МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2000

УДК 531.53

© 2000 г. В.Э. ДЖАШИТОВ, В.М. ПАНКРАТОВ

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА СОБСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается в аналитической форме связь между разбросом собственных свойств линейной механической системы и отклонениями от номинальных значений параметров, определяющих элементы матриц кинетической энергии, скоростных и позиционных сил.

В задачах о свободных движениях линейных механических систем со многими степенями свободы (к таким системам можно отнести составные маятники, гироскопические системы, электромеханические устройства и т.п.) при традиционном подходе параметры, определяющие элементы матриц кинетической энергии, скоростных и позиционных сил, задаются в виде фиксированных чисел – номинальных значений. Т.е. в качестве математических моделей рассматриваются системы обыкновенных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [1].

Однако, в силу различных причин, таких как влияние температуры, неточности изготовления, сборки и регулировки реальных динамических систем, параметры, определяющие коэффициенты этих дифференциальных уравнений, могут получить отклонения от номинальных значений.

В данной работе рассматривается задача нахождения в аналитической форме связи между отклонениями собственных свойств линейных механических систем и отклонениями от номинальных значений параметров, определяющих коэффициенты системы дифференциальных уравнений, которые описывают движение этих систем.

При этом отклонения параметров полагаются малыми и не зависящими от времени.

Согласно [2] такой подход относится к задачам на собственные значения в условиях параметрических возмущений как детерминированного, так и случайного характера.

С другой стороны, исследование зависимости разброса собственных свойств механической системы от характера ее параметрических возмущений имеет не только теоретическое значение, но и является важным в прикладном смысле, когда необходимо иметь количественные оценки в аналитической форме для серии реально изготовляемых механических устройств, математической моделью которых служат системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Не нарушая общности рассуждений, рассмотрим механическую систему с диссипацией энергии или гироскопическими силами, которая описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$A\ddot{\mathbf{x}} + B\dot{\mathbf{x}} + C\mathbf{x} = 0 \tag{1}$$
$$A(\mathbf{d}) = a_{ik}(d_1,\dots,d_m), \quad B(\mathbf{d}) = b_{ik}(d_1,\dots,d_m)$$
$$C(\mathbf{d}) = c_{ik}(d_1,\dots,d_m) \quad (i,k = \overline{1,n})$$

где $\mathbf{x} = (x_1,\dots, x_n)^T$ – вектор состояния; A, B, C – $n \times n$-матрицы, зависящие от m параметров. Эти параметры d_ν, определяющие элементы матриц a_{ik}, b_{ik} и c_{ik}, могут быть конструктивными (геометрические размеры, плотность, вязкость и т.п.), технологическими (регулировки, настройки), эксплуатационными (износ, нагрев) и т.п. Кроме того, такие параметры, определенные расчетным путем при проектировании, могут зависеть от уровня представлений на современном этапе о процессах, сопровождающих функционирование сложных динамических систем (процессы распространения тепла, процессы взаимодействия с внешними магнитными и электрическими полями и т.п.).

Таким образом, в отличие от традиционного подхода, будем полагать, что каждый d_ν из m их числа задан с погрешностями. А именно

$$d_\nu = d_\nu^0 + \Delta d_\nu \quad (\nu = \overline{1,m}) \tag{2}$$

Кроме того, будем полагать, что Δd_ν могут быть и случайными величинами, для которых заданы либо их совместная плотность вероятностей, либо их макроскопические характеристики: математические ожидания, коварционная матрица и, если это необходимо, моменты более высокого порядка.

Без ограничения общности будем считать, что вектор $\mathbf{d}_0 = (d_1^0,\dots,d_\nu^0,\dots,d_m^0)^T$ – вектор номинальных значений представляет собой среднее значение векторной случайной величин $\mathbf{d}_0 = M(\mathbf{d})$.

Будем рассматривать моды динамической системы (1), т.е. ее частные решения вида

$$x_k(t) = e^{\lambda_k t}\mathbf{e}_k, \qquad \mathbf{e}_k \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 2n) \tag{3}$$

где λ_k – обобщенные собственные частоты (собственные значения), $\mathbf{e}_k$ – амплитуды k-ой моды (собственные вектора).

Если λ_k – чисто мнимое число, то λ_k – истинная частота k-ой моды. Действительная часть комплексного λ_k – определяет затухание (возбуждение) k-ой моды.

Величины $\lambda_k = \lambda_k(\mathbf{d})$, $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k(d)$ являются случайными величинами, если Δd_ν – случайные числа. Задача состоит в том, чтобы выразить вероятностные характеристики λ_k через вероятностные характеристики параметров $d_1,\dots,d_\nu,\dots, d_m$.

Задача отыскания мод сводится к решению следующей системы однородных алгебраических уравнений:

$$(\lambda^2 A + \lambda B + C)\mathbf{e} = 0 \tag{4}$$

Т.е. необходимо найти собственные значения и собственные вектора квадратного матричного пучка $\lambda^2 A + \lambda B + C$. Система (4) имеет решение при $\mathbf{e} \neq 0$ тогда и только тогда, когда

$$\det(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0 \tag{5}$$

Сведем задачу на собственные значения (4) к задаче на собственные значения для линейного пучка:

$$S\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \qquad \mathbf{y} = (y_1,\dots,y_{2n})^T \tag{6}$$

где $S = (2n \times 2n)$-матрица.

Пусть все собственные значения $\lambda_1,\dots, \lambda_{2n}$ – линейного пучка (6) являются простыми корнями характеристического уравнения $\det(S - \lambda E) = 0$ (E – единичная матрица). Тогда каждому λ_k ($k = 1, 2,\dots, 2n$) соответствует единственный, с точностью до скалярного множителя, собственный вектор $\mathbf{y}_k$ пучка (6). При этом вектор $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2,\dots, \mathbf{y}_{2n}$ образуют базис в $2n$-мерном пространстве R^{2n}. Это означает, что любой вектор $\mathbf{y} \in R^{2n}$ однозначно раскладывается по указанному базису

$$\mathbf{y} = C_k\mathbf{y}_k \tag{7}$$

Здесь и в дальнейшем используем тензорную символику [4]. По одинаковым индексам, занимающим разные позиции, предполагается суммирование. При этом индексы можно поднимать и опускать. Коэффициенты C_k в разложении (7) подсчитываются следующим образом [3]: $C_k = \mathbf{z}_k^T \mathbf{y}_k$ ($k = 1,2,\ldots, 2n$) где $\mathbf{z}_k$ – вектора-столбцы размерности $2n$.

Вектора $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2,\ldots, \mathbf{y}_{2n}$, – образуют систему, биортогональную системе $\mathbf{y}, \mathbf{y}_2,\ldots, \mathbf{y}_{2n}$, т.е.

$$\mathbf{z}_j \mathbf{y}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = k \\ 0 & \text{при} \quad j \neq k \end{cases} \tag{8}$$

Известно [2], что $\mathbf{z}_k$ являются собственными векторами транспонированной матрицы S^T: $S^T\mathbf{z}_k = \lambda \mathbf{z}_k (k = 1, 2,\ldots, 2n)$.

Если матрица A в (1) обратима ($\det A \neq 0$), то систему (4) можно линеаризовать по λ, увеличив вдвое размерность вектора состояния.

Умножив обе части (4) слева на A^{-1}. Получим

$$(\lambda^2 E + \lambda A^{-1} B + A^{-1} C)\mathbf{e} = 0 \tag{9}$$

Положим теперь

$$\mathbf{V} = \lambda \mathbf{e} \tag{10}$$

Тогда (9) примет вид:

$$-A^{-1}C\mathbf{e} - A^{-1}B\mathbf{V} = \lambda \mathbf{V} \tag{11}$$

Введем вектор состояния $\mathbf{y}$ размерности $2n$, такой что

$$\mathbf{y} = (\mathbf{e}/V) \tag{12}$$

и блочную матрицу размерности $2n \times 2n$:

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{Vmatrix} \tag{13}$$

Тогда (10) и (11) запишутся в виде линеаризованной по λ системы

$$S\mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \tag{14}$$

Т.е. из (4) вытекает (14), но верно и обратное: если для некоторого $\mathbf{y} \neq 0$ выполняется (14), то вектор $\mathbf{e}$, состоящий из первых n компонент вектора $\mathbf{y}$ удовлетворяет (4). А это означает, что задача на собственные значения квадратичного матричного пучка (4) действительно сводится к задаче на собственные значения для линейного пучка (14).

Так элементы матриц A, B и C зависят от параметров d_ν, то и $S = S(d_1,\ldots, d_m) = S(\mathbf{d})$.

Используя векторную форму, запишем

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \Delta\mathbf{d}, \qquad \Delta\mathbf{d} = (\Delta d_1,\ldots, \Delta d_m)^T \tag{15}$$

Основным предположением будет следующее: корни $\lambda_1(\mathbf{d}_0),\ldots, \lambda_{2n}(\mathbf{d}_0)$ характеристического уравнения (5) при $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0$ являются простыми. Наличие кратких корней требуют самостоятельного исследования. Для рассматриваемого случая соответствующие корням λ_ν собственные вектора $y_1(\mathbf{d}_0),\ldots, y_{2n}(\mathbf{d}_0)$ матрицы $S(\mathbf{d}_0)$ составляют базис в пространстве R^{2n}.

Предположим, что при указанных условиях из существования частных производных $S(\mathbf{d})$ при $\mathbf{d}$, близких к $\mathbf{d}_0$, по переменным $d_1,\ldots, d_m$ до порядка α следует существование частных производных того же порядка от собственных значений $\lambda_\nu(\mathbf{d})$, а при соответствующей нормировке, и от собственных векторов $\mathbf{y}_\nu(\mathbf{d})$ данное предположение позволяет разложить $\lambda_\nu(d)$ и $\mathbf{y}_\nu(\mathbf{d})$ в ряд Тейлора вблизи $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0$, предполагая Δd_ν малыми и ограничиваясь лишь линейными членами по Δd_ν:

$$\lambda_\nu(\mathbf{d}) = \lambda_\nu(\mathbf{d}_0) + \lambda_{\nu\mu}(\mathbf{d}_0)\Delta d\mu \tag{16}$$

$$y_\nu(\mathbf{d}) = y_\nu(\mathbf{d}_0) + y_{\nu\mu}(\mathbf{d}_0)\Delta d\mu \tag{17}$$

$$\lambda_{\nu\mu}(\mathbf{d}) = \frac{\partial\lambda_\nu(\mathbf{d})}{\partial d_\mu}, \quad y_{\nu\mu}(\mathbf{d}) = \frac{\partial y_\nu(\mathbf{d})}{\partial d_\mu}$$

Найдем сначала $\lambda_{\nu\mu}(\mathbf{d}_0)$ и $\mathbf{y}_{\nu\mu}(\mathbf{d}_0)$. Возьмем некую систему $\mathbf{z}_1(\mathbf{d}_0),\ldots, z_{2n}(\mathbf{d}_0)$ биортогональную системе $\mathbf{y}_1(\mathbf{d}_0),\ldots, y_{2n}(\mathbf{d}_0)$ и для $\mathbf{d}$ близких к d_0 нормируем систему собственных векторов $\mathbf{y}_1(d),\ldots, \mathbf{y}_{2n}(d)$ матрицы $S(d)$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\mathbf{z}_\mu^T(\mathbf{d}_0)\mathbf{y}(\mathbf{d}) = 1 \quad (\mu = 1,2,\ldots,2n) \tag{18}$$

Записывая (14) как $\mathbf{S}(\mathbf{d})\mathbf{y}(\mathbf{d}) = \lambda_\nu(\mathbf{d})\mathbf{y}_\nu(\mathbf{d})$, дифференцируя обе его части по d_μ и полагая $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0$, получим

$$S(\mathbf{d}_0)\mathbf{y}_{\nu\mu}(\mathbf{d}_0) - \lambda_\nu(\mathbf{d}_0)\mathbf{y}_{\nu\mu}(\mathbf{d}_0) = -S_\mu(\mathbf{d}_0)y_\nu(\mathbf{d}_0) + \lambda_{\nu\mu}(\mathbf{d}_0)\mathbf{y}_\nu(\mathbf{d}_0) \tag{19}$$

$$S_{\nu\mu} = \partial S(\mathbf{d})/\partial d_\mu \quad (\nu = 1,2,\ldots, 2n;\ \mu = 1,2,\ldots, 2n)$$

Теперь дифференцируем (18) по δ_μ и, полагая $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0$, получим

$$z_\nu^T(\mathbf{d}_0)\mathbf{y}_{\nu\mu}(d_0) = 0 \quad (\nu = 1,2,\ldots,2n; \quad \mu = 1,2,\ldots,2n) \tag{20}$$

Систему (19) можно рассматривать как систему уравнений относительно $y_{\nu\mu}(\mathbf{d}_0)$. Будем искать решение этой системы в виде разложения по базису $\mathbf{y}_1(\mathbf{d}_0),\ldots, \mathbf{y}_{2n}(\mathbf{d}_0)$:

$$y_{\nu\mu}(\mathbf{d}_0) = C_{\nu\mu l}\mathbf{y}_l(\mathbf{d}_0) \tag{21}$$

$$C_{\nu\mu l} = \mathbf{z}_l^T(\mathbf{d}_0)y_{\nu\mu}(\mathbf{d}_0) \tag{22}$$

Однако, из (20) следует, что

$$C_{\nu\mu l} = 0 \tag{23}$$

С другой стороны, подставляя (21) в (19) и, разлагая правую часть (19) по базису $\mathbf{y}_l(\mathbf{d}_0)$ $(l = 1,2,\ldots, 2n)$, получим

$$C_{\nu\mu l}(\lambda_\nu(\mathbf{d}_0) - \lambda_l(\mathbf{d}_0))\mathbf{y}_l(\mathbf{d}_0) =$$

$$= [z_l^T(\mathbf{d})(S_\mu(\mathbf{d}_0)\mathbf{y}_\nu(\mathbf{d}_0) - \lambda_{\nu\mu}(\mathbf{d}_0)\mathbf{y}_\nu(\mathbf{d}_0))]\mathbf{y}_l(\mathbf{d}_0) \tag{24}$$

Сравнивая в (24) коэффициенты при одинаковых y_1, получим

$$C_{\nu\mu l} = \frac{1}{\lambda_\nu(\mathbf{d}_0) - \lambda_l(\mathbf{d}_0)} z_l^T(\mathbf{d}_0)[S_\mu(\mathbf{d}_0)y_\nu(\mathbf{d}_0) - \lambda_{\nu\mu}(\mathbf{d}_0)y_\nu(\mathbf{d}_0)] \quad (l \neq \nu) \tag{25}$$

$$z^T(\mathbf{d}_0)[S_\mu(\mathbf{d}_0)y_\nu(\mathbf{d}_0) - \lambda_{\nu\mu}(\mathbf{d}_0)y_\nu(\mathbf{d}_0)] = 0 \quad (l = \nu) \tag{26}$$

Откуда следует

$$\lambda_{\nu\mu}(d_0) = z_\nu^T(d_0)S_\mu(d_0)y_\nu(\mathbf{d}_0) \tag{27}$$

Подставляя (25), (27) в (21), выражения (16) и (17) запишем в виде

$$\Delta\lambda_\nu(\mathbf{d}_0) = \lambda_\nu(\mathbf{d}) - \lambda_\nu(\mathbf{d}_0) = z_\nu^T(\mathbf{d}_0)S_\mu(\mathbf{d}_0)\mathbf{y}_\nu(\mathbf{d}_0)\Delta d_\mu \tag{28}$$

$$\Delta\mathbf{y}_\nu(\mathbf{d}_0) = \mathbf{y}_\nu(\mathbf{d}) - \mathbf{y}_\nu(\mathbf{d}_0) =$$
$$= \frac{1}{\lambda_\nu(\mathbf{d}_0) - \lambda_l(\mathbf{d}_0)} [z_1^T(\mathbf{d}_0) S_\mu(\mathbf{d}_0) y_\nu(\mathbf{d}_0)] y_l(\mathbf{d}_0) \Delta d_\mu \tag{29}$$

В (29) суммирование по всем $\nu \neq 1$. Пользуясь полученным выражением (28), положим

$$a_{\nu\mu} = \mathbf{z}^T(d_0) S_\mu(\mathbf{d}_0) \mathbf{y}_\mu(\mathbf{d}_0) \tag{30}$$

Тогда (28) примет вид

$$\Delta\lambda_\nu(\mathbf{d}_0) = a_{\nu\mu}\Delta d_\mu \tag{31}$$

Ограничимся случаем, когда математическое ожидание $M(\Delta d_\mu) = 0$. Тогда из (31) следует, что $M(\Delta\lambda_\nu) = 0$, т.е. вектор $\{\lambda_1(\mathbf{d}_0),\ldots, \lambda_{2n}(\mathbf{d}_0)\}$ есть среднее значение векторной случайной величины $\{\lambda_1(\mathbf{d}),\ldots, \lambda_{2n}(\mathbf{d})\}$. Пусть $k_d = (k_d)_{ij}$ $(i, j = 1, m)$ – ковариационная матрица величин $(\Delta d_1,\ldots, \Delta d_m)$, т.е. $(k_d)_{ij} = M(\Delta d_i \Delta d_j)$, а $k_\lambda((k_\lambda)_{\lambda\mu})$ $(\nu, \mu = 1, 2n)$ – ковариационная матрица величин $(\Delta\lambda_1,\ldots, \Delta\lambda_{2n})$, т.е. $(k_\lambda)_{\lambda\mu} = M(\Delta\lambda_\nu\Delta\lambda_\mu)$.

Имеем в силу (31):

$$(k_\lambda)_{\nu\mu} = M(a_\nu^i \Delta d_i a_\mu^j \Delta d_\mu) = a_\nu^i a_\mu^i M(\Delta d_i \Delta d_j) \tag{32}$$

или

$$(k_\lambda)_{\nu\mu} = a_\nu^i a_\mu^j (k_d)_{ij} \tag{33}$$

Рассмотрим частный случай, когда Δd_ν независимы. Это значит, что при $i \neq j$ $(k_d)_{ij} = 0$. Тогда в силу того, что дисперсии $D(\Delta d_i) = (k_d)_{ij}$ и $D(\Delta\lambda_\nu) = (k_\lambda)_{\nu\nu}$, получим связь между дисперсиями отклонений параметров Δd и дисперсиями разброса собственных значений $\Delta\lambda$ в окончательном виде

$$D(\Delta\lambda_\nu) = (a_\nu^i)^2 D(\Delta d_i) \tag{34}$$

Для иллюстрации рассмотрим систему связанных маятников разной массы. Система имеет две свободы, а в качестве обобщенных координат выберем углы их отклонения от вертикального направления φ_1 и φ_2.

Такая система описана в [5]. Точки подвеса маятников установлены на неподвижном основании. В матричной форме собственные движения системы при малых φ_1 и φ_2 имеют вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{Vmatrix} \{\ddot{\varphi}\} + 2\xi \begin{Vmatrix} (1+S_1) & -1 \\ -1 & (1+S_2) \end{Vmatrix} \{\dot{\varphi}\} + \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{Vmatrix} \{\varphi\} = 0$$

где h – отклонение масс маятников; S_1, S_2 – величины, определяющие различный характер диссипации энергии движений маятников при взаимодействии с внешней средой; 2ξ – определяет демпфирование при движении маятников друг относительно друга.

Таким образом

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{Vmatrix}, \quad B = 2\xi \begin{Vmatrix} (1+S_1) & -1 \\ -1 & (1+S_2) \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{Vmatrix}$$

Численные значения параметров: $h = 0{,}2$, $\xi = 0{,}15$, $S_1 = S_2 = 0{,}1$, $k = 2$. Матрица S имеет вид

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -0{,}33 & 0{,}3 \\ 0 & -10 & 1{,}5 & -1{,}65 \end{Vmatrix}$$

Собственные числа матрицы S: $\lambda_{1,2} = -0{,}8202 \pm 2{,}9681i$, $\lambda_{3,4} = -0{,}1697 \pm 1{,}01127i$. Собственные вектора матрицы S:

$$y_1 = \begin{vmatrix} -0,0300+0,01517i \\ -0,0817-0,2959i \\ -0,2215-0,1020i \\ 0,9453 \end{vmatrix}, \qquad y_3 = \begin{vmatrix} 0,1136-0,6778i \\ 0,1186-0,0180i \\ 0,7057 \\ -0,0016+0,1231i \end{vmatrix}$$

$$y_2 = \begin{vmatrix} -0,0300+0,01517i \\ -0,0817-0,2959i \\ -0,2215-0,10201i \\ 0,9453 \end{vmatrix}, \qquad y_4 = \begin{vmatrix} 0,1136-0,6778i \\ 0,1186-0,0180i \\ 0,7057 \\ -0,0016+0,1231i \end{vmatrix}$$

Собственные вектора матрицы S^T:

$$z_1 = \begin{vmatrix} -0,0110-0,05086i \\ 0,9420 \\ -0,1599-0,00896i \\ 0,0772-0,2796i \end{vmatrix}, \qquad z_2 = \begin{vmatrix} 0,0110-0,0508i \\ 0,9420 \\ -0,1599-0,0089i \\ 0,0772-0,2796i \end{vmatrix}$$

$$z_3 = \begin{vmatrix} -0,1120+0,6683i \\ -0,2339+0,3558i \\ 0,6958 \\ -0,0003+0,0242i \end{vmatrix}, \qquad z_4 = \begin{vmatrix} 0,1120+0,6683i \\ -0,2339+0,3558i \\ 0,6958 \\ -0,0003+0,02429i \end{vmatrix}$$

Нормирующий множитель N из условия $z_k^T y_k = 1$ имеет вид: $N = 0{,}115101 + 1{,}09338i$. Пусть теперь только параметр ξ в матрице B может иметь разброс $\pm\Delta\xi$ относительно номинального значения $\xi_н$, т.е. $\xi = \xi_н \pm\Delta\xi$.

Матрица $S_\mu = \partial S/\partial\xi$ будет иметь вид

$$S_\mu = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \end{Vmatrix}$$

И для λ_1 имеем: $\Delta\lambda_1 = z_1^T S_\mu N y_1(\pm\Delta\xi)$ ($\Delta\xi$ = 5% от $\xi_н$). Пусть $\Delta\xi = +\xi_н/10 = 0{,}015$. Тогда $\Delta\lambda_1 = (-0{,}6436 - 2{,}7278i)$, $\Delta\xi = (-0{,}0096 - 0{,}0409i)$.

Все подсчеты производились с использованием системы аналитических вычислений "Mathematica". Таким образом, для первой моды при изменении параметра ξ на 10% декремент затухания изменился на 1,1%, а собственная частота на 1,5%. Аналогичные вычисления для 2-ой моды опускаются в силу экономии места, так как качественно новой информации при демонстрации изложенного подхода не будет.

Таким образом, полученные аналитические соотношения и демонстрация алгоритма расчета на достаточно простом примере позволяют осуществить оценку изменения собственных значений линейной механической системы в зависимости от разброса параметров, определяющих элементы матриц кинетической энергии, скоростных и позиционных сил.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
2. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
3. *Гольфанд И.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1966. 280 с.
4. *Акивис М.А., Гольдберг В.В.* Тензорное исчисление. М.: Наука, 1972. 351 с.
5. *Панкратов В.М.* Использование биосцилляторной схемы в гироскопических приборах поплавкового типа // Изв. вузов СССР. Приборостроение. Т. 25. 1982. № 6. С. 60–64.

Саратов

Поступила в редакцию
9.07.1998