \quad (3.12)$$

Используя (3.11) и (3.12), находим скорость  $v_\alpha$  на характеристике  $BD$

$$v_\alpha = \left[ \sqrt{2(1+m)a} - \rho\sqrt{1-m^2} \right] \exp \left[ -m\pi/(2\sqrt{1-m^2}) \right] V/a \quad (3.13)$$

В области  $BDE$  скорость  $v_\alpha$  имеет те же значения, что и на характеристике  $BD$ . Поэтому с помощью уравнений  $\alpha$ -характеристик, проходящих через точки  $BD$ , находим в области  $BDE$ :

$$v_\alpha = 1/\sqrt{2} \left[ \sqrt{1-m}(a-x_1) + \sqrt{1+m}(x_2+2a) \right] \exp \left[ -m\pi/(2\sqrt{1-m^2}) \right] V/a \quad (3.14)$$

$$v_\beta = 0$$

Из выражений (3.11), (3.14) следует, что на граничной характеристике  $CDE$  скорость  $v_\alpha = 0$ . На участке свободной поверхности  $BE$  мгновенное распределение скорости  $v_\alpha$  представлено линейной функцией.

В случае сетки характеристик, изображенной на фиг. 2, предельная нагрузка имеет те же значения, которые приведены в табл. 1. Пластические области с переменными скоростями перемещений включают в себя  $A_1B_1O$  и две полосы, непосредственно прилегающие к границе жесткой области. Обозначим длину участка границы  $A_1B_1 = 2a_1$ . В области  $A_1B_1O$  скорости представляются формулами (3.9). При этом в выражениях для  $\alpha_1$  и  $\beta_2$  необходимо заменить  $a$  на  $a_1$ . В области  $OCDEE_1BB_1$  скорость  $v_\beta = 0$ .

В области  $CDD_1C_1$ :

$$v_\alpha = \left[ \sqrt{1+m/2}(a+a_1) - \rho\sqrt{1-m^2} \right] \exp \left[ -m/\sqrt{1-m^2} (\varphi_\alpha + \arcsin \sqrt{(1+m)/2}) \right] V/a_1$$

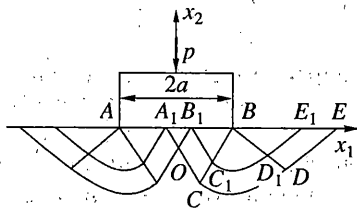
В области  $DEE_1D_1$ :

$$v_\alpha = 1/\sqrt{2} \left[ \sqrt{1-m}(a-x_1) + \sqrt{1+m}(x_2+a+a_1) \right] \exp \left[ -m\pi/(2\sqrt{1-m^2}) \right] V/a_1$$

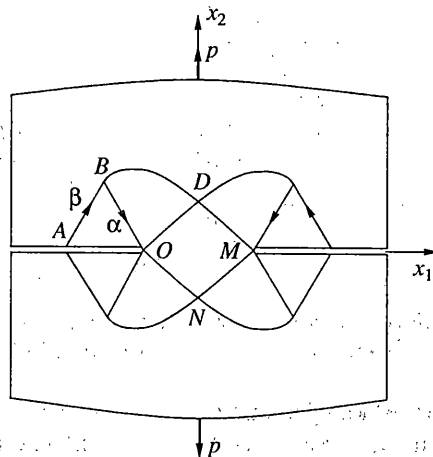
В области  $BD_1E_1$ :

$$v_\alpha = \sqrt{2(1+m)} \exp \left[ -m\pi/(2\sqrt{1-m^2}) \right] V$$

На участке свободной поверхности  $BE_1$  скорость  $v_\alpha$  постоянна, на участке  $E_1E$  меняется по линейному закону. На границе пластической области  $OCDE$  скорость  $v_\alpha = 0$ . При  $a_1 \rightarrow a$  распределение скоростей в пластических областях стремится к значениям, характеризуемым выражениями (3.9), (3.11), (3.13). При  $a_1 \rightarrow 0$  осуществить



Фиг. 2



Фиг. 3

предельный переход в полученных формулах не представляется возможным, поскольку в данном случае можно построить только разрывное поле скоростей, которое не может быть принято без каких-либо дополнительных соображений. Некоторыми авторами предлагалось моделировать линию разрыва скорости переходным слоем конечной толщины, в котором скорости изменяются непрерывно [2, 4, 23]. В рассмотренных решениях введение такого слоя не требуется. Он возникает естественным образом в случае малой пластической области в центральной зоне под штампом, в которой скорости зависят от координат. Нетрудно показать, что мгновенная скорость выдавливания объема среды на свободной поверхности имеет одно и то же значение для любых из рассмотренных полей характеристик под штампом. Аналогичным образом могут быть проведены расчеты и для других видов функции  $f(\xi)$  в условии (1.1).

Вариант непрерывного поля скоростей в задаче о вдавливании штампа в несжимаемую идеальнопластическую среду рассмотрен в [24].

4. Рассмотрим задачу о растяжении полосы с идеальными боковыми разрезами. На фиг. 3 показан один из возможных вариантов полей характеристик. Поверхности разрезов свободны от нагрузок и согласно (3.2) в области  $AOB$  угол  $\theta = -\pi/4$ ,  $S = km/[C(1+m)]$ . С помощью формул (2.1) и (2.5) находим напряжения в этой области

$$\sigma_{11} = 2km/[C(1-m)], \quad \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0 \quad (4.1)$$

В области  $ODMN$  угол  $\theta = -3/4\pi$  и напряжение

$$S = (k/C) \left[ 1 - 1/(1+m) \exp(-\pi m / \sqrt{1-m^2}) \right] \quad (4.2)$$

Согласно (2.5) напряжения в области  $ODMN$ :

$$\sigma_{11} = (1+m)S - km/C, \quad \sigma_{22} = (1-m)S + km/C, \quad \sigma_{12} = 0 \quad (4.3)$$

Здесь  $S$  представлено выражением (4.2). Формула для  $\sigma_{33}$  совпадает с (3.5). Предельная нагрузка, при которой минимальное сечение переходит в пластическое состояние,  $p = 2h\sigma_{22}$ , где  $2h$  – расстояние между вершинами разрезов. В задаче идеальной пластичности для несжимаемого материала предельная нагрузка  $p_*$  такая же, как и в задаче о штампе с заменой  $a$  на  $h$ . В табл. 2 приведены значения напряжений, параметра вида напряженного состояния  $\xi$  в области  $ODMN$ , а также отношения предельных нагрузок, соответствующие различным значениям коэффициента  $C$ .



| <i>C</i>        | 0,12 | 0,5  | 0,8  | 1     |
|-----------------|------|------|------|-------|
| $\xi$           | 2,76 | 4,76 | 9,08 | 17,41 |
| $\sigma_{11}/k$ | 1,65 | 1,23 | 1,03 | 0,91  |
| $\sigma_{22}/k$ | 2,5  | 1,58 | 1,17 | 0,98  |
| $\sigma_{33}/k$ | 2,05 | 1,36 | 1,06 | 0,92  |
| $\rho/\rho_*$   | 0,84 | 0,65 | 0,39 | 0,33  |

В данной области материал находится в условиях неравномерного трехосного растяжения, которое с увеличением  $C$  приближается к равномерному трехосному растяжению.

С ростом коэффициента  $C$ , что соответствует увеличению чувствительности пластических свойств материала к изменению вида напряженного состояния, предельная нагрузка снижается и предельное состояние достигается при существенно более низкой нагрузке по сравнению с несжимаемым материалом.

Исследуем поле скоростей в пластических областях. В области  $ODMN$  напряжения постоянны, и скорости перемещений могут быть представлены в форме (3.6). Вследствие симметрии распределения скоростей относительно осей  $x_1$  и  $x_2$  имеем условия  $v_1 = 0$  при  $x_1 = 0$ ,  $v_2 = 0$  при  $|x_1| \leq h$ ,  $x_2 = 0$ . Тогда коэффициенты  $\alpha_0 = \alpha_2 = \beta_0 = \beta_1 = 0$ . Углы наклона характеристик в области  $ODMN$  определяются выражениями (3.12), и из условия непрерывности скорости в точке  $D$  границы между жесткой и пластической областями находим  $\alpha_1 = -(1-m)/(1+m)\beta_2$ ,  $\beta_2 = \sqrt{(1+m)/(1-m)}V/h$ . Таким образом, для скоростей перемещений и скоростей деформаций в области  $ODMN$  получаем выражения

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-m}x_1 - \sqrt{1+m}x_2)V/h \\ v_\beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-m}x_1 + \sqrt{1+m}x_2)V/h \\ \dot{\epsilon}_{11} &= -\sqrt{(1-m)/(1+m)}V/h, \quad \dot{\epsilon}_{22} = \sqrt{(1+m)/(1-m)}V/h, \quad \dot{\epsilon}_{12} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Вследствие непрерывности скорости на границе жесткой и пластической области  $v_\alpha = V \sin \varphi_\alpha$ ,  $v_\beta = V \sin \varphi_\beta$  на  $BD$ . Используя соотношения (2.9) вдоль характеристик и выражения (2.10), (4.4), находим распределение скоростей в области  $BOD$ :

$$\begin{aligned} v_\alpha &= -\left(\sqrt{1-m^2} \cos \varphi_\beta + m \sin \varphi_\beta\right)V, \quad \rho = \sqrt{(x_1+h)^2 + x_2^2} \\ v_\beta &= V \sin \varphi_\beta + \left[\sqrt{2(1-m)}h - \rho\sqrt{1-m^2}\right] \exp\left[-\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\left(\varphi_\beta + \arcsin \sqrt{\frac{1-m}{2}}\right)\right]V/h \end{aligned} \quad (4.5)$$

В области  $AOB$  углы наклона характеристик определяются выражениями (3.8) и на основе (2.10), (4.5) находим распределение скоростей в этой области

$$\begin{aligned} v_\alpha &= -\sqrt{(1+m)/2}V \\ v_\beta &= -v_\alpha + \left[\sqrt{\frac{1+m}{2}}(x_1+h) - \sqrt{\frac{1-m}{2}}(x_2-2h)\right] \exp\left[-\frac{m\pi}{2\sqrt{1-m^2}}\right] \frac{V}{h} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Выражения для скоростей деформации в области  $AOB$  аналогичны (3.10) с заменой  $\dot{\epsilon}_{11}$  на  $\dot{\epsilon}_{22}$  и  $a$  на  $h$ .

Могут быть рассмотрены другие виды распределения характеристик, в том числе случай малой пластической области в центральной части полосы, в которой скорости представляют собой непрерывные функции координат. Тогда пластическая деформация сосредоточена в узкой полосе, ширина которой определяется размером этой центральной области.

В рассмотренном случае идеальнопластического тела уравнения (1.4) позволяют определить на основе значений напряжений только относительные значения скоростей деформаций, в том числе отношение  $\dot{\epsilon}_{11}/\dot{\epsilon}_{22}$ . Нетрудно показать, что это отношение в различных пластических областях совпадает со значением, вычисленным на основе определенного поля скоростей. Это свидетельствует о соответствии между полями напряжений и скоростей перемещений в рассмотренных задачах. При этом для каждого конкретного случая распределения характеристик величины скоростей деформаций определяются формой пластических областей и скоростью перемещения точек приложения нагрузки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00428) и Минобразования РФ, программа "Университеты России" (грант № 99-0007).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reynolds O. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact // Philos. Mag. Ser. 5. 1885. V. 20. № 127. P. 469–481.
2. Друккер Д., Прагер В. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование // Механика. Новое в зарубежной науке. Определяющие законы механики грунтов. М.: Мир, 1975. С. 166–177.
3. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 681–689.
4. Соколовский В.В. Теория пластичности. 3-е изд. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
5. Грин Р.Дж. Теория пластичности пористых тел // Сб. перев. Механика. М.: Мир, 1973. № 4. С. 109–120.
6. Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media // Trans. of the ASME, J. of Eng. Materials and Techn. 1977. V. 99. P. 2–15.
7. Tvergaard V., Needleman A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar // Acta Metallurgica. 1984. V. 32. No. 1. P. 157–169.
8. Kopic J., Needleman A. Void growth and coalescence in porous plastic solids // Int. J. of Solids and Structures. 1988. V. 24. P. 835–853.
9. McMeeking R.M., Hom C.L. Finite element analysis of void growth in elastic-plastic materials // Int. J. of Fracture. 1990. V. 42. No. 1. P. 1–19.
10. Worswick M.J., Pick R.J. Void growth and constitutive softening in a periodically voided solid // J. Mech. and Phys. Solids. 1990. V. 38. No. 5. P. 601–625.
11. Kuna M., Sun D.Z. Three-dimensional cell model analysis of void growth in ductile materials // Int. Journal of Fracture. 1996. V. 81. P. 235–258.
12. Ломакин Е.В. Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 92–99.
13. Ломакин Е.В. Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряженного состояния. 1. Экспериментальные зависимости и определяющие уравнения // Механика композитных материалов. 1988. № 1. С. 3–9.
14. Ломакин Е.В. Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред // Изв. РАН. МТТ. 1991. № 6. С. 66–75.
15. Николаевский В.Н. Определяющие уравнения пластического деформирования сыпучих сред // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 6. С. 1070–1082.
16. Rudnicki J.W., Rice J.R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // J. Mech. and Phys. Solids. 1975. V. 23. № 6. P. 371–394.
17. Ольшак В., Мруз З., Пежина П. Современное состояние теории пластичности. М.: Мир, 1964. 234 с.

18. *Ломакин Е.В.* Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряженного состояния. 2. Плоская деформация // *Механика композитных материалов*. 1988. № 2. С. 247–253.
19. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
20. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
21. *Ковардакова А.Ю., Ломакин Е.В.* Пластическое течение при изгибе полос из материала, чувствительного к виду напряженного состояния // *Изв. РАН. МТТ*. 1994. № 5. С. 102–112.
22. *Ковардакова А.Ю., Ломакин Е.В.* Пластический изгиб надрезанных полос из материала, свойства которого зависят от вида напряженного состояния // *Изв. РАН. МТТ*. 1995. № 5. С. 109–115.
23. *Шилд Р.Т.* Смешанные граничные задачи механики грунтов // *Сб. Механика. Новое в зарубежной науке. Определяющие законы механики грунтов*. М.: Мир, 1975. С. 178–194.
24. *Быковцев Г.И.* О поле скоростей при вдавливании плоского штампа в пластическое полупространство // *ПММ*. 1961. Т. 25. Вып. 3. С. 552–553.

Москва

Поступила в редакцию  
21.06.2000