МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. В.Ф. ЧЕКУРИН

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТОМОГРАФИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ С НЕСОВМЕСТНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

На практике часто приходится иметь дело с объектами, априорные знания о которых недостаточны для установления замкнутой математической модели, описывающей их механическое поведение в тех или иных условиях. К числу таких объектов можно отнести, в частности, твердые тела с остаточными технологическими напряжениями. Бывает, слишком сложно учесть в теоретической модели все многообразие факторов, оказывающих влияние на формирование остаточных напряжений, или же сама модель оказывается чрезмерно громоздкой. Иногда невозможно адекватно воспроизвести физические условия, имевшие место в процессах изготовления и технологических обработок тела и т.д. С другой стороны, зачастую представляет практический интерес не столько история деформирования тела, сколько его актуальное состояние. В таких случаях можно ограничится рассмотрением упругого равновесия тела, учитывая необратимые изменения его структуры неким результирующим полем, например, полем дисторсий [1] ("свободных" деформаций) либо неевклидовостью его внутренней геометрии [2]. Упругие деформации при таких условиях несовместны, вследствие чего напряжения в теле отличны от нуля даже в отсутствие внешнего нагружения.

При таком подходе система уравнений математической модели будет незамкнутой, поскольку из рассмотрения исключаются процессы, приводящие к возникновению остаточных напряжений.

Зондируя тело внешними полями – ультразвуком, поляризованным светом или электромагнитным излучением, можно получить экспериментальную информацию об изучаемом поле напряжений. В рамках моделей, описывающих взаимодействие зондирующего излучения с твердым телом, данные таких измерений можно связать с распределением напряжений в области проникновения излучения в тело. Таким образом, приходим к задачам восстановления тензорного поля по множеству его функционалов. Такие задачи часто некорректны в силу разных причин [3,4].

Предполагается, что использование результатов измерений совместно с математической моделью напряженного состояния тела и другой априорной информацией, позволит снизить уровень неопределенности и сформулировать условно корректную задачу. Подход, базирующийся на совместном использовании результатов поляризационно-оптических измерений и уравнений теории упругости, развивался, в частности, в работах [5–7], а изучение общих математических вопросов, касающихся задач томографии напряженного состояния твердых тел с использованием модели интегральной фотоупругости предпринято в публикациях [8, 9].

В данной статье развивается подход, позволяющий свести задачу восстановления напряженного состояния твердого тела по результатам его зондирования внешним физическим полем к вариационной процедуре, и рассматриваются некоторые реализации такого подхода для решения обратных задач поляризационно-оптической томографии напряженного состояния твердых тел.

1. Постановка обратной задачи и вариационный метод ее решения. Рассматривается однородное твердое тело B с несовместными деформациями, которое занимает область $V \subset E^3$, ограниченную поверхностью ∂V. Тело находится в состоянии равновесия, то есть для него выполняются уравнения [2, 10]:

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \delta_{kl}\sigma_{kl}}{\partial X_i \partial X_j} = 2G\left(R_{ij}^{\langle 0\rangle} - \delta_{ij}\frac{1}{1-\nu}\delta_{kl}R_{kl}^{\langle 0\rangle}\right) \tag{1.1}$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига, $R_{ij}^{\langle 0\rangle}$ – компоненты тензора кривизны отсчетной конфигурации – непрерывные в области V функции, учитывающие геометрическую несовместность упругих деформаций $\varepsilon_{ij}^{\langle e\rangle}$, приобретенную телом в процессах, предшествовавших его актуальному равновесному состоянию.

Тензор $\mathbf{R}^{\langle 0\rangle} = \{R_{ij}^{\langle 0\rangle}\}$ выражается через тензор несовместности тензора $\boldsymbol{\epsilon}^{\langle 0\rangle} = \{\varepsilon_{ij}^{\langle 0\rangle}\}$ свободных деформаций: $\mathbf{R}^{\langle 0\rangle} = -\,\mathrm{Ink}\boldsymbol{\epsilon}^{\langle 0\rangle}$. Сумма тензоров упругой $\boldsymbol{\epsilon}^{\langle e\rangle} = \{\varepsilon_{ij}^{\langle e\rangle}\}$ и свободной $\boldsymbol{\epsilon}^{\langle 0\rangle}$ деформаций образуют совместный тензор $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ полной деформации: $\mathrm{Ink}\,\boldsymbol{\epsilon} = 0$, что позволяет связать с этим тензором вектор перемещения $\mathbf{u}$, такой, что $\boldsymbol{\epsilon} = \mathrm{Def}\,\mathbf{u}$.

В рамках линейной модели справедлив принцип суперпозиции, следовательно напряжения, вызванные внешним механическим нагружением, можно рассматривать отдельно, поэтому будем считать, что поверхность ∂V свободна от нагрузок

$$\mathbf{n}\cdot\sigma|_{\partial V} = 0 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n}_0$ – нормаль к ∂V; $\hat{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ – тензор напряжений.

Соотношений (1.1), (1.2) недостаточно для решения задачи, поскольку функции $R_{ij}^{\langle 0\rangle} = R_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in V$ не известны. Для компенсации недостающих данных используем результаты неразрушающего контроля напряженного состояния. Получение таких данных предусматривает зондирование объекта внешним физическим полем и измерение изменений параметров этого поля, обусловленных его взаимодействием с полем напряжений. Физический параметр J, измеряемый таким образом, содержит некоторую интегральную информацию о напряженном состоянии объекта в области $d \in V$ проникновения поля в тело. Производя зондирование тела B путем сканирования его внешним полем, получим множество параметров $J(d)$, определенное на множестве областей проникновения $D = \{d\}$, полностью или частично покрывающем область V.

Поскольку при измерениях неизбежны случайные погрешности, то измеряя параметр J несколько раз в одной и той же области d, каждый раз будем получать, вообще говоря, несовпадающие результаты. Следовательно, данные неразрушающего контроля напряженного состояния можно рассматривать как выборочные функции некоторого случйного поля, определенного на D:

$$J = J_{\langle l\rangle}(d),\ \ d \in D,\ \ l \in \{1,\ldots N_d\} \tag{1.3}$$

Здесь N_d – количество серий независимых измерений параметра J на области d.

Параметр $J(d)$ ставится в соответствие полю напряжений в области d, следовательно его можно рассматривать как функционал $\Phi(\sigma_{ij}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in d) \equiv \Phi(\sigma_{ij}; d)$ напряжений по этой области:

$$J(d) = \Phi(\sigma_{ij}; d) \tag{1.4}$$

Аналитическую структуру функционала $\Phi(\sigma_{ij}; d)$ можно установить в рамках модели взаимодействия зондирующего излучения с деформируемым твердым телом.

Задачу восстановления напряженного состояния тела B по результатам неразрушающего контроля сформулируем так: найти в области V тела распределение напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$, которое удовлетворяет уравнениям модели напряженного состояния, например (1.1), (1.2), и согласуется с результатами измерений, представленными в виде зависимостей (1.3), и математической моделью (1.4), описывающей взаимодействие зондирующего излучения с полем напряжений.

Если компоненты тензора кривизны $R_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r})$ или соответствующие им свободные деформации $\varepsilon_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r})$ известны в области V, то при определенных ограничениях на эти функции и на геометрию поверхности ∂V, решение краевой задачи (1.1), (1.2) существует и единственно. Таким образом, для решения сформулированной обратной задачи необходимо найти такие функции $R_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r})$ (или $\varepsilon_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r})$), для которых решение прямой задачи (1.1), (1.2) согласуется с результатами измерений (1.3) в смысле функционалов (1.4). Будем искать решение обратной задачи в классе функций $R_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r})$, для которых решение прямой задачи (1.1), (1.2) существует и единственно.

В данной задаче имеем дело с функциями различной математической природы: напряжения σ_{ij} являются детерминированными функциями координат, которые удовлетворяют в области V определенным условиям гладкости, а $J_{\langle l\rangle}(d)$ – реализации некоторого случайного поля. Поэтому необходимо ввести критерий для корректного согласования детерминированного решения задачи с результатами измерений.

Решение уравнения (1.1) представим в виде суммы двух слагаемых: частного решения $\sigma^{\langle 0\rangle}=\{\sigma_{ij}^{\langle 0\rangle}\}$:

$$\sigma_{ij}^{\langle 0\rangle}=\int\limits_V G_{ijkl}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot R_{kl}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r}')dV(\mathbf{r}') \tag{1.5}$$

где $G_{ijkl}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ – фундаментальное решение уравнения (1.1), и решения $\tilde{\sigma}=\{\tilde{\sigma}_{ij}\}$ однородного уравнения

$$\Delta\tilde{\sigma}_{ij}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\delta_{kl}\tilde{\sigma}_{kl}}{\partial X_i\partial X_j}=0 \tag{1.6}$$

удовлетворяющего граничному условию

$$\mathbf{n}\cdot\tilde{\sigma}\,|_{\partial V}=\mathbf{q}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r}), \tag{1.7}$$

где $\mathbf{q}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r})=-\mathbf{n}:\sigma^{\langle 0\rangle}\,|_{\partial V}$.

Предположим, что $R_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r}\in V$ – одно из допустимых распределений компонент тензора кривизны в области тела. Тогда, используя формулу (1.5) и решая краевую задачу (1.6), (1.7), можно вычислить для каждой области d удаление по квадратичной норме рассчитанного значения параметра $\Phi(\sigma_{ij};\,d)$ от всех его измеренных значений $J_{\langle l\rangle}(d)$ в этой области

$$F_d=\frac{1}{\|d\|N_d}\sum_{l=1}^{N_d}(\Phi(\tilde{\sigma}_{ij}+\sigma_{ij}^{\langle 0\rangle};d)-J_{\langle l\rangle}(d))^2 \tag{1.8}$$

а также среднее отклонение по всему множеству D областей зондирования

$$\tilde{F}_D=\frac{1}{\|D\|}\int\limits_D\frac{1}{\|d\|N_d}\sum_{l=1}^{N_d}(\Phi(\tilde{\sigma}_{ij}+\sigma_{ij}^{\langle 0\rangle};d)-J_{\langle l\rangle}(d))^2\,\mathrm{d}\,d \tag{1.9}$$

Здесь $\|d\|$ – норма области d, в качестве которой можно выбрать, например, ее объем V_d, $\|D\|$ – норма множества D, например $\|D\|=\int_D\|d\|\,\mathrm{d}d$.

Из определения параметра $\tilde{F}_D$ следует, что он является функционалом от $R_{kl}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r}')$ по множеству $D\subseteq V$, и может быть выбран в качестве меры среднеквадратического отклонения найденного решения от всех имеющихся результатов измерений. Поэтому решение вариационной задачи

$$\delta F_D / \delta R_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r}) = 0 \tag{1.10}$$

определяет функцию $R_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r}')$, для которой решение прямой краевой задачи (1.1), (1.2) согласуется в смысле наименьших квадратов с результатами физических измерений.

Для решения задачи (1.10) необходимо установление явной функциональной зависимости между $\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{r})$ и $R_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r}')$.

Введем множество $U(V)$ функций $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}(\mathbf{r})$, удовлетворяющих в области V уравнению (1.6), и рассмотрим функционал

$$F_D = \frac{1}{\|D\|}\int_D \frac{1}{\|d\|N_d}\sum_{l=1}^{N_d}(\Phi(\sigma'_{ij}+\sigma_{ij}^{\langle 0\rangle};d) - J_{\langle l\rangle}(d))^2\,\mathrm{d}\,d,\ \ \sigma'_{ij} \in U(V) \tag{1.11}$$

в котором $\sigma'_{ij}(\mathbf{r})$ – независимые функции, а $\sigma_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r})$, как и прежде, выражается через $R_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r}')$ соотношением (1.5). Условие минимума функционала (1.11):

$$F_D(\sigma'_{ij}, R_{ij}^{\langle 0\rangle}) \to \min \tag{1.12}$$

вместе с условиями

$$n_i(\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}^{\langle 0\rangle})|_{\partial V} = 0 \tag{1.13}$$

приводят к тому же результату, что и задача (1.10). Объединяя условия (1.12), (1.13) в одном функционале

$$F = \frac{1}{\|D\|}\int_D \frac{1}{\|d\|N_d}\sum_{l=1}^{N_d}(\Phi(\sigma'_{ij}+\sigma_{ij}^{\langle 0\rangle};d) - J_{\langle l\rangle}(d))^2\,\mathrm{d}\,d + \int_{\partial V}\sum_{j=1}^{3}(n_i\mathbf{r})(\sigma'_{ij}(\mathbf{r}) - \sigma_{ij}^{\langle 0\rangle}))^2\,\mathrm{d}\,S \tag{1.14}$$

приходим к вариационной задаче

$$\frac{\delta F}{\delta\sigma'_{ij}(\mathbf{r})} = 0,\ \ \frac{\delta F}{\delta R_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r})} = 0 \tag{1.15}$$

Решение этого уравнения определяет две функции $\sigma'_{ij}(\mathbf{r})$ и $R_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r}')$, такие, что поле напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \sigma'_{ij}(\mathbf{r}) + \sigma_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r})$, где $\sigma_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r})$ находят по формуле (1.5), согласуется с результатами измерений в смысле наименьших квадратов. Кроме того $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению (1.1), а $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ и $R_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r}')$ согласованы между собой так, что граничные условия (1.13) выполняются по квадратичной норме. В этом смысле найденные напряжения $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ являются решением краевой задачи (1.1), (1.2).

Представляя искомые функции $\sigma'_{ij}(\mathbf{r})$ и $R_{ij}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r}')$ в виде разложения по некоторым функциональным базисам $\{\sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r})\}$, $\{R_{ij}^{(k)}(\mathbf{r})\}$:

$$\sigma'_{mn}(\mathbf{r}) = \sum_k S_{mnij}^{(k)}\sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}),\ \ R_{mn}^{\langle 0\rangle}(\mathbf{r}) = \sum_k E_{mnij}^{(k)}R_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \tag{1.16}$$

сведем задачу к отысканию коэффициентов разложения $S_{mnij}^{(k)}, E_{mnij}^{(k)}$. Базисные функции $\sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r})$ должны удовлетворять однородному уравнению (1.6).

2. Лучевые интегралы поля напряжений. Эффективным методом неразрушающего контроля напряженного состояния твердых тел являются поляризационно-оптические измерения, базирующиеся на эффекте фотоупругости [5, 11]. Заметим, что многие диэлектрические и полупроводниковые тела прозрачны в инфракрасной области спектра. Поэтому сфера применения метода не ограничивается телами, прозрачными в видимой области, а потенциально охватывает более широкий класс объектов.

При использовании поляризационно-оптического метода зондирующим излучением является монохроматический поляризованный свет. Проходя через оптически анизотропную среду, свет изменяет свое состояние поляризации. Если оптическая анизотропия тела обусловлена его напряженным состоянием, то изменение состояния поляризации света связано с распределением напряжений вдоль линии распространения светового луча. Областью проникновения зондирующего излучения d является отрезок траектории светового луча от точки его входа в объект до точки выхода.

Состояние поляризации плоской электромагнитной волны, распространяющейся в направлении d, определяется [12] комплексным вектором Джонса $\mathbf{E}_d = [E_1^d, E_2^d]^T$. Здесь E_1^d, E_2^d – компоненты комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля волны в декартовом базисе, таком, что ось x_3 направлена вдоль d, а x_1, x_2 образуют плоскость, параллельную фронту волны. Пусть $\mathbf{E}_d^0$ и $\mathbf{E}_d^h$ – векторы, определяющие состояния поляризации света на входе и выходе из объекта на направлении d. Тогда действие объекта на поляризацию света определяется отображением $\mathbf{E}_d^0 \to \mathbf{E}_d^h$, которое задастся унитарной матрицей Джонса $\mathbf{J}(d)$ [12]:

$$\mathbf{E}_d^h = \mathbf{J}(d)\cdot\mathbf{E}_d^0 \tag{2.1}$$

Измеряя поляризацию света на входе и выходе объекта и используя (2.1), можно экспериментально определить матрицу Джонса $\mathbf{J}(d)$ для всех направлений d, для которых такие измерения производились. На каждом направлении d можно произвести несколько независимых серий таких измерений и определить матрицы Джонса $\mathbf{J}_{(l)}(d)$, $l \in \{1, \ldots N^d\}$ для каждой с этих серий, где N^d – количество серий измерений на направлении d. Следовательно, в качестве измеряемого параметра в зависимостях (1.3) при поляризационно-оптическом методе неразрушающего контроля, можно выбрать матрицу Джонса $\mathbf{J}(d)$.

Вместе с $\mathbf{J}(d)$, можно рассматривать также унитарную матрицу $\tilde{\mathbf{J}}(d)$:

$$\tilde{\mathbf{J}}(d) = \mathbf{J}(d)\exp(-i\Theta(d)) \tag{2.2}$$

Выбирая $\Theta(d) = \frac{1}{2}(\varphi_1(d) + \varphi_2(d))$, $\varphi_1(d) = \operatorname{Arg}(\lambda_1(d))$, $\varphi_2(d) = \operatorname{Arg}(\lambda_2(d))$, где $\lambda_1(d)$, $\lambda_2(d)$ – собственные значения матрицы $\mathbf{J}(d)$, получим матрицу $\tilde{\mathbf{J}}(d)$ со свойством

$$\det(\tilde{\mathbf{J}}(d)) = 1 \tag{2.3}$$

Собственные значения $\tilde{\mathbf{J}}(d)$ суть $\exp(i\varphi(d))$ и $\exp(-i\varphi(d))$, где $\varphi(d) = \frac{1}{2}(\varphi_1(d) - \varphi_2(d))$, а ее логарифм, то есть матрица $i\mathbf{L}(d) = \ln(\tilde{\mathbf{J}}(d))$ такая, что

$$\tilde{\mathbf{J}}(d) = \exp(i\mathbf{L}) \tag{2.4}$$

будет чисто мнимой и определится как [13]

$$\mathbf{L}(d) = \frac{\tilde{\mathbf{J}}(d) - \cos(\varphi(d))\mathbf{I}}{\sin(\varphi(d))}(\varphi(d) + 2\pi k_1(d)) = \frac{\operatorname{Im}\tilde{\mathbf{J}}(d)}{\sin(\varphi(d))}(\varphi(d) + 2\pi k_1(d)) \tag{2.5}$$

$$k_1(d) = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Из формул (2.2), (2.1) следует, что в качестве измеряемых параметров в зависимостях (1.3), кроме матрицы $\mathbf{J}(d)$, можно также использовать производную от нее матрицу $\tilde{\mathbf{J}}(d)$ вместе с комплексным параметром $\exp(-i\Theta(d))$, или же логарифм этой матрицы $\mathbf{L}(d)$ вместе с действительным параметром $\Theta(d)$. Таким образом, выяснен физический смысл измеряемых парамеров в зависимостях (1.3) для случая поляризационно-оптического контроля напряженного состояния твердых тел.

Перейдем теперь к установлению функционалов (1.4), которые выражают измеряемые параметры через распределение напряжений вдоль светового луча.

Эволюция поляризации светового луча, который распространяется в напряженной среде вдоль направления $d \in \mathcal{D}$ устанавливается уравнениями макроскопической электродинамики [12]. Рассматривая каждый луч в приближении плоской монохроматической волны, приходим к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно комплексных амплитуд E_1^d, E_2^d [12]. В теории интегральной фотоупругости [5] принимается во внимание то, что обусловленная деформацией оптическая неоднородность тела – слабая и, представляя вектор $\mathbf{E}_d$ как

$$\mathbf{E}_d = \mathbf{B}_d \exp(i\Theta_d), \quad \Theta_d = \frac{\omega}{2c\sqrt{k}} \int\limits_{t_d^0}^{t_d} (k_{11}^d + k_{22}^d) \mathrm{d} t_d \tag{2.6}$$

осуществляется переход к системе второго порядка

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}_d}{\mathrm{d}t_d} = -\frac{i\omega}{4c\sqrt{k}} \mathbf{K}_d \cdot \mathbf{B}_d, \quad \mathbf{K}_d = \begin{pmatrix} k_{11}^d - k_{22}^d & 2k_{12}^d \\ 2k_{21}^d & k_{22}^d - k_{11}^d \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Здесь t_d – скалярный параметр, который определяет радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки на направлении d: $\mathbf{r} = \{m^d t_d, n^d t_d, l^d t_d\}$, где m^d, n^d, l^d – направляющие косинусы этого направления в глобальной декартовой системе координат $\{X_1, X_2, X_3\}$, t_d^0 соответствует точке входа; а t_d^h – точке выхода луча из тела; k_{ij}^d – компоненты тензора k диэлектрической проницаемости в системе координат $\{x_1, x_2, x_3\}$, связанной с направлением d; k – диэлектрическая проницаемость среды в ненапряженном состоянии; ω – циклическая частота электромагнитной волны; c – скорость света.

Уравнения (2.6), (2.7) связывают параметры светового луча с напряженно-деформированным состоянием тела через зависимость тензора диэлектрической проницаемости от напряжений и деформаций. Если деформации упругие, то компоненты тензора диэлектрической проницаемости однозначно выражаются через напряжения [5, 11]. Анизотропия диэлектрических свойств возникает как следствие анизотропии пространственного распределения дипольных электрических моментов. В телах с несовместными деформациями обе составляющие тензора полной деформации могут влиять на распределение связанных электрических зарядов. Поэтому естественно предположить, что тензор k диэлектрической проницаемости зависит как от упругой так и от свободной деформаций. Поскольку физическая природа этих двух составляющих полной деформации различна, то, в общем случае, следует принять, что

$$k = k(\varepsilon^{\langle e\rangle}, \varepsilon^{\langle 0\rangle}) \tag{2.8}$$

рассматривая случай $k = k(\varepsilon)$, когда диэлектрическая проницаемость определяется тензором полной деформации $\varepsilon = \varepsilon^{\langle e\rangle} + \varepsilon^{\langle 0\rangle}$, как частный.

В литературе [14] при установлении зависимости диэлектрических свойств твердых тел от упругой деформации обычно оперируют коэффициентами, которые линейно выражают компоненты тензора диэлектрической непроницаемости, обратного тензору k, через компоненты деформации. Следуя такому подходу, получим представление для функциональной зависимости (2.8) в виде

$$k_{ij} = k\delta_{ij} - k^2 (p_{ijkl}^{\langle e\rangle} \varepsilon_{kl}^{\langle e\rangle} + p_{ijkl}^{\langle 0\rangle} \varepsilon_{kl}^{\langle 0\rangle}) \tag{2.9}$$

Здесь $p_{ijkl}^{\langle e\rangle}$ и $p_{ijkl}^{\langle 0\rangle}$ – безразмерные коэффициенты, учитывающие изменение диэлектрических свойств тела, обусловленные упругими и свободными деформациями. Для изотропного тела как $p_{ijkl}^{\langle e\rangle}$, так и $p_{ijkl}^{\langle 0\rangle}$ выражаются через две материальных константы

$$p_{ijkl}^{\langle e\rangle} = p_V^{\langle e\rangle}\delta_{ij}\delta_{kl} + p^{\langle e\rangle}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \tfrac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \tag{2.10}$$

$$p_{ijkl}^{\langle e\rangle} = p_V^{\langle 0\rangle}\delta_{ij}\delta_{kl} + p^{\langle 0\rangle}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \tfrac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)$$

Выражая в (2.9) упругие деформации через напряжения, представим ее в виде

$$k_{ij} = k\delta_{ij} - k^2(P_{ijkl}\sigma_{kl} + p_{ijkl}^{\langle 0\rangle}\varepsilon_{kl}^{\langle 0\rangle}) \tag{2.11}$$

где P_{ijkl} – пьезооптический тензор, который для изотропных тел имеет структуру (2.10), а соответствующие константы равны $P_V = p_V^{\langle e\rangle}(1-2\nu)/(2G(1+\nu))$, $P = p^{\langle e\rangle}/G$. С учетом этого, на основании (2.6), (2.7), получаем систему соотношений, описывающих распространение поляризованного света в теле с несовместными деформациями

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}_d}{\mathrm{d}t_d} = -\frac{i\omega}{2c\sqrt{k}}\mathbf{S}_d\cdot\mathbf{B}_d,\quad \mathbf{B}_d = \mathbf{E}_d\exp\left(-\frac{i\omega}{c\sqrt{k}}\int\limits_{t_d^0}^{t_d}\theta_d\,\mathrm{d}t_d\right)$$

$$\mathbf{S}_d = \begin{pmatrix} P(\sigma_{11}^d - \sigma_{22}^d) + p^{\langle 0\rangle}(\varepsilon_{11}^{\langle 0\rangle d} - \varepsilon_{22}^{\langle 0\rangle d}) & 2P\sigma_{12}^d + 2p^{\langle 0\rangle}\varepsilon_{12}^{\langle 0\rangle d} \\ 2P\sigma_{21}^d + 2p^{\langle 0\rangle}\varepsilon_{21}^{\langle 0\rangle d} & -P(\sigma_{11}^d - \sigma_{22}^d) - p^{\langle 0\rangle}(\varepsilon_{11}^{\langle 0\rangle d} - \varepsilon_{22}^{\langle 0\rangle d}) \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

$$\theta_d = k + P_1(\sigma_{11}^d + \sigma_{22}^d) + P_2\sigma_{33}^d + p_1^{\langle 0\rangle}(\varepsilon_{11}^{\langle 0\rangle d} + \varepsilon_{22}^{\langle 0\rangle d}) + p_2^{\langle 0\rangle}\varepsilon_{33}^{\langle 0\rangle d}$$

$$P_1 = P_V + \tfrac{1}{3}P,\quad P_2 = P_V - \tfrac{2}{3}P,\quad p_1^{\langle 0\rangle} = p_V^{\langle 0\rangle} + \tfrac{1}{3}p^{\langle 0\rangle},\quad p_2^{\langle 0\rangle} = p_V^{\langle 0\rangle} - \tfrac{2}{3}p^{\langle 0\rangle}$$

Полагая, что напряжения вызваны внешним силовым нагружением ($\varepsilon_{ij}^{\langle 0\rangle} = 0$), либо изотропными свободными деформациями ($\varepsilon_{ij}^{\langle 0\rangle} = \varepsilon^{\langle 0\rangle}\delta_{ij}$), из (2.12) нетрудно получить известные уравнения интегральной фотоупругости [5].

В соответствии с (2.12), значения комплексной амплитуды световой волны на входе и выходе связаны соотношениями

$$\mathbf{E}_d^h = \exp\left(-i\frac{\omega}{2c\sqrt{k}}\int\limits_{t_d^0}^{t_d^h}(\mathbf{S}_d + 2\theta\mathbf{I})\,\mathrm{d}t_d\right)\cdot\mathbf{E}_d^0 \tag{2.13}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Сопоставляя соотношения (2.1), (2.2), (2.4), (2.13), получаем аналитические представления для соотношений типа (1.4), связывающие определяемые на основе оптических измерений параметры $\mathbf{J}(d)$, $\tilde{\mathbf{J}}(d)$, $\Theta(d)$, $\mathbf{L}(d)$ с распределением напряжений вдоль светового луча

$$\mathbf{J}(d) = \exp\left(-i\frac{\omega}{2c\sqrt{k}}\int\limits_{t_d^0}^{t_d^h}(\mathbf{S}_d + 2\theta\mathbf{I})\,\mathrm{d}t_d\right) \tag{2.14}$$

$$\tilde{\mathbf{J}}(d) = \exp\left(-i\frac{\omega}{2c\sqrt{k}}\int\limits_{t_d^0}^{t_d^h}\mathbf{S}_d\,\mathrm{d}t_d\right),\quad \Theta(d) + 2\pi k_2(d) = -\frac{\omega}{c\sqrt{k}}\int\limits_{t_d^0}^{t_d^h}\theta\,\mathrm{d}t_d \tag{2.15}$$

$$\mathbf{L}(d) = -\frac{\omega}{2c\sqrt{k}}\int\limits_{t_d^0}^{t_d^h}\mathbf{S}_d\,\mathrm{d}t_d,\quad \Theta(d) + 2\pi k_2(d) = -\frac{\omega}{c\sqrt{k}}\int\limits_{t_d^0}^{t_d^h}\theta\,\mathrm{d}t_d\quad k_2(d) = \pm 1,\ \pm 2,\ldots \tag{2.16}$$

Соотношения (2.16), в отличие от (2.14) и (2.15), линейны по полю напряжений и позволяют явно выразить лучевые интегралы от компонент напряжений через параметры, определяемые на основании оптических измерений

$$\frac{\omega}{2c\sqrt{k}}\int\limits_{t_d^0}^{t_d}(P(\sigma_{11}^d-\sigma_{22}^d)+p^{\langle 0\rangle}(\varepsilon_{11}^{\langle 0\rangle d}-\varepsilon_{22}^{\langle 0\rangle d}))\,\mathrm{d}t_d=-\frac{\operatorname{Im}\tilde{J}_{11}(d)}{\sin(\varphi(d))}(\varphi(d)+2\pi k_1(d))=$$

$$=\frac{\operatorname{Im}\tilde{J}_{22}(d)}{\sin(\varphi(d))}(\varphi(d)+2\pi k_1(d)) \tag{2.17}$$

$$\frac{\omega}{2c\sqrt{k}}\int\limits_{t_d^0}^{t_d}(2P\sigma_{12}^d+2p^{\langle 0\rangle}\varepsilon_{12}^{\langle 0\rangle d})\,\mathrm{d}t_d=-\frac{\operatorname{Im}\tilde{J}_{12}(d)}{\sin(\varphi(d))}(\varphi(d)+2\pi k_1(d))=$$

$$=-\frac{\operatorname{Im}\tilde{J}_{21}(d)}{\sin(\varphi(d))}(\varphi(d)+2\pi k_1(d)) \tag{2.18}$$

$$\frac{\omega}{c\sqrt{k}}\int\limits_{t_d^0}^{t_d}(P_1(\sigma_{11}^d+\sigma_{22}^d)+P_2\sigma_{33}^d+p_1^{\langle 0\rangle}(\varepsilon_{11}^{\langle 0\rangle d}+\varepsilon_{22}^{\langle 0\rangle d})+p_2^{\langle 0\rangle}\varepsilon_{33}^{\langle 0\rangle d})\,\mathrm{d}t_d=$$

$$=\Theta(d)-k\tilde{h}(d)+2\pi k_2(d) \tag{2.19}$$

Согласно (2.17) – (2.19), три лучевых интеграла, которые определяются с использованием оптических измерений, содержат слагаемые, зависящие от двух целых чисел $k_1(d)$ и $k_2(d)$. Такая зависимость физически объясняется набегом разности фаз и абсолютной фазы волны на величину, кратную ее периоду. Следует подчеркнуть, что используя технику поляризационно-оптических измерений, которая базируется на определении эллиптичности света и азимута эллипса поляризации, – параметров, зависящих лишь от разности фаз и отношения амплитуд компонент напряженности электрического поля световой волны, можно восстановить только матрицу $\tilde{\mathbf{J}}(d)$ (но не $\mathbf{J}(d)$). Это позволяет вычислить по формулам (2.17), (2.18) значения первых двух лучевых интегралов. Третий лучевой интеграл (2.19) определяется приращением абсолютной фазы, приобретенной светом при прохождении через тело, для его определения необходимо использовать более тонкую технику эксперимента, например методики, основанные на использовании интерферометров Маха или Майкельсона [11].

3. Задача томографии закалочных напряжений в листе. В качестве примера применения разработанного подхода рассмотрим задачу определения закалочных напряжений в прямоугольном листе $0\leqslant x\leqslant a, -1\leqslant y\leqslant 1, -b\leqslant z\leqslant b$, толщина которого намного меньше размеров в двух других направлениях. В работе [10], рассматривая случай изотропной и однородной в плоскости листа закалки, для которого две отличные от нуля компоненты тензора кривизны $R_{XX}^{\langle 0\rangle}=R_{ZZ}^{\langle 0\rangle}=R_0(y)$ являются функциями лишь толщинной координаты, компоненты тензора напряжений в любом сечении $z=$ $=\mathrm{const}$, достаточно удаленном от краев, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}\Delta\sigma_{xx}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})=-2G\frac{1+\nu}{1-\nu}R_0(y)\\ \Delta\sigma_{yy}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})=\frac{4G}{1-\nu}R_0(y)\\ \Delta\sigma_{zz}=-2G\frac{1+\nu}{1-\nu}R_0(y),\quad \Delta\sigma_{xy}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})=0\end{gathered} \tag{3.1}$$

а на поверхности листа – условиям ненагруженности. Здесь Δ – двумерный оператор Лапласа в декартовых координатах.

Выбирая частное решение неоднородной системы (3.1) в виде

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma(y),\ \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma(y) = 2G\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(-\varepsilon_0(y) + \frac{3}{2}y\int_{-1}^{1} y\varepsilon_0(y)dy + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varepsilon_0(y)dy\right) \qquad (3.2)$$

$$\varepsilon_0(y) = \int_0^y dy \int_0^y R_0(y)dy$$

представим компоненты напряжений в листе в виде

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},\ \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \sigma(y),\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2},\ \sigma_{zz} = \nu\Delta W + \sigma(y) \qquad (3.3)$$

где W – затухающее на бесконечности решение бигармонического уравнения (2.9) для полубесконечной полосы, удовлетворяющее условиям

$$\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right|_{x=0} = -\sigma(y),\ W|_{y=\pm 1} = 0,\ \left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{y=\pm 1} = 0 \qquad (3.4)$$

Затухающее решение бигармонического уравнения, удовлетворяющее первому, третьему и четвертому условиям (3.4), в случае симметричной относительно срединной плоскости листа закалки, имеет вид

$$W = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp(-\bar{\gamma}_k x)\bar{F}_k(y)\right),\ F_k(y) = -\gamma_k \operatorname{tg}\gamma_k \cos(\gamma_k y) + \gamma_k y \sin(\gamma_k y) \qquad (3.5)$$

Здесь γ_k – комплексные корни уравнения $\sin(2\gamma_k) + 2\gamma_k = 0$.

Представление (3.5) выделяет параметризованное двумя бесконечными последовательностями действительных констант $A_k \equiv \mathrm{Re}C_k$ и $B_k \equiv \mathrm{Im}\,C_k$ множество функций U, представляющих решения однородной системы, соответствующей системе (3.1).

Просвечивая лист под разными углами к его поверхности на разных удалениях ξ от края и сопоставляя состояния поляризации света на входе и выходе, по формулам (2.17), (2.18) определим два независимых параметра $L_1(\alpha, \beta, \xi)$ и $L_1(\alpha, \beta, \xi)$, как функции направления распространения светового луча и расстояния ξ, которые представляют значения лучевых интегралов

$$\frac{\omega f_1(\alpha,\beta)}{2c\sqrt{k}}\mathrm{Re}\sum_k C_k\bar{\gamma}_k^2\int_{-1}^{1} \exp[-\bar{\gamma}_k((1-y)\operatorname{tg}\alpha + \xi)]\bar{F}_k(y)\,d\,y = L_1(\alpha,\beta,\xi) \qquad (3.6)$$

$$\frac{\omega f_2(\alpha,\beta)}{2c\sqrt{k}}\mathrm{Re}\sum_k C_k\bar{\gamma}_k^2\int_{-1}^{1} \exp[-\bar{\gamma}_k((1-y)\operatorname{tg}\alpha + \xi)]\bar{F}_k(y)\,d\,y = L_1(\alpha,\beta,\xi)$$

$$f_1(\alpha,\beta) = \frac{1-\cos^2 2\alpha(1+\sin^2\beta) - \nu\cos^2\beta}{\cos^2\alpha},\ f_2(\alpha,\beta) = -\frac{\sin\beta\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Здесь α, β – эйлеровы углы, которые определяют поворот локальной системы координат, связанной с направлением просвечивания, по отношению к глобальной системе $\{x, y, z\}$. Предполагается, что просвечивание осуществляется в направлении второй оси локальной системы.

Функционал (1.14) в рассматриваемом случае имеет вид

$$F = \frac{1}{(2h)^2}\int_{-1}^{1} [\mathrm{Re}\,\Sigma C_k\bar{\gamma}_k\bar{F}_k'(y)]^2\,d\,y + \int_{\Delta\alpha} d\alpha \int_{\Delta\beta} d\beta \int_{\Xi(\alpha)} \frac{\cos^2\alpha}{(2h)^2} \times$$

$$\times\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{\omega f_1(\alpha,\beta)}{2c\sqrt{k}}\mathrm{Re}\sum_k C_k\bar{\gamma}_k^2\int_{-1}^{1}\exp[-\bar{\gamma}_k((1-y)\operatorname{tg}\alpha+\xi)]\overline{F}_k(y)\,\mathrm{d}\,y-L_1(\alpha,\beta,\xi)\right]^2+\\&+\left[\frac{\omega f_2(\alpha,\beta)}{2c\sqrt{k}}\mathrm{Re}\sum_k C_k\bar{\gamma}_k^2\int_{-1}^{1}\exp[-\bar{\gamma}_k((1-y)\operatorname{tg}\alpha+\xi)]\overline{F}_k(y)\,\mathrm{d}\,y-L_1(\alpha,\beta,\xi)\right]^2\end{aligned}\right\}d\xi \qquad (3.7)$$

Условия минимума функционала (3.7) по отношению к коэффициентам A_k, B_k приводят к системе линейных алгебраических уравнений относительно A_k, B_k [10]. При известных коэффициентах C_k функция закалки $\sigma(y)$, в соответствии со вторым соотношением (3.4), определится как

$$\sigma(y)=-\mathrm{Re}\sum_k C_k\overline{F}_k'(y)$$

Особенностью рассмотренной задачи является то, что при использовании в функционале F первых двух лучевых интеграла (2.17), (2.18), этот функционал не зависит от распределения компонент тензора кривизны в полосе и задача свелась лишь к отысканию поля напряжений, соответствующего однородной части задачи.

4. Заключение. Предложенный метод объединяет в одной вариационной процедуре процесс нахождения функций, удовлетворяющих уравнениям (1.1) и граничным условиям (1.2) математической модели напряженного состояния, и подчинение этих функций имеющимся экспериментальным данным, полученным с использованием различных методов неразрушающего контроля. Полученные представления для лучевых интегралов (2.17)–(2.19) поля напряжений позволили построить квадратичный функционал относительно искомых функций – компонент тензора напряжений и тензора кривизны отсчетной конфигурации (свободной деформации), что существенно упрощает процедуру отыскания его минимума. Задачу отыскания минимума функционала можно решать путем разложения искомых функций по некоторым функциональным базисам. При этом для получения приближенного решения можно ограничиться в разложениях конечным числом слагаемых, спроецировав таким образом задачу из функционального пространства в конечномерное. В рассмотренном примере использовалось разложение решения по собственным функциям определенной краевой задачи теории упругости. Возможны также и другие подходы, например, основанные на конечно-элементных аппроксимациях в сочетании с методом граничных интегральных уравнений [15] или вариационными методами механики.

Очевидно, что для успешной реализации рассмотренного подхода необходимо, чтобы объем экспериментальных данных был достаточно представительным. Это означает, что существует некоторый минимальный объем данных, при котором сформулированная обратная задача становится разрешимой. Изучение этого вопроса выходит за рамки данной статьи. Укажем здесь лишь на один момент, обнаруженный путем численных экспериментов на задаче для полосы [16]. Если в этой задаче считать неизвестными обе компоненты вектора напряжений на торце (для этого в функционале (3.7) необходимо упустить первое слагаемое в правой части), а в качестве входных данных взять результаты нормального просвечивания (для этого в функционале (3.7) следует удержать лишь слагаемое, соответствующее первому лучевому интегралу (3.6), положив в нем $\alpha=\beta=0$), то решить задачу не удается ввиду резкого ухудшения обусловленности матрицы системы линейных уравнений с увеличением числа слагаемых в разложении (3.5). Если же ввести в функционал информацию об одной из составляющих вектора напряжений на торце, решение задачи начинает сходиться.

В заключение отметим, что информативность того или иного метода неразрушающего контроля ограничивается как природой самого метода, так возможностями его реализации. Поэтому не всякая задача томографии напряженного состояния на основании данных неразрушающего контроля будет разрешимой ввиду ограниченной информативности используемого метода контроля. В этой связи важное значение, по нашему мнению, приобретают подходы, позволяющие объединить данные измерений с априорной информацией, например математической моделью напряженного состояния, а также с данными, полученными другими методами неразрушающего контроля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А.И.* Теория упругости. М: Наука, 1970. 940 с.
2. *Крёнер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. М: Мир, 1965. 104с.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 224с.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987. 160 с.
5. *Абен Х.Л.* Интегральная фотоупругость. Таллинн: Валгус, 1975. 218с.
6. *Пуро А.Э.* Интегральная фотоупругость линейно деформируемых цилиндрических образцов // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 41–48.
7. *Пуро А.Э.* Определение остаточных напряжений в длинных цилиндрических образцах методом интегральной фотоупругости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 4. С. 861–863.
8. *Шарафутдинов В.А.* О методе интегральной фотоупругости в случае слабой оптической анизотропии // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 2. С. 350–353.
9. *Шарафутдинов В.А.* Квазиизотропное приближение геометрической оптики и задачи томографии// Докл. РАН. 1992. Т. 323. № 5. С. 847–850.
10. *Чекурин В.Ф.* Обратная задача неразрушающего контроля уровня закалки листового стекла // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 3. С. 86–97.
11. *Александров А.Я., Ахметзянов М.Х.* Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М.: Наука, 1973. 576 с.
12. *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. М.: Мир. 1987. 616с.
13. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1969. 672 с.
14. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
15. *Чекурін В.Ф.* Варіаційний граничноелементний метод розв'язування обернених задач інтегральної фотопружності // Доп. НАН України. 1998. № 6.
16. *Чекурин В.Ф.* Вариационный метод решения прямых и обратных задач теории упругости для полубесконечной полосы // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 58–70.

Львов

Поступила в редакцию
18.08.1998