

УДК 539.3

© 2000 г. В.Г. КУЗНЕЦОВА, А.А. РОГОВОЙ

ЭФФЕКТ УЧЕТА СЛАБОЙ СЖИМАЕМОСТИ ЭЛАСТОМЕРОВ. ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Приводится определяющее соотношение слабосжимаемого изотропного упругого материала при конечных деформациях, позволяющее учесть изменение "объемного модуля" и "модуля сдвига" при изменении объема. Для демонстрации эффекта учета слабой сжимаемости методом малого параметра строится аналитическое решение задачи о поведении длинного полого цилиндра из реального материала при действии внутреннего давления и осевом смещении внешней поверхности. Редукция полученных решений на малые деформации приводит к известным соотношениям.

1. Введение. Основные соотношения. В работе [1] приведено определяющее соотношение слабосжимаемого изотропного упругого материала при конечных деформациях, позволяющее учесть изменение "объемного модуля" и "модуля сдвига" при изменении объема. Для идентификации параметров этой модели по экспериментальным данным исследованы простейшие процессы деформирования. Для демонстрации эффекта учета слабой сжимаемости строится аналитическое решение задачи о сдвиге с растяжением–сжатием реального слабосжимаемого материала.

Публикуемая статья является развитием работы [1] в части демонстрации эффекта учета слабой сжимаемости. Методом малого параметра строится аналитическое решение для бесконечно длинного полого эластомерного цилиндра под внутренним давлением с заданным осевым смещением внешней поверхности. Определяющее соотношение и соответствующий ему функционал аналогичны [1]. Тем не менее для удобства чтения и ссылки, приведем их здесь. Энергетический тензор напряжений \mathbf{Q} представляется в виде

$$\frac{1}{2}\sqrt{I_3}\mathbf{Q} = (\mathbf{g} - I_3\mathbf{C}^{-1})c_1 + (I_1\mathbf{g} - \mathbf{C} - 2I_3\mathbf{C}^{-1})c_2 + \sigma I_3\mathbf{C}^{-1} \quad (1.1)$$

$$\alpha(\sigma - \chi_1) = I_3 - 1, \quad \alpha = 1/\chi_2$$

$$c_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2, I_3) = k_i + p_i(I_3 - 1) + \frac{1}{2}q_i(I_3 - 1)^2$$

$$k_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{I}_i}, \quad p_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \frac{\partial \chi_1}{\partial \hat{I}_i}, \quad q_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \frac{\partial \chi_2}{\partial \hat{I}_i} \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$

$$\hat{W}(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = W(\hat{I}_1, \hat{I}_2, 1), \quad \chi_1(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \left. \frac{\partial W}{\partial I_3} \right|_{I_3=1}, \quad \chi_2(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial I_3^2} \right|_{I_3=1}$$

$$\hat{I}_1 = I_1 - (I_3 - 1), \quad \hat{I}_2 = I_2 - 2(I_3 - 1), \quad \hat{I}_3 = I_3 \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{g} – единичный тензор (метрический тензор начальной конфигурации), \hat{I}_1, \hat{I}_2 – инварианты, введенные в [2]; I_1, I_2, I_3 – главные инварианты тензора меры деформации Коши–Грина \mathbf{C} ; W – упругий потенциал, представленный в виде ряда по треть-

ему инварианту в окрестности единицы с удержанием в силу слабой сжимаемости материала только членов не выше квадратичных:

$$W(\hat{I}_1, \hat{I}_2, I_3) = \hat{W}(\hat{I}_1, \hat{I}_2) + \chi_1(I_3 - 1) + \chi_3(I_3 - 1)^2 / 2$$

В [3-6] показано, что

$$2(k_1 + k_2)|_{C=g} = G_0, \quad 4\left(\chi_2 - \frac{G_0}{3}\right)\Big|_{C=g} = B_0, \quad \frac{\chi_2 - (k_1 + k_2)}{2\chi_2 - (k_1 + k_2)}\Big|_{C=g} = \nu_0 \quad (1.4)$$

где G_0, B_0 и ν_0 – модуль сдвига, объемный модуль и коэффициент Пуассона линейной теории упругости, а в недеформированной и ненапряженной конфигурации

$$\chi_1(\hat{I}_1, \hat{I}_2)|_{C=g} = 0 \quad (1.5)$$

Для того, чтобы уравнения состояния были энергетически допустимыми, должны выполняться равенства:

$$\frac{\partial k_1}{\partial \hat{I}_2} = \frac{\partial k_2}{\partial \hat{I}_1}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \hat{I}_2} = \frac{\partial p_2}{\partial \hat{I}_1}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial \hat{I}_2} = \frac{\partial q_2}{\partial \hat{I}_1} \quad (1.6)$$

Положим, как и в [1], k_1 и k_2 постоянными, а функции χ_1 и χ_2 представим в виде

$$\chi_1 = p_1(\hat{I}_1 - 3) + p_2(\hat{I}_2 - 3), \quad \chi_2 = \chi_{20} + q_1(\hat{I}_1 - 3) + q_2(\hat{I}_2 - 3) \quad (1.7)$$

где p_1, p_2, χ_{20}, q_1 и $q_2 = \text{const}$. Заметим, что такое задание k_1, k_2 и χ_1 и χ_2 удовлетворяет соотношениям (1.2), (1.5) и (1.6). Тогда функционал (1.12) работы [1], связанный с уравнением состояния (1.1)–(1.2), конкретизируется в выражение

$$He(\sigma, \mathbf{u}) = \int_{V_0} \left(\sigma(I_3 - 1) - \frac{\alpha_0(\sigma - p_1(\hat{I}_1 - 3) - p_2(\hat{I}_2 - 3))^2}{2(1 + Q_1(\hat{I}_1 - 3) + Q_2(\hat{I}_2 - 3))} + k_1(\hat{I}_1 - 3) + k_2(\hat{I}_2 - 3) \right) dV_0 - \int_{S_p^0} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dS_p^0 \quad (1.8)$$

$$\alpha_0 = 1/\chi_{20}, \quad Q_1 = q_1/\chi_{20}, \quad Q_2 = q_2/\chi_{20} \quad (1.9)$$

где \mathbf{u} – вектор перемещений, S_p^0 – часть поверхности V_0 – объема в недеформированной конфигурации, на которой приложены силы \mathbf{p} . Варьируемые параметры функционала (1.8) σ и \mathbf{u} .

Как и в [1], будем полагать (см. (1.7), (1.9)) $G_0 = 2(k_1 + k_2) = 1,0$ МПа, $p_1 + p_2 = 1,425G_0, q_1 + q_2 = 673,97G_0, \chi_{20} = 769,4$ МПа. Эти величины определены в [1] по экспериментальным данным работ [7–10].

2. Полюй цилиндр из слабосжимаемого материала под внутренним давлением при осевом смещении внешней поверхности. Аналитическое решение. С целью продемонстрировать эффект, к которому приводит учет слабой сжимаемости материала при конечных деформациях, исследуем заглавную задачу. Бесконечно длинный полюй цилиндр, внутреннего радиуса a и внешнего b , в начальной конфигурации нагружен по внутренней поверхности давлением p_n при нулевом осевом смещении. Внешняя поверхность его имеет осевое смещение w^* при нулевом радиальном.

В цилиндрической системе координат положение точек тела в начальном состоянии определяется радиус-вектором $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_1 + z\mathbf{e}_3, |\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$, а в деформированной конфигурации – радиус-вектором

$$\mathbf{R} = R(r)\mathbf{e}_1 + (z + w(r))\mathbf{e}_3, \quad R(b) = b, \quad w(a) = 0, \quad w(b) = w^* \quad (2.1)$$

Тогда базисные векторы, компоненты метрического тензора и определитель его ковариантных составляющих запишутся в начальной и текущей конфигурациях в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_2 = r\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{e}_3 \\ g_{11} = g_{33} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g^{11} = g^{33} = 1, \quad g^{22} = 1/r^2, \quad \tilde{g} = \det g_{ij} = r^2 \\ \mathbf{r}^1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}^2 = \mathbf{e}_2/r, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{R}_1 = R'\mathbf{e}_1 + w'\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{R}_2 = R\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{e}_3, \quad R' = \partial R / \partial r, \quad w' = \partial w / \partial r$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} G_{11} = (R')^2 + (w')^2 & G_{12} = 0 & G_{13} = w' \\ G_{21} = 0 & G_{22} = R^2 & G_{23} = 0 \\ G_{31} = w' & G_{32} = 0 & G_{33} = 1 \end{array} \right\|$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} G^{11} = 1/(R')^2 & G^{12} = 0 & G^{13} = -w'/(R')^2 \\ G^{21} = 0 & G^{22} = 1/R^2 & G^{23} = 0 \\ G^{31} = -w'/(R')^2 & G^{32} = 0 & G^{33} = ((R')^2 + (w')^2)/(R')^2 \end{array} \right\|$$

$$\tilde{G} = \det G_{ij} = (R'R)^2 \quad (2.3)$$

Из этих соотношений

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{C}) = (R')^2 + (w')^2 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 + 1, \quad I_2(\mathbf{C}) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 + (R')^2 + \left(\frac{R'R}{r}\right)^2 + \left(\frac{Rw'}{r}\right)^2 \\ I_3(\mathbf{C}) = (R'R/r)^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

и из выражений (1.3):

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 = (R')^2 + (w')^2 + (R/r)^2 - (R'R/r)^2 + 2 \\ \hat{I}_2 = (R')^2 + (R/r)^2 + (Rw'/r)^2 - (R'R/r)^2 + 2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Функционал (1.8), учитывая, что \hat{I}_1, \hat{I}_2 и I_3 есть функции r, R, R' и w' (см. соотношения (2.4), (2.5)), принимает вид

$$He(\sigma, \mathbf{u}) = 2\pi \int_a^b F(r, \sigma, R, R', w') dr - 2\pi a p_n (R(a) - a) \quad (2.6)$$

$$F(r, \sigma, R, R', w') = r \left(\sigma(I_3 - 1) - \frac{\alpha_0(\sigma - p_1(\hat{I}_1 - 3) - p_2(\hat{I}_2 - 3))^2}{2(1 + Q_1(\hat{I}_1 - 3) + Q_2(\hat{I}_2 - 3))} + k_1(\hat{I}_1 - 3) + k_2(\hat{I}_2 - 3) \right) \quad (2.7)$$

Уравнениями Эйлера для этого функционала будут

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial w'} = C_0, \quad \frac{\partial F}{\partial R} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial R'} \right) = 0 \quad (2.8)$$

условием трансверсальности

$$\frac{\partial F}{\partial R'} \Big|_{r=a} = -2\pi a p_n \quad (2.9)$$

и граничными условиями (см. (2.1))

$$R|_{r=b} = b, \quad w|_{r=b} = w^*, \quad w|_{r=a} = 0 \quad (2.10)$$

Решение этих уравнений будем искать в виде рядов по малому параметру α_0 , сохраняя только члены не выше первой степени и в решениях и во всех преобразованиях

$$R(r) = R_0(r) + \alpha_0 \rho(r), \quad w(r) = w_0(r) + \alpha_0 \zeta(r), \quad \sigma(r) = \sigma_0(r) + \alpha_0 \eta(r) \quad (2.11)$$

Тогда, учитывая соотношения (2.4)–(2.7), коэффициентом в первом уравнении Эйлера (2.8) при α_0 в нулевой степени будет равенство $(R'_0 R_0)^2 - r^2 = 0$ с граничным условием $R_0 = b$ при $r = b$, вытекающим из (2.10), и решение его есть $R_0 = r$. Поэтому $R = r + \alpha_0 \rho$ и $R' = 1 + \alpha_0 \rho'$, что и учтено в нижеследующих соотношениях. Уравнение

$$2\left(\rho' + \frac{\rho}{r}\right) - \frac{\sigma_0 - P(w'_0)^2}{1 + Q(w'_0)^2} = 0 \quad (2.12)$$

$$P = p_1 + p_2, \quad Q = Q_1 + Q_2 \quad (2.13)$$

с граничным условием $\rho = 0$ при $r = b$, вытекающим из (2.10), является коэффициентом первого уравнения Эйлера (2.8) при α_0 в первой степени.

Второе уравнение Эйлера (2.8) также распадается на два и при α_0 в нулевой степени получаем уравнение

$$G_0 w'_0 = C_{01} / r \quad (2.14)$$

с граничными условиями $w_0(b) = w^*$, $w_0(a) = 0$, вытекающими из (2.10). Здесь, в соответствии с (1.4), $G_0 = 2(k_1 + k_2)$ и C_{01} есть коэффициент при α_0 в нулевой степени в представлении $C_0 = C_{01} + \alpha_0 C_{02}$. Решением уравнения (2.14), удовлетворяющим заданным граничным условиям, будет

$$w_0 = A \ln \frac{r}{a}, \quad A = w^* / \ln \frac{b}{a} \quad (2.15)$$

При α_0 в первой степени имеем уравнение

$$G_0 \zeta' + 4Ak_2 \frac{\rho}{r^2} + \frac{2PA(r^2 \sigma_0 - PA^2)}{rZ_r} + \frac{QA(r^2 \sigma_0 - PA^2)^2}{r^2 Z_r^2} = \frac{C_{02}}{r} \quad (2.16)$$

с граничными условиями

$$\zeta|_{r=b} = 0, \quad \zeta|_{r=a} = 0$$

вытекающими также из (2.10), где

$$Z_\beta = \beta^2 + Q A^2 \quad (2.17)$$

и учтены обозначения (2.13).

Наконец, третье уравнение Эйлера (2.8) сводится к двум следующим: $k_2 A^2 / r^2 - r \sigma'_0 = 0$ с граничным условием $\sigma_0 = -p_n / 2$ ($r = a$), вытекающим из условия трансверсальности (2.9), решением которого будет

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \left(-p_n + \frac{A^2 k_2 (r^2 - a^2)}{a^2 r^2} \right) \quad (2.18)$$

и

$$\frac{2p_2 A^2 (r^2 \sigma_0 - PA^2)}{r^2 Z_r} + \frac{Q_2 A^2 (r^2 \sigma_0 - PA^2)^2}{r^2 Z_r^2} + 4k_2 \frac{A \zeta'}{r} - \sigma_0 \frac{r^2 A^2 D}{a^2 Z_r^2} - 2r\eta' - \frac{k_2 A^2 B}{2a^2 Z_r} + \frac{k_2 A^4 H}{2r^2 Z_r} = 0 \quad (2.19)$$

$$B = A^2 k_2 - a^2 p_n, \quad H = k_2 + 2P, \quad D = a^2 H + BQ \quad (2.20)$$

с вытекающим из условия трансверсальности (2.9) уравнением для определения постоянной интегрирования

$$r\eta + (2\sigma_0 - G_0)\rho + r\sigma_0 \rho' = 0 \quad \text{при} \quad r = a \quad (2.21)$$

При формировании (2.19) использованы уравнение (2.12) и, частично, соотношение (2.18). Зная w_0 (соотношение (2.15)) и σ_0 (соотношение (2.18)), и последовательно решая уравнения (2.12), (2.16) и (2.19), определяем ρ , ζ и η :

$$\rho = \frac{A^2 D}{8a^2 r} \ln \frac{Z_b}{Z_r} - \frac{B(b^2 - r^2)}{8a^2 r} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{A}{4a^4 G_0 \ln b/a} \left(\frac{A^2 D k_2}{r^2} \left(a^2 \ln \frac{b}{a} \ln \frac{Z_b}{Z_r} - r^2 \ln \frac{b}{r} \ln \frac{Z_b}{Z_a} \right) + \right. \\ & + \frac{D^2}{2Q} \left(\ln Z_a \ln \frac{b}{r} + \ln Z_b \ln \frac{r}{a} - \ln Z_r \ln \frac{b}{a} \right) + \\ & \left. + \frac{A^2 D^2}{2} \left(\frac{\ln b/r}{Z_a} + \frac{\ln r/a}{Z_b} - \frac{\ln b/a}{Z_r} \right) + \frac{B k_2}{r^2} \left(r^2 b^2 \ln \frac{b}{r} + r^2 a^2 \ln \frac{r}{a} - a^2 b^2 \ln \frac{b}{a} \right) \right) \quad (2.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta = & V_1 \ln \frac{a}{r} - \frac{V_1}{2} \ln \frac{Z_a}{Z_r} + \frac{V_2}{a^2 r^2} (r^2 - a^2) + \frac{V_3}{Z_a Z_r} (r^2 - a^2) + \frac{A^2 B k_2^2 b^2}{4a^6 G_0 r^4} (r^4 - a^4) - \\ & - \frac{A^4 D k_2^2}{4a^6 G_0 r^4} \left(r^4 \ln \frac{Z_b}{Z_a} - a^4 \ln \frac{Z_b}{Z_r} \right) + \frac{A k_2 (r^2 - a^2)}{4G_0 a^6 r^2 \ln b/a} \left(\frac{AD(D + 2A^2 k_2 Q)}{2Q} \ln \frac{Z_b}{Z_a} - \frac{w^* a^4 H^2}{Q} - \right. \\ & \left. - 2w^* a^2 B k_2 - AB k_2 (b^2 - a^2) - \frac{A^3 D^2 (b^2 - a^2)}{2Z_a Z_b} \right) + \\ & + \frac{P_n + 2G_0}{16a^4} \left(A^2 D \ln \frac{Z_b}{Z_a} - B(b^2 - a^2) \right) + p_n \frac{B - A^2 H}{8Z_a} \quad (2.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 = & \frac{(DW_1 - W_3)Q + a^2 H^2 W_2 + 2Dk_2^2 Q}{4a^2 G_0 Q^3} \\ V_2 = & \frac{A^2 (a^2 H (2W_1 Q + HW_2) - 8Bk_2^2 Q^2 + 4Dk_2^2 Q)}{16a^2 G_0 Q^2} \\ V_3 = & \frac{A^2 (BW_4 Q^2 - 2a^2 W_3 Q + a^4 H^2 W_2)}{16a^4 G_0 Q^2} \quad (2.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 = & (k_2 - 2p_2)G_0 + 8Pk_2, \quad W_2 = Q_2 G_0 - 4Qk_2 \\ W_3 = & Dk_2 G_0 - BHW_2, \quad W_4 = BW_2 - 2DG_0 \quad (2.26) \end{aligned}$$

Тензор истинных напряжений запишется в базисе \mathbf{e}_i в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & Q^{11} (R')^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + Q^{22} R^2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + (Q^{33} + 2Q^{13} w' + Q^{11} (w')^2) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + \\ & + (Q^{11} R' w' + Q^{13} R') (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^{ij} = & \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[(g^{ij} - I_3 G^{ij}) \left(k_1 + p_1 (I_3 - 1) + \frac{1}{2} q_1 (I_3 - 1)^2 \right) + \right. \\ & \left. + (I_1 g^{ij} - g^{im} g^{jn} G_{mn} - 2I_3 G^{ij}) (k_2 + p_2 (I_3 - 1) + \frac{1}{2} q_2 (I_3 - 1)^2) + \sigma I_3 G^{ij} \right] \end{aligned}$$

где Q^{ij} – составляющие энергетического тензора напряжений (1.1). Тогда, с учетом соотношений (2.2)–(2.4), (2.11),

$$T^{11} = 2\sigma_0 + 2\alpha_0 \left(\eta + \sigma_0 \gamma - G_0 \frac{\rho}{r} \right) \quad (2.27)$$

$$T^{22} = 2 \left(\frac{A^2 k_2}{r^2} + \sigma_0 \right) + 2\alpha_0 \left(\eta - \left(\frac{A^2 k_2}{r^2} + \sigma_0 \right) \left(\rho' - \frac{\rho}{r} \right) + \frac{2A^2 \gamma (p_2 + \gamma Q_2)}{r^2} + \frac{2Ak_2}{r} \zeta' + (2\sigma_0 - G_0) \rho' \right) \quad (2.28)$$

$$T^{33} = 2\sigma_0 + \frac{A^2}{r^2} G_0 - \alpha_0 \left(\left(2(G_0 - \sigma_0) + \frac{A^2}{r^2} (G_0 - 4(P + \gamma Q)) \right) \gamma - \frac{4A^2}{r^2} k_2 \frac{\rho}{r} - 2\eta - 2G_0 \frac{A\zeta'}{r} \right) \quad (2.29)$$

$$T^{13} = \frac{AG_0}{r} + \alpha_0 \left(\frac{A\rho}{r^2} (4k_2 - G_0) + G_0 \zeta' + \frac{4A\gamma(P + \gamma Q)}{r} \right) \quad (2.30)$$

где выражения для w_0 , σ_0 , ρ , ζ и η даются соотношениями (2.15), (2.18), (2.22)–(2.26):

$$\gamma = \rho' + \frac{\rho}{r} = \frac{r^2 B - a^2 A^2 H}{4a^2 Z_r}$$

$$\zeta' =$$

$$= \frac{1}{4G_0 a^4 r \ln b/a} \left(\frac{AD(D + 2A^2 k_2 Q)}{2Q} \ln \frac{Z_b}{Z_a} - \frac{w^* a^4 H^2}{Q} - ABk_2(b^2 - a^2) - \frac{A^3 D^2 (b^2 - a^2)}{2Z_a Z_b} \right) - \frac{AQ(a^2 A^2 H - Br^2)^2}{4a^4 G_0 r Z_r^2} + \frac{AP(a^2 A^2 H - Br^2)}{a^2 G_0 r Z_r} + \frac{ABk_2(b^2 - r^2)}{2a^2 G_0 r^3} - \frac{A^3 D k_2}{2a^2 G_0 r^3} \ln \frac{Z_b}{Z_r}$$

Замечание. Для этой же задачи, но с закрепленной в радиальном направлении внутренней поверхностью, имевшей осевое смещение w^* , и нагруженной нормальным давлением наружной с нулевым осевым перемещением, все полученные соотношения справедливы при замене a на b и b на a .

3. О достоверности полученных результатов. Из соотношения Коши $\mathbf{p} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}$ на внутренней поверхности цилиндра, для которой $\mathbf{N} = -\mathbf{e}_1$, следует, что

$$\mathbf{p}|_{r=a} = -T^{11} \mathbf{e}_1 - T^{13} \mathbf{e}_3|_{r=a} \quad (3.1)$$

Из выражений (2.18) и (2.21) имеем

$$\sigma_0|_{r=a} = -\frac{p_n}{2}, \quad \eta|_{r=a} = (G_0 - 2\sigma_0) \frac{\rho}{r} - \sigma_0 \rho' \Big|_{r=a}$$

и, подставляя их в соотношение (2.27), получаем

$$T^{11}|_{r=a} = -p_n \left(1 - \alpha_0 \frac{\rho}{a} \right) \Big|_{r=a} \quad (3.2)$$

Усилие \mathbf{p} в левой части выражения (3.1), приложенное в текущей конфигурации, оп-

ределяется через усилие \mathbf{p}_0 , приложенное в начальной конфигурации, известным соотношением

$$\mathbf{p} = (I_3 \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{n})^{-1/2} \mathbf{p}_0 \quad (3.3)$$

где \mathbf{n} – внешняя единичная нормаль к недеформированной поверхности. При $r = a$ нормаль $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$ и выражение (3.3), учитывая соотношения (2.3) для G^{11} и (2.4) для I_3 , приводится к виду

$$\mathbf{p} = \frac{r}{r + \alpha_0 \rho} \bigg|_{r=a} \mathbf{p}_0 = \left(1 - \alpha_0 \frac{\rho}{a} \right) \bigg|_{r=a} \mathbf{p}_0 \quad (3.4)$$

где при получении окончательного выражения использовано разложение дроби в ряд по α_0 с удержанием только линейных слагаемых. Тогда из выражений (3.1), (3.2) и (3.4) следует равенство

$$\left(1 - \alpha_0 \frac{\rho}{a} \right) \bigg|_{r=a} (p_0)_n = \left(1 - \alpha_0 \frac{\rho}{a} \right) \bigg|_{r=a} p_n$$

где $(p_0)_n$ – нормальная составляющая вектора усилия \mathbf{p}_0 , приложенного на внутренней поверхности цилиндра в начальной конфигурации, и, конечно же, эта составляющая должна равняться p_n .

Другим подтверждением достоверности является редукция полученных соотношений на малые деформации. Развиваемый при этом подход интересен и полезен к тому же и сам по себе.

Формализацией условия малого различия двух конфигураций, начальной, определяемой радиус-вектором \mathbf{r} , и текущей с радиус-вектором \mathbf{R} , является соотношение $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{u}$, где \mathbf{u} – вектор перемещений, а ε – малый параметр, введение которого является удобным инструментом формализации малости и всех других величин (в частности, производных), определяемых через \mathbf{u} . Применительно к слабосжимаемым материалам эту формализацию можно расширить

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \varepsilon(\mathbf{u}_0 + \alpha_0 \mathbf{u}_1) \quad (3.5)$$

где $\mathbf{R}_0 = \mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{u}_0$ определяет конфигурацию несжимаемого материала, мало отличающуюся от начальной, а последнее слагаемое в скобках дает малую поправку на сжимаемость относительно вектора перемещений \mathbf{u}_0 . Поэтому параметр ε должен относиться и относиться, как это записано в (3.5), ко всему вектору $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \alpha_0 \mathbf{u}_1$.

Малые параметры ε и α_0 независимые величины: материал может быть несжимаемым ($\alpha_0 = 0$), но при этом деформации существуют ($\varepsilon \neq 0$). Чтобы оставаться в рамках малых деформаций и слабой сжимаемости материала будем выполнять все необходимые преобразования с точностью до выражений $A = a + \varepsilon(a_0 + \alpha_0 a_1)$, где a – значение A в недеформированной конфигурации, a_0 – приращение A для несжимаемого материала, a_1 – поправка на слабую сжимаемость. Тогда, принимая во внимание (3.5), градиент места

$$\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{R})^T = \mathbf{g} + \varepsilon(\mathbf{h}_0 + \alpha_0 \mathbf{h}_1) \quad (3.6)$$

где ∇ – оператор Гамильтона в начальной конфигурации, $\mathbf{h}_i = (\nabla \mathbf{u}_i)^T$ ($i = 0, 1$). С учетом выражения (3.6) мера деформаций Коши – Грина запишется в виде

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{g} + 2\varepsilon(\mathbf{e}_0 + \alpha_0 \mathbf{e}_1) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{h}_i + \mathbf{h}_i^T)/2 \quad (i = 0, 1)$$

Главные инварианты C определяются соотношениями

$$I_1(C) = \mathbf{g} \cdot C = 3 + 2\varepsilon(I_1(\mathbf{e}_0) + \alpha_0 I_1(\mathbf{e}_1))$$

$$I_2(C) = (I_1^2(C) - I_1(C)^2)/2 = 3 + 4\varepsilon(I_1(\mathbf{e}_0) + \alpha_0 I_1(\mathbf{e}_1))$$

$$I_3(C) = I_3(\mathbf{g} + 2\varepsilon(\mathbf{e}_0 + \alpha_0 \mathbf{e}_1)) = I_3(\mathbf{g}) + \varepsilon \left. \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 1 + \varepsilon \left. \frac{\partial I_3}{\partial C} \right|_{\varepsilon=0} \cdot C_{II} \cdot \frac{\partial C}{\partial \varepsilon} =$$

$$= 1 + 2\varepsilon(I_1(\mathbf{e}_0) + \alpha_0 I_1(\mathbf{e}_1)).$$

При вычислении $I_3(C)$ учтены выражение (3.7), свойства второго изотропного тензора четвертого ранга C_{II} , а также что [11]:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \cdot C_{II} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{B}}$$

где $\Phi(\mathbf{A})$ – скалярная, векторная или тензорная функция тензорного аргумента \mathbf{A} , который, в свою очередь, есть функция тензорного аргумента $\mathbf{B} : \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{B})$. Кроме того, принято во внимание, что $\partial I_3 / \partial C = I_3(C)C^{-1}$, и эта производная при $C = \mathbf{g}$ равна единичному тензору \mathbf{g} . Исходя из этих представлений главных инвариантов, из соотношений (1.3) следует, что $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = 3$, из соотношения (1.5) или (1.7) – $\chi_1 = 0$, из соотношения (1.7) – $\chi_2 = \chi_{20}$ и, наконец, из выражения (1.2) – $\alpha_0 \sigma = 2\varepsilon(I_1(\mathbf{e}_0) + \alpha_0 I_1(\mathbf{e}_1))$. Последнее соотношение, вспоминая, что $\chi_{20} = 1/\alpha_0$ (см. (1.9)), удобно переписать в виде

$$\sigma = \varepsilon(\sigma_0 + \alpha_0 \eta), \quad \sigma_0 = 2\chi_{20} I_1(\mathbf{e}_0), \quad \eta = 2\chi_{20} I_1(\mathbf{e}_1) \quad (3.8)$$

Проведенный анализ дает основание представить решение (2.11) при малых деформациях в виде

$$R(r) = R_0(r) + \varepsilon \alpha_0 \rho(r), \quad w(r) = \varepsilon(w_0(r) + \alpha_0 \zeta(r)), \quad \sigma(r) = \varepsilon(\sigma_0(r) + \alpha_0 \eta(r)) \quad (3.9)$$

где $R_0 = r + \varepsilon u_0$ и учтено соотношение (3.8). Но, так как в предыдущем разделе в результате решения задачи оказалось, что $R_0 = r$, то $u_0 = 0$, и все полученные в нем соотношения справедливы с добавлением к функциям $w_0, \sigma_0, \rho, \zeta$ и η малого параметра ε . Тогда из выражения (2.15) имеем

$$\varepsilon w_0 = A \ln \frac{r}{a}, \quad A = \frac{\varepsilon w^*}{\ln b/a} \quad (3.10)$$

и, отбрасывая в соотношениях (2.12), (2.16), (2.18)–(2.21) члены второго порядка малости, т.е. члены с ε^2 , в частности, с A^2 , получаем, с одной стороны, следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 2(\rho' + \rho/r) - \sigma_0 &= 0, \quad \rho|_{r=b} = 0 \\ G_0 \zeta' = C_0 \rho / r, \quad \zeta|_{r=b} = \zeta|_{r=a} = 0 \\ \sigma_0' &= 0, \quad \sigma_0|_{r=a} = -p_n / 2 \\ \eta' &= 0, \quad r\eta - G_0 \rho = 0 \quad \text{при } r = a \end{aligned}$$

Здесь следует отметить, что граничное условие для σ_0 вытекает из условия трансверсальности (2.9), которое должно быть переписано в виде $\partial F / \partial R' = -2\varepsilon \lambda \rho_n$ при $r = a$ в силу того, что в функционале (2.6) величина $R(a) - a$ есть радиальное перемещение – малая величина и ее нужно записать в виде $\varepsilon(R(a) - a)$. Поэтому следует иметь в виду, что p_n это есть εp_n . Решением выписанной выше системы будет

$$\sigma_0 = -\frac{p_n}{2}, \quad \zeta = 0, \quad \rho = \frac{p_n}{8} \frac{b^2 - r^2}{r}, \quad \eta = G_0 \frac{p_n}{8} \frac{b^2 - a^2}{a^2} \quad (3.11)$$

и все неизвестные функции, входящие в представление (3.9), определены. С другой стороны, учитывая, что $Z_\beta = \beta^2$ (соотношение (2.17)), $B = -\varepsilon a^2 p_n$ и $D = a^2(H - \varepsilon p_n Q)$ (соотношения (2.20)), решения (2.18), (2.22)–(2.24) сводятся к выражениям (3.11).

Таким образом, решения редуцированных на малые деформации дифференциальных уравнений предыдущего раздела совпали с редуцированными решениями полных уравнений, что является определенной гарантией правильности полученных в предыдущем разделе результатов. Напряжения (соотношения (2.27)–(2.30)) сводятся, с учетом решений (3.11), к виду

$$\begin{aligned} T^{11} &= 2\sigma_0 + 2\alpha_0 \left(\eta - G_0 \frac{\rho}{r} \right) = -p_n + \alpha_0 G_0 \frac{p_n}{4} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{r^2 - a^2}{r^2} \\ T^{22} &= 2\sigma_0 + 2\alpha_0 (\eta - G_0 \rho') = -p_n + \alpha_0 G_0 \frac{p_n}{4} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{r^2 + a^2}{r^2} \\ T^{33} &= 2\sigma_0 - 2\alpha_0 (G_0 \gamma - \eta) = -p_n + \alpha_0 G_0 \frac{p_n}{4} \frac{a^2 + b^2}{a^2} \\ T^{13} &= \frac{AG_0}{r} = G_0 \frac{w^*}{r \ln b/a} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Малый параметр ε в этих выражениях опущен.

Теперь попытаемся прийти к решениям (3.11) и напряжениям (3.12), исходя непосредственно из соотношений линейной теории упругости. Уравнения равновесия в этом случае сводятся для рассматриваемой задачи (осевая симметрия и обобщенное плоское деформированное состояние) к соотношениям

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rT^{11})}{\partial r} - \frac{T^{22}}{r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rT^{13})}{\partial r} = 0 \quad (3.13)$$

и решением второго уравнения будет

$$T^{13} = C_1/r \quad (3.14)$$

где C_1 – произвольная постоянная. Составляющие тензора напряжений, принимая во внимание второе соотношение (1.4) для модуля изменения объема, запишутся

$$\begin{aligned} T^{11} &= 4\chi_{20} \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} - 2G_0 \frac{u}{r}, \quad T^{22} = 4\chi_{20} \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} - 2G_0 \frac{\partial u}{\partial r} \\ T^{33} &= (4\chi_{20} - 2G_0) \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r}, \quad T^{13} = G_0 \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.15)$$

где u – радиальное, а w – осевое перемещения. Подстановка T^{13} из выражений (3.15) в уравнение (3.14) позволяет найти w при заданных для этой составляющей вектора перемещения граничных условиях:

$$w = A \ln \frac{r}{a}, \quad A = \frac{w^*}{\ln b/a} \quad (3.16)$$

Результаты полностью совпадают с решением (3.10). Подстановка T^{11} и T^{22} из выражений (3.15) в первое уравнение равновесия (3.13) позволяет найти u : $u = C_1 r/2 + C_2/r$, где произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий $u = 0$ при $r = b$ и $T^{11} = -p_n$ при $r = a$. В результате получаем, что

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{a^2 p_n}{4\chi_{20} a^2 - G_0(a^2 - b^2)} = -\frac{a^2 p_n}{\chi_{20}[4a^2 - \alpha_0 G_0(a^2 - b^2)]} = \\ &= -\alpha_0 a^2 p_n \left(\frac{1}{4a^2} + \alpha_0 G_0 \frac{a^2 - b^2}{16a^4} \right) = -\alpha_0 \frac{p_n}{4} + \alpha_0^2 G_0 \frac{p_n}{16a^2} (b^2 - a^2) \end{aligned}$$

Здесь использовано разложение выражения в квадратных скобках в знаменателе в ряд по α_0 с сохранением только линейных слагаемых и соотношение $\alpha_0 = \chi_{20}^{-1}$. В окончательном виде удержаны и квадратичные по α_0 слагаемые, чтобы в соотношениях для напряжений (3.15) иметь линейные по этому параметру составляющие. Поступая аналогичным образом, получаем

$$C_2 = \alpha_0 \frac{b^2 p_n}{8} - \alpha_0^2 G_0 \frac{p_n}{32} \left(\frac{b}{a} \right)^2 (b^2 - a^2)$$

и, наконец,

$$u = \alpha_0 \frac{p_n}{8} \frac{b^2 - r^2}{r} - \alpha_0^2 G_0 \frac{p_n}{32} \frac{b^2 - a^2}{a^2} \frac{b^2 - r^2}{r} \quad (3.17)$$

Так как $u = R - r = \alpha_0 \rho$, где ρ определяется выражением (3.11), имеем, удерживая в соотношении (3.17) только линейные слагаемые по α_0 , полное совпадение и по радиальным перемещениям, а подставляя решения (3.16) и (3.17) в выражения для напряжений (3.15), имеем полное совпадение их с зависимостями (3.12), являющимися редуцированными на малые деформации решениями задачи. Полагая же в соотношениях (3.12) перемещение $w^* = 0$, приходим к известному решению задачи Ламе.

4. Численные результаты. Решение задачи второго раздела (соотношения (2.22)–(2.30)) получено как функция заданных осевого смещения внешней поверхности w^* и внутреннего давления p_n , отнесенного к недеформированной конфигурации (см. функционал (1.8) или (2.6)). В задачах с конечными деформациями обычно задается истинное давление, т.е. давление, приложенное к текущей (деформированной) поверхности. Связь между этими давлениями определяется для рассматриваемой задачи соотношением (3.4), откуда следует, что

$$p_n = \left(1 + \alpha_0 \frac{p}{r} \right) \Big|_{r=a} p$$

где p – истинное давление. Подставляя сюда выражение для p (2.22), в которое входит давление p_n , и разрешая полученное уравнение относительно p_n , приходим к соотношению

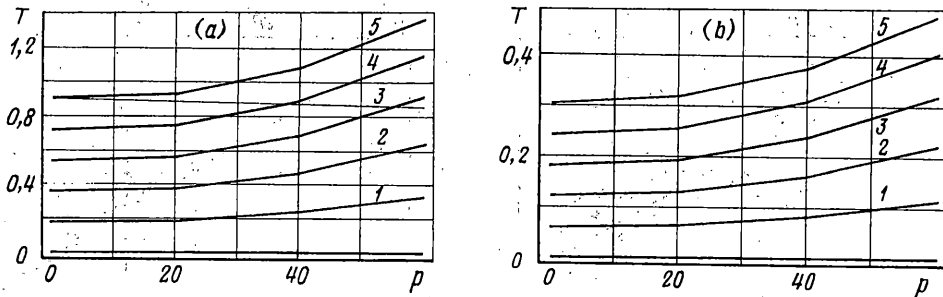
$$p_n = \left(1 + \alpha_0 \frac{p}{8a^2} \left(A^2 Q \ln \frac{Z_b}{Z_a} - (b^2 - a^2) \right) \right)^{-1} \times \\ \times \left(1 + \frac{\alpha_0 A^2}{8a^4} \left((a^2 H + A^2 k_2 Q) \ln \frac{Z_b}{Z_a} - k_2 (b^2 - a^2) \right) \right) p$$

Это выражение можно упростить, разлагая первый множитель в ряд по α_0 и удерживая при этом только линейные слагаемые. Тогда окончательное соотношение примет вид

$$p_n = p \left(1 + \frac{\alpha_0}{8a^4} \left(A^2 D^* \ln \frac{Z_b}{Z_a} - B^* (b^2 - a^2) \right) \right) \quad (4.1)$$

$$B^* = A^2 k_2 - a^2 p, \quad D^* = a^2 H + B^* Q$$

Теперь, задавая истинное давление p и получая из выражения (4.1) соответствующее ему давление p_n , по формулам (2.22)–(2.30) определяются перемещения и напряжения в рассматриваемой задаче. При этом необходимо контролировать относительное



Фиг. 1

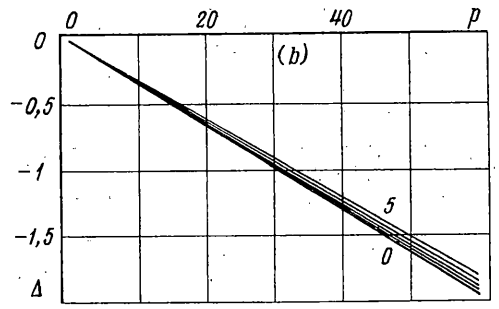
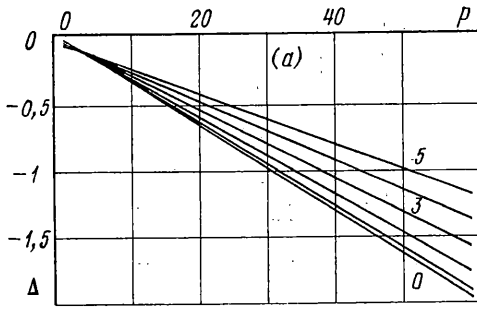
изменение объема

$$\Delta = \sqrt{I_3(C)} - 1 = \frac{R'R}{r} - 1 = \alpha_0 \left(\rho' + \frac{\rho}{r} \right) = \alpha_0 \gamma \quad (4.2)$$

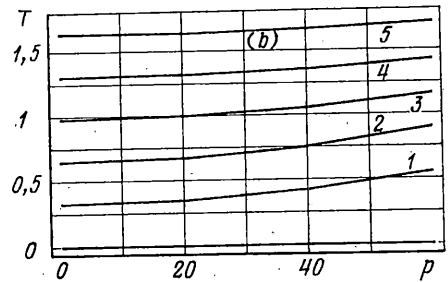
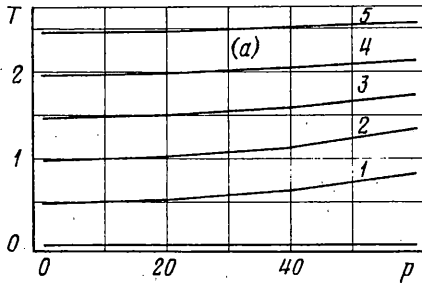
которое не должно превышать 2% (именно в этой области определены материальные константы).

Из всех составляющих тензора истинных напряжений (2.27)–(2.30) наиболее информативна для целей настоящей статьи сдвиговая составляющая T^{13} [МПа] и на фиг. 1 приведена зависимость усилия сдвига (T^{13} обозначено как T), рассчитанного по соотношениям (2.30), на внутренней (а) и внешней (б) поверхностях цилиндра с радиусами $a = 10$ мм и $b = 30$ мм ($k = b/a = 3$) как функция истинного внутреннего давления p при различных осевых смещениях w^* внешней поверхности (кривые 1–5 соответствуют $w^* = 2; 4; 6; 8; 10$ мм). Материальные константы при этом полагались равными (см. [1]): $G_0 = 2(k_1 + k_2) = 1,0$ МПа, $P = p_1 + p_2 = 1,425G_0$, $Q = Q_1 + Q_2 = (q_1 + q_2)/\chi_{20} = 0,87597$, $\alpha_0 = 1/\chi_{20} = 0,13_{10} - 2$ МПа⁻¹. Легко заметить, анализируя соотношения для p (2.22), γ и η' (конец второго раздела), что $T^{13} = T^{13}(k_2, G_0, P, Q)$. Поэтому был проведен расчет T^{13} для различных k_2 ($0 \leq k_2 \leq G_0/2$) при фиксированном $G_0 = 1,0$ МПа, показавший очень слабую зависимость T^{13} на внешней и внутренней поверхностях цилиндра от k_2 , в связи с чем результаты, приведенные на фиг. 1 для $k_2 = 0$ справедливы для всего указанного выше диапазона его изменения. Из фиг. 1, б следует, что при фиксированном осевом смещении внешней поверхности w^* и увеличении внутреннего давления p от нуля до 60 МПа нужно в 1,7–2 раза увеличивать усилие сдвига p_τ , чтобы удерживать это заданное осевое смещение. И, наоборот, при фиксированном усилии сдвига p_τ , например, $p_\tau = 0,3$ МПа, что соответствует при отсутствии внутреннего давления осевому смещению $w^* = 10$ мм, при увеличении давления до 60 МПа осевое смещение уменьшается почти в два раза. Этот достаточно сильный эффект объясняется значительным увеличением "модуля сдвига" при сжатии (относительном изменении объема), которое можно учесть только в рамках модели слабосжимаемого материала (см. [1]). Относительное изменение объема, рассчитанное по соотношению (4.2), приведено на фиг. 2 (а – для внутренней поверхности, б – для внешней) в зависимости от приложенного давления при различных смещениях внешней поверхности (кривые 0–5 соответствуют $w^* = 0; 2; 4; 6; 8; 10$ мм). Из фиг. 2, б следует, что при давлении 60 МПа объем меняется на 2% (и слабо зависит от осевого смещения наружной поверхности), что в соответствии с работой [1] приводит к увеличению "модуля сдвига" в 1,5–1,8 раза.

Усилие сдвига на внутренней поверхности (фиг. 1, а) приведено для сведения. Тонкой линией здесь показана зависимость этого усилия от внутреннего давления при фиксированном усилии сдвига наружной поверхности в 0,3 МПа (соответствующее при отсутствии давления начальному осевому смещению внешней поверхности 10 мм).



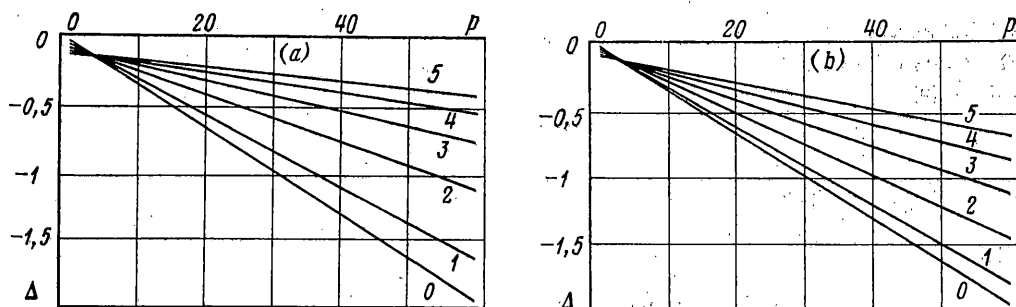
Фиг. 2



Фиг. 3

Относительное изменение объема для этой поверхности (фиг. 2, а) существенно зависит от осевого смещения внешней поверхности — чем оно больше, тем слабее относительное изменение объема зависит от внутреннего давления. Этому можно дать следующее объяснение. При нулевом внутреннем давлении относительное изменение объема Δ при осевом сдвиге внешней поверхности от нулевого до 10 мм монотонно изменяется от 0 до $-0,008\%$ на внешней поверхности и до $-0,044\%$ на внутренней. Это приводит к тому, что "объемный модуль" на внутренней поверхности выше, чем на наружной (см. [1]). Приложенное затем внутреннее давление приводит к дальнейшему уменьшению Δ , но так как "объемный модуль" на внутренней поверхности выше, чем на внешней, то скорость относительного изменения объема для внутренней поверхности меньше, чем для внешней и, как следствие этого, скорость возрастания "модуля сдвига" на внутренней поверхности меньше, чем на наружной. Поэтому с увеличением номера кривых на фиг. 2, а, т.е. с увеличением осевого смещения внешней поверхности, уменьшается по абсолютной величине соответствующая кривой производная.

На фиг. 3, 4 приведены аналогичные фиг. 1 и 2 результаты, но для цилиндра с радиусами $a = 10$ мм и $b = 15$ мм ($k = 1, 5$). Зависимость усилия сдвига от приложенного внутреннего давления (фиг. 3) здесь значительно слабее, чем на фиг. 1. Объяснением этому служит фиг. 4, которая трактуется аналогично фиг. 2. Здесь такая трактовка еще нагляднее, так как при отсутствии внутреннего давления относительное изменение объема при осевом сдвиге внешней поверхности от нулевого до 10 мм монотонно изменяется от 0 до $-0,074\%$ на внешней поверхности и до $-0,089\%$ на внутренней. Поэтому и графики 4, а и 4, б почти одинаковы. Меньшее же относительное изменение объема (например, кривые 5 на фиг. 4 по сравнению с кривыми 1) приводит к меньшему изменению "модуля сдвига" и, как следствие, к более слабой зависимости усилия сдвига на внешней и внутренней поверхностях цилиндра от внутреннего давления (см. фиг. 3).



Фиг. 4

5. Заключение. Рассмотренная задача, теоретически предсказывающая достаточно сильный эффект уменьшения осевого смещения внешней поверхности цилиндра при фиксированных на ней усилиях сдвига и наложении внутреннего давления, позволяет, хотя бы в принципе, обсуждать схему эксперимента для подтверждения этого эффекта. Это являлось еще одной целью настоящей работы.

Работа выполнена в Институте механики сплошных сред Уральского отделения РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецова В.Г., Роговой А.А. Эффект учета слабой сжимаемости материала в упругих задачах с конечными деформациями // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С. 64–77.
2. Cescotto S., Fonder G. A finite element approach for large strains of nearly incompressible rubber-like materials // Inter. J. Solids Struct. 1979. V. 15. № 8. P. 589–605.
3. Кожевникова Л.Л., Кузнецов Г.Б., Роговой А.А. Равновесие тел вращения под действием массовых сил. М.: Наука, 1983. 102 с.
4. Роговой А.А. Уравнение состояния и функционал для слабосжимаемых и несжимаемых материалов при конечных деформациях // Механика эластомеров. Краснодар: КГУ, 1988. С. 72–88.
5. Kozhevnikova L.L., Moshev V.V., Rogovoy A.A. A continuum model for finite void growth around spherical inclusion // Inter. J. Solids Struct. 1993. V. 30. № 2. P. 237–248.
6. Роговой А.А. Модель слабосжимаемого и несжимаемого упругого тела при конечных деформациях // Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов / Под ред. В.В. Мошева. Екатеринбург: УрО РАН, 1997. С. 375–442.
7. Лейканд М.А., Лавендел Э.Э., Львов С.В., Болотин В.З. Исследование объемной сжимаемости резины // Механика эластомеров. Краснодар: КПИ, 1983. Вып. 2. С. 4–8.
8. Лейканд М.А., Львов С.В., Лавендел Э.Э. Экспериментальное исследование изменения объема резины при сжатии и растяжении // Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1981. Вып. 38. С. 49–53.
9. Лавендел Э.Э., Хричкова В.А., Лейканд М.А. Расчет жесткости сжатия тонкослойных резинометаллических элементов // Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1981. Вып. 38. С. 57–63.
10. Дымников С.И., Мейерс И.Р., Эрдманис А.Г. Упругие потенциалы для слабосжимаемых эластомерных материалов // Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1982. Вып. 40. С. 98–108.
11. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.