

УДК 534.1

© 2000 г. В.А. СВЕТЛИЦКИЙ

## ПАССИВНАЯ ВИБРОЗАЩИТА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПО МОДУЛЮ

Изложена теория нестационарных динамических процессов, возникающих в линейных механических системах, нагруженных случайными возмущениями, ограниченными по модулю (возмущениями, заданными областями возможных значений). Это случай, когда статистическая информация о случайных возмущениях или отсутствует или они не подчиняются статистическим закономерностям. Приводится алгоритм определения проекций области возможных значений вектора состояния системы в фиксированный момент времени. Изложенный алгоритм позволяет определить числовые значения параметров системы виброзащиты, при которых области максимально возможных значений компонент вектора состояния минимальны.

Рассмотрим механическую систему с конечным числом степеней свободы, движение которой описывается неоднородными линейными уравнениями вида (в векторной форме записи)

$$A_1 \ddot{\mathbf{Z}} + A_2 \dot{\mathbf{Z}} + A_3 \mathbf{Z} = B^{(1)} \mathbf{f}^{(1)} \quad (1)$$

где  $\mathbf{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$  — вектор, компонентами которого являются обобщенные координаты, характеризующие линейные и угловые перемещения;  $\mathbf{f}^{(1)}$  — вектор, компонентами которого в общем случае являются внешние детерминированные и случайные силы;  $A_j$  и  $B_j$  — матрицы, элементами которых могут быть как постоянные числа, так и известные функции, зависящие от времени (например, механические системы с переменной массой). Слагаемое  $A_2 \dot{\mathbf{Z}}$  учитывает силы вязкого трения и силы кориолиса (в задачах с относительным движением). Элементы матрицы  $A_3$  зависят от характеристик упругих элементов конструкции и системы виброзащиты.

Полагая  $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{Y}_1$  и  $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}_2$ , получаем

$$\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{A} \mathbf{Y} = \mathbf{B} \mathbf{f} \quad (2)$$

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2)^T = (\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots, \dot{z}_n; z_1, z_2, \dots, z_n)^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} A_1^{-1} A_2 & A_1^{-1} A_3 \\ 0 & -E \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} A_1^{-1} B_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Уравнение (2) описывает малые колебания механической системы относительно состояния равновесия или относительно стационарного движения.

В дальнейшем рассматриваются только случайные колебания, поэтому компоненты вектора  $\mathbf{f}$  являются случайными функциями (случайными функциями, ограниченными по модулю). Считается, что вероятностные характеристики  $f_j$  отсутствуют.

Если вероятностные характеристики компонент  $f_j$  вектора  $\mathbf{f}$  известны, т.е. имеется полная статистическая информация о "входе", то можно при решении воспользоваться методами статистической динамики [1, 2] и определить вероятностные характеристики "выхода". Для этого, в зависимости от рассматриваемой задачи, для решения не-

обходимо знать одномерные и многомерные законы распределения случайных функций  $f_j$  или, для того чтобы воспользоваться корреляционной теорией, надо знать математические ожидания и корреляционные функции  $K_{f_j f_v}(t, t')$ , получить которые очень сложно. Но даже для наиболее простого случая, когда случайные возмущения  $f_j(t)$  независимы, получить полную статистическую информацию о  $f_j$  не всегда возможно: из-за больших технических трудностей; отсутствия массовой реализации, и из-за больших финансовых затрат. Кроме того, не все случайные возмущения подчиняются статистическим закономерностям. Но даже при наличии массовой реализации процесса и полной информации о случайных возмущениях, действующих на конструкцию, вероятностные оценки качества работы конструкции не всегда приемлемы, так как они не гарантируют необходимого результата для каждой отдельной реализации процесса. Например, при транспортировке взрывоопасных грузов по дорогам со случайными неровностями необходимо, чтобы при каждой реализации модуль ускорений (перегрузок) гарантировано был меньше предельного значения, при котором может произойти взрыв. Поэтому возникает необходимость в разработке методов расчета не требующих столь большой статистической информации о случайных силах, которую на стадии эскизного проектирования получить принципиально нельзя.

Любые реальные случайные возмущения всегда ограничены по модулю, т.е. не превышают некоторых предельных значений (фиг. 1). На фиг. 1 область возможных значений случайной функции  $f_j(t)$  заштрихована. Ограничения на случайные функции связаны или с физическими особенностями или с особенностями конструкции. Так как информации об изменении во времени случайной функции внутри заштрихованной области нет, то можно считать, что  $f_j(t)$  могут изменяться произвольно, в том числе и разрывно (штриховая линия на фиг. 1). Разрывное поведение  $f_j(t)$  означает, что возмущение является безинерционным. Реальные случайные возмущения обладают инерцией, поэтому разрывное их изменение в фиксированные моменты времени  $t^{(1)}, t^{(2)}$  является предельным случаем, когда интервалом времени  $\Delta t$  (фиг. 1), в течение которого происходит резкое изменение функции  $f_j(t)$  можно пренебречь.

В статье рассматривается случай, когда функции  $f_j(t)$  независимы. Основная прикладная проблема, которая возникает при исследовании нестационарных колебаний механических систем, нагруженных случайными возмущениями, ограниченными по модулю, связана с определением максимальных значений компонент вектора состояния системы или области их возможных значений (фиг. 2), что необходимо для получения гарантированных оценок работоспособности и надежности конструкции.

Математически задача может быть сформулирована следующим образом. Имеется линейное неоднородное дифференциальное уравнение возмущенного движения механической системы (2):

$$\dot{Y} + A(t, \lambda)Y = B(t)f \quad (3)$$

где  $\lambda$  – вектор, компонентами которого являются параметры конструкции и системы виброзащиты.

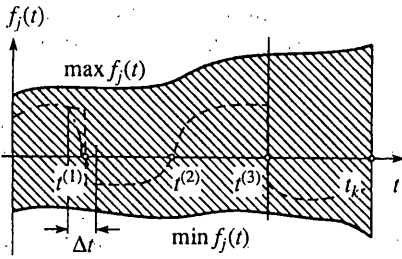
Компоненты вектора  $f$  удовлетворяют условиям (фиг. 1):

$$\min f_j(t) \leq f_j(t) \leq \max f_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n^{(1)}) \quad (4)$$

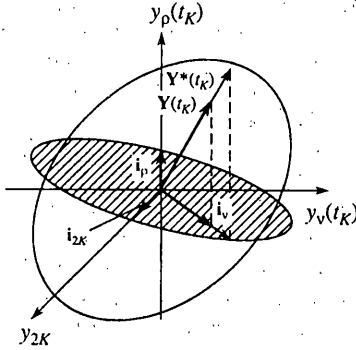
т.е. находятся внутри выпуклой  $n^{(1)}$ -мерной области, границы которой изменяются во времени. В частном случае  $\max f_j$  и  $\min f_j$  могут быть постоянными, в том числе и равными по модулю

$$|\max f_j| = |\min f_j| = a_j \quad (5)$$

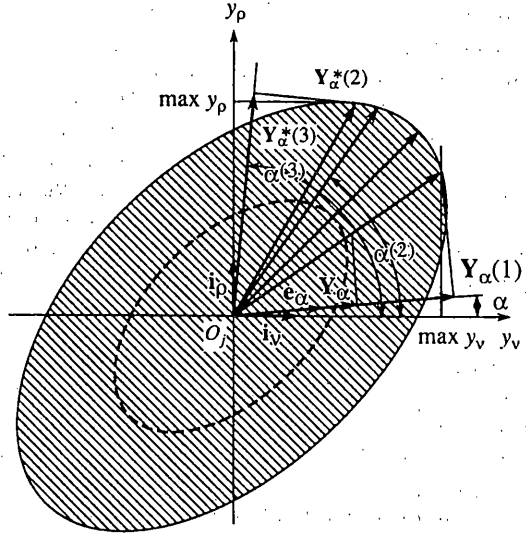
Требуется определить проекции области возможных значений вектора  $Y$  в фиксированный момент  $t_K$  на двухмерные плоскости  $(y_v, y_p)$  (фиг. 2).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Решение уравнения (3) при нулевых начальных данных имеет вид (при  $t = t_K$ ):

$$\mathbf{Y} = \int_0^{t_K} G(t_K, \tau) B(\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad G(t_K, \tau) = K(t_K) K^{-1}(\tau) \quad (6)$$

В скалярной форме записи имеем

$$y_j(t_K) = \sum_{k=1}^{n^{(1)}} \int_0^{t_K} d_{jk} f_k d\tau \quad (j = 1, 2, \dots, 2n) \quad (7)$$

В зависимости от поведения случайных возмущений на интервале времени  $(0, t_K)$  будет меняться модуль и направление вектора  $\mathbf{Y}(t_K)$  (фиг. 2). При ограничениях (4) на компоненты вектора  $\mathbf{f}$  и конечной длительности процесса будет ограниченным и модуль вектора  $\mathbf{Y}(t_K)$ . Поэтому векторы  $\mathbf{Y}^{(j)}(t_K)$  соответствующие конкретным реализациям  $f_j(\tau)$  ( $j = 1, 2, \dots, \infty$ ) на интервале  $(0, t_K)$  будут находиться в ограниченной замкнутой области  $2n$ -мерного фазового пространства (фиг. 2).

Практический интерес представляет определение предельной поверхности области, внутри которой находятся  $\mathbf{Y}^{(j)}$  или проекций области на двухмерные плоскости [3, 4]. В дальнейшем ограничимся этим частным случаем.

На фиг. 3 показана (качественно) проекция области возможных значений на плоскость фазовых координат  $(y_v(t_K), y_p(t_K))$ . Проекция вектора  $\mathbf{Y}$  на  $\mathbf{e}_\alpha$  лежащий в произвольной плоскости  $(\mathbf{i}_v^{(1)}, \mathbf{i}_p^{(1)})$ :

$$y_\alpha = (\mathbf{Y} \mathbf{e}_\alpha) = \sum_{j=1}^{2n} (\cos \alpha_{jv}^{(1)} + \sin \alpha_{jp}^{(1)}) \quad (8)$$

$$\alpha_{jp}^{(1)} = (\mathbf{i}_p^{(1)} \cdot \mathbf{i}_j), \quad \alpha_{jv}^{(1)} = (\mathbf{i}_v^{(1)} \cdot \mathbf{i}_j)$$

Если единичный вектор  $e_\alpha$  лежит в координатной плоскости  $(i_\nu, i_\rho)(e_\alpha = \cos \alpha i_\nu + \sin \alpha i_\rho)$ , то после преобразований получаем

$$y_\alpha = \sum_{K=1}^{n^{(1)}} \int_0^{t_K} (d_{\nu K}(t_K, \tau) \cos \alpha + d_{\rho K}(t_K, \tau) \sin \alpha) f_K(\tau) d\tau \quad (9)$$

Граница области (точнее координаты точек границы области) может быть получена следующим образом. Определяя максимально возможные значения проекции вектора  $Y$  на направление единичного вектора  $e_\alpha$  (9) находим для каждого угла  $\alpha$  ( $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \dots$ ) точки границы области как показано на фиг. 3. (На фиг. 3 показаны три точки границы области, соответствующие трем значениям угла  $\alpha$ .) Каждому углу  $\alpha$  соответствуют две точки границы области. Изменяя дискретно угол  $\alpha$  от 0 до 360°, получаем координаты точек границы области. На фиг. 3 показана двухмерная область на плоскости  $(y_\nu, y_\rho)$ , симметричная относительно начала координаты, что имеет место только в случае, когда  $|f_j| \leq a_j$ . Максимальное значение проекции  $y_\alpha$  достигается при следующих законах изменения во времени компонент вектора  $f$ :

$$f_K^*(\tau) = \begin{cases} f_K = \max f_K, & \text{если } (d_{\nu K} \cos \alpha + d_{\rho K} \sin \alpha) > 0 \\ f_K = \min f_K, & \text{если } (d_{\nu K} \cos \alpha + d_{\rho K} \sin \alpha) < 0 \end{cases} \quad (10)$$

Полученные законы изменения  $f_j^*$  во времени как следует из (10) являются разрывными. Для каждого  $\alpha^{(m)}$  имеются единственные законы изменения  $f_j^{(m)}$ , при которых эффект действия возмущений  $f_j$  на конструкцию будет максимальным. Выражение (10) получено для произвольного непрерывно изменяющегося угла  $\alpha$ . При численном счете угол  $\alpha$ , как было сказано выше, задается дискретными значениями  $\alpha^{(m)}$ . Моменты разрывов  $\tau_{K\beta}^{(m)}$  ( $\beta = 1, 2 \dots \gamma$ ) функции  $f_K^{(m)}$  находим из условия (для каждого  $\alpha^{(m)}$ ):

$$d_{\nu K}(t_K, \tau) \cos \alpha + d_{\rho K}(t_K, \tau) \sin \alpha = 0 \quad (11)$$

Качественный характер изменения функций  $f_K^*$  показан на фиг. 4.

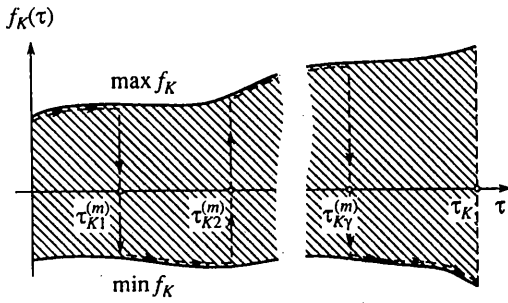
Определив  $\tau_{K\beta}^{(m)}$ , находим максимальные значения компонент  $y_\nu^*(t_K)$  и  $y_\rho^*(t_K)$  (координаты точки границы области для заданного угла  $\alpha^{(m)}$ ).

$$y_\nu^* = \sum_{K=1}^{n^{(1)}} \left( \int_0^{\tau_{K1}^{(m)}} d_{\nu K} \max f_K d\tau - \int_{\tau_{K1}^{(m)}}^{\tau_{K2}^{(m)}} d_{\nu K} \min f_K d\tau + \dots \pm \int_{\tau_{K\gamma}^{(m)}}^{t_K} d_{\nu K} \begin{cases} \max \\ \min \end{cases} f_K d\tau \right) \quad (12)$$

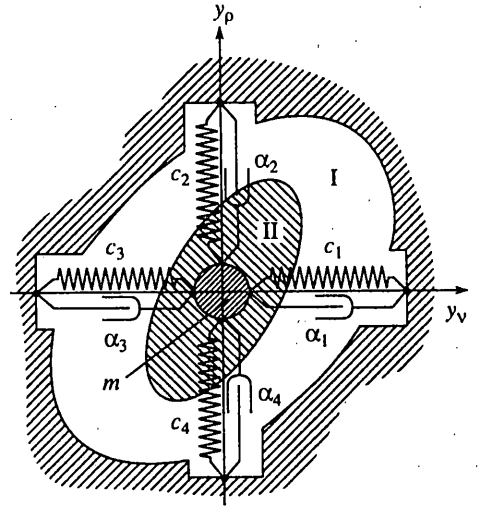
$$y_\rho^* = \sum_{K=1}^{n^{(1)}} \left( \int_0^{\tau_{K1}^{(m)}} d_{\rho K} \max f_K d\tau - \int_{\tau_{K1}^{(m)}}^{\tau_{K2}^{(m)}} d_{\rho K} \min f_K d\tau + \dots \pm \int_{\tau_{K\gamma}^{(m)}}^{t_K} d_{\rho K} \begin{cases} \max \\ \min \end{cases} f_K d\tau \right).$$

Области зависят как от числовых значений параметров конструкции, так и от параметров системы виброзащиты (жесткостных характеристик упругих элементов  $c_j$  и коэффициентов вязкого трения  $\alpha_j$ ). Изменяя параметры системы виброзащиты, можно определить такие их значения, при которых области будут минимальными. На рис. 3 эта область показана штриховой линией. Такие параметры системы виброзащиты (при выполнении критериев безотказной работы) можно считать оптимальными.

На фиг. 5 показана область I, внутри которой может перемещаться масса  $m$  (для наглядности взята точечная масса) и область II возможных значений перемещений мас-



Фиг. 4



Фиг. 5

сы  $m$  при наихудших воздействиях возмущений  $f_j(t)$ . Для гарантированного безударного движения необходимо, чтобы не было касания границ области.

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант № 97-1140).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
2. Вибрации в технике. Т1. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
3. Светлицкий В.А. Динамика старта летательных аппаратов. М.: Наука, 1986. 280 с.
4. Светлицкий В.А. Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1991. 316 с.

Москва

Поступила в редакцию  
6.10.1999