

УДК 539.3:534.1

© 2000 г. С.А. ВОРОНОВ, А.В. ФАТАЛЬЧУК

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВИБРОАБРАЗИВНОЙ ОБРАБОТКИ ГЛУБОКИХ ОТВЕРСТИЙ**

Приводятся результаты исследований динамических эффектов, сопровождающих процесс виброабразивной обработки на основе разработанных математических моделей поведения инструмента и детали, с учетом вращения инструмента. Подсчитаны собственные частоты колебаний и определены области динамической неустойчивости при гармонических осевой составляющей силы резания и крутящем моменте.

В настоящее время широкое распространение для высокоточной обработки отверстий длинномерных деталей получил метод виброабразивной обработки, когда инструменту помимо возвратнопоступательного движения сообщаются дополнительные осевые вибрации. Однако эти операции требуют тщательного анализа динамических явлений, сопровождающих процесс обработки.

Отличительной особенностью технологических операций обработки глубоких отверстий (сверление, шлифование, хонингование) является то, что инструмент закреплен на достаточно гибком валу длиной  $l$ , который вращается с высокой угловой скоростью  $\omega$ . Движение подачи  $V_z$  сообщается инструменту или обрабатываемой детали. Дополнительно на систему могут накладываться вибрации (обычно в направлении подачи) через деталь или вал инструмента. При обработке цилиндрических поверхностей вращение может сообщаться и детали, как в том же угловом направлении, что и инструменту, так и в противоположном. Жесткость детали в поперечном направлении также недостаточна (например, при обработке внутренних отверстий длинномерных труб). В процессе обработки между инструментом и деталью возникают силы взаимодействия (резания), в общем случае зависящие от времени  $t$ , взаимного расположения детали и режущего инструмента, а также режимов резания

$$F = \varphi(t, Y_l, Y_d, \dots) \quad (1)$$

где  $F$  – сила резания,  $Y_l$  – вектор положения инструмента,  $Y_d$  – вектор положения детали.

В то же время обрабатываемая поверхность имеет начальные отклонения от идеальной формы. Все это приводит к тому, что в процессе обработки инструмент и деталь неизбежно совершают колебательные движения, что приводит к искажению поверхности и формы. Однако рациональный подбор режимов и параметров позволяет уменьшить влияние вибраций на точность обработки, путем их уменьшения либо использования их полезного влияния на процесс без ущерба для точности операции.

Процесс обработки в общем случае является сложным физикомеханическим процессом и таким образом он может быть причиной возбуждения вибраций, как вынужденных, так и параметрических, а также автоколебаний, и одновременно в комбинации различных типов колебаний. Рассмотрим различные механизмы возбуждения вибраций.

Кинематическая схема процесса абразивной обработки представлена на фиг. 1, где

$1$  – инструмент,  $2$  – вращающийся вал,  $3$  – вибратор,  $4$  – станина,  $5$  – обрабатываемая деталь. Если предположить, что длина вала инструмента значительно превышает диаметр обрабатываемого отверстия, то инструмент схематизируется, как шарнирно закрепленный стержень длиной  $l$  с распределенной массой  $m_0$ , вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . На валу, на расстоянии  $l_0$  от левой опоры жестко закреплен круглый диск массой  $m_D$ . Инструменту сообщается движение подачи в осевом направлении со скоростью  $V_z$  относительно закрепленной детали, жесткость которой значительно больше, чем жесткость вала инструмента. Скорость подачи может быть как постоянной  $V_z = V_0$ , так и изменяющейся во времени по гармоническому закону  $V_z = V_0 + V_a \cos(\omega_1 t)$  для вибрационной обработки отверстия, где  $V_a$  и  $\omega_1$  – амплитуда и частота изменения скорости. Тогда со стороны детали на диск в зоне контакта будут действовать силы резания, в общем случае определяемые из соотношения (1).

Окружная составляющая сил резания создает крутящий момент и приводит к крутильным колебаниям вала, которые при малых перемещениях не зависят от поперечных колебаний. Радиальная составляющая сил резания частично уравнивается за счет сил взаимодействия на другой стороне диска и приводит к возбуждению вынужденных поперечных колебаний вала с частотой возбуждения  $\omega_1$ , и амплитудой, зависящей от соотношения частоты  $\omega_1$  и частоты собственных колебаний вала. К тем же эффектам приводят изгибающие моменты возникающие за счет несимметричного действия осевых составляющих сил резания.

Интерес представляет изучение влияния осевой составляющей сил резания и крутящего момента на собственные частоты колебаний вращающегося стержня с сосредоточенной инерционной массой. Знание собственных частот позволяет оценить влияние вынужденных колебаний и исследовать устойчивость в зависимости от скорости подачи  $V_0$ . При вибрационной обработке осевая и окружная составляющая сил резания будут изменяться периодически во времени, что при определенных условиях может привести к параметрическому резонансу. Поэтому поставим задачу также исследовать динамическую устойчивость поперечных колебаний вала, предполагая, что на инструмент действует осевая сила  $F$  и крутящий момент  $T$ , меняющиеся по гармоническому закону

$$F = F_{z0} + F_{za} \cos(\omega_1 t), \quad T = T_{z0} + T_{za} \cos(\omega_1 t) \quad (2)$$

где  $F_{z0}, T_{z0}$  – постоянные составляющие осевой силы и момента;  $F_{za}, T_{za}$  – амплитуды изменения осевой силы и момента. Расчетная схема представлена на фиг. 2.

Уравнения движения (1), соответствующие выбранной расчетной схеме могут быть представлены в виде [1]:

$$EJ_y \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + T(1 - H(z - z_D)) \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} + F(1 - H(z - z_D)) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial x}{\partial t} - q_x + \frac{\partial \mu_y}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

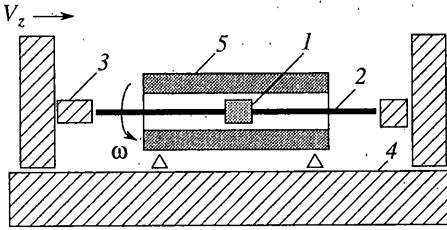
$$EJ_x \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} - T(1 - H(z - z_D)) \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} + F(1 - H(z - z_D)) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} - q_y - \frac{\partial \mu_x}{\partial z} = 0$$

$$q_x = -[m_0 + m_D \delta(z - z_D)] \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - c_x x \delta(z - z_D)$$

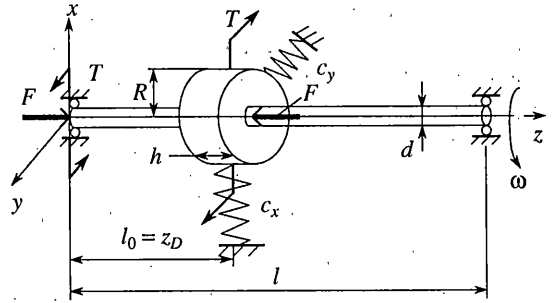
$$q_y = -[m_0 + m_D \delta(z - z_D)] \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c_y y \delta(z - z_D)$$

$$\mu_y = -[J_{y0} + J_{yD} \delta(z - z_D)] \frac{\partial^3 x}{\partial t^2 \partial z} - [J_{z0} + J_{zD} \delta(z - z_D)] \omega \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial z}$$

$$\mu_x = -[J_{x0} + J_{xD} \delta(z - z_D)] \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial z} - [J_{z0} + J_{zD} \delta(z - z_D)] \omega \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial z}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь  $E$  – модуль Юнга;  $m_0$  – масса единицы длины стержня;  $d$  и  $A$  – диаметр и площадь поперечного сечения стержня;  $m_D$  – масса диска;  $R$  и  $h$  – радиус и толщина диска;  $z_D$  – координата расположения диска;  $\alpha$  – коэффициент внешнего вязкого трения;  $c_x$  и  $c_y$  – коэффициенты жесткости в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $J_x, J_y, J_z$  – осевые и полярный моменты инерции сечения стержня соответственно;  $J_{x0}, J_{y0}, J_{z0}$  – распределенные осевые моменты инерции стержня;  $J_x^D, J_y^D, J_z^D$  – моменты инерции диска относительно осей  $x, y, z$ ;  $\delta(z - z_D)$  – дельта функция Дирака и  $H(z - z_D)$  – функция Хевисайда.

Введем безразмерную комплексную функцию перемещений:  $\varphi = \tilde{x} + i\tilde{y}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

Тогда после введения безразмерных переменных и параметров приведем систему уравнений (3) к безразмерному виду:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \tilde{z}^4} - i\tilde{T}(1 - H(\tilde{z} - \tilde{z}_D)) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \tilde{z}^3} + f(1 - H(\tilde{z} - \tilde{z}_D)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{z}^2} + n \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + c\varphi \delta(\tilde{z} - \tilde{z}_D) + [1 + m\delta(\tilde{z} - \tilde{z}_D)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - \quad (4)$$

$$- J_1 \frac{\partial \delta(\tilde{z} - \tilde{z}_D)}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \tau^2 \partial \tilde{z}} - [J_{11} + J_1 \delta(\tilde{z} - \tilde{z}_D)] \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \tau^2 \partial \tilde{z}^2} + iJ_{00} v \frac{\partial \delta(\tilde{z} - \tilde{z}_D)}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau \partial \tilde{z}} + i[J_{00} + J_0 \delta(\tilde{z} - \tilde{z}_D)] v \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \tau \partial \tilde{z}^2} = 0$$

$$\tilde{x} = x/l, \quad \tilde{y} = y/l, \quad \tilde{z} = z/l, \quad \tau = p_0 t$$

$$p_0 = \sqrt{EJ_x / (m_0 l^4)}, \quad v = \omega / p_0, \quad v_1 = \omega_1 / p_0$$

$$\tilde{T} = \frac{Tl}{EJ_x}, \quad f = \frac{Fl^2}{EJ_x}, \quad n = \frac{\alpha}{p_0}, \quad c_x = c_y = \frac{cEJ_x}{l^3}$$

$$\delta(\tilde{z} - \tilde{z}_D) = l\delta(z - z_D)$$

$$J_{00} = \frac{J_{z0}}{m_0 l^2}, \quad J_{11} = \frac{J_{x0}}{m_0 l^2}, \quad m = \frac{m_D}{m_0 l}, \quad J_0 = \frac{J_z^D}{m_0 l^3}, \quad J_1 = \frac{J_z^D}{m_0 l^3}$$

Для решения системы уравнений применим метод Бубнова – Галеркина. Будем искать решения в виде рядов разложений по собственным формам:

$$\varphi(\tilde{z}, \tau) \equiv \sum_{j=1}^N \psi_j(\tilde{z}) \phi_j(\tau) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

где в качестве  $\psi_j(\bar{z})$  можно использовать собственные формы колебаний стержня, удовлетворяющие краевым условиям на концах балки при отсутствии сосредоточенных масс, сил и моментов;  $\phi_j(\tau)$  – неизвестные временные функции, число которых определяется количеством собственных форм колебаний  $N$ , учитываемых при разложении по методу Бубнова – Галеркина. Подставляя приближенное решение в виде (5) в уравнение (4), получим неуравновешенную распределенную нагрузку, действующую на стержень. Потребуем равенства нулю работы всех действующих на систему сил, включая неуравновешенную распределенную нагрузку и работу сосредоточенных сил и моментов, действующих на вращающийся диск со стороны обрабатываемой детали на возможных перемещениях  $\psi_j(\bar{z})$  [2]:

$$\int_0^1 q\psi_j(\bar{z})d\bar{z} + A_{\bar{r}} + A_f = 0 \quad (6)$$

Тогда после подстановки решения (5) и последующего интегрирования получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$A\ddot{\Phi} + v(D - iC)\dot{\Phi} + (B - iE)\Phi = 0 \quad (7)$$

где  $\Phi(\tau)$  – неизвестный вектор временных функций, размерность которого определяется количеством собственных форм колебаний  $N$ , учитываемых при разложении по методу Бубнова – Галеркина.  $A, B, C, D, E$  – матрицы размерности  $N \times N$ , при  $f = \text{const}$  и  $\bar{T} = \text{const}$  не зависящие от времени компоненты которых зависят от условий закрепления и геометрических параметров системы.

Рассмотрим случай, когда осевая сила и крутящий момент постоянны. Тогда решение уравнения (6) можно искать в виде:

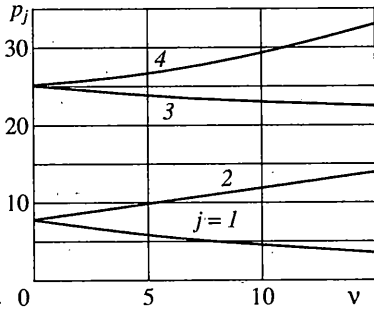
$$\phi_j = \Phi_j \exp(ip\tau) \quad (8)$$

где  $\Phi_j$  и  $p$  – комплексные амплитуда и частота вибраций соответственно. Подставляя решение в виде (8) в уравнение (7) получим систему линейных однородных алгебраических уравнений для определения неизвестных амплитуд  $\Phi_j$ , решение которой существует в случае равенства нулю определителя системы. Приравнивая нулю определитель, можно найти значения частот собственных колебаний системы как корни характеристического полинома. При различных значениях параметров системы корни могут быть как действительными, что соответствует чисто периодическим колебаниям системы, так и комплексными. В этом случае колебания будут либо затухающими, либо с возрастающей амплитудой, что приведет к динамической неустойчивости.

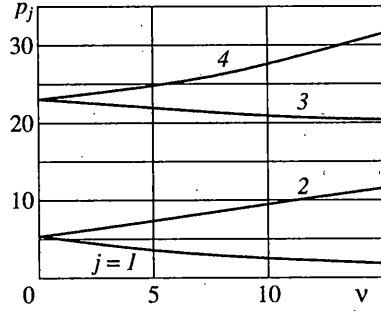
На фиг. 3 представлены графики зависимости четырех первых собственных частот колебаний системы  $p_j$  в зависимости от безразмерной угловой скорости вращения  $v$ , полученные при двухчленном разложении по формам собственных колебаний для шарнирно опертой балки:  $\psi_j(\bar{z}) = \sin(j\pi\bar{z})$  ( $j = 1, 2$ ). В расчетах принимались следующие значения параметров:  $l_0/l = 1,0$ ;  $l = 0,5$  м;  $d = 0,007$  м;  $r = 0,05$  м;  $h = 0,03$  м;  $n = 0$ ;  $c = 0$ .

На фиг. 3 представлены частоты при отсутствии осевой силы и крутящего момента ( $\bar{T} = 0, f = 0$ ), а на фиг. 4 при  $\bar{T} = 0$  и  $f = 5,0$ . Когда  $v = 0$  частоты  $p_1 = p_2$  и  $p_3 = p_4$ . При  $v \neq 0$  частоты  $p_1$  и  $p_2$ , а также  $p_3$  и  $p_4$  попарно расщепляются и при увеличении  $v$  расходятся. Влияние частоты вращения сильнее сказывается при увеличении массы сосредоточенного диска, вращающегося на валу, из-за гироскопических эффектов.

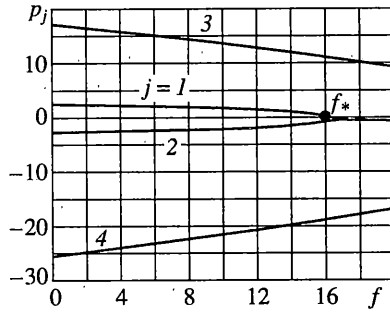
Интерес представляет зависимость собственных частот от величины осевой силы и крутящего момента. Здесь надо рассматривать два возможных варианта их приложения: сила и момент сохраняют величину и направление при колебаниях инструмента – так называемые "мертвая" осевая сила и "мертвый" крутящий момент; сила и



Фиг. 3



Фиг. 4

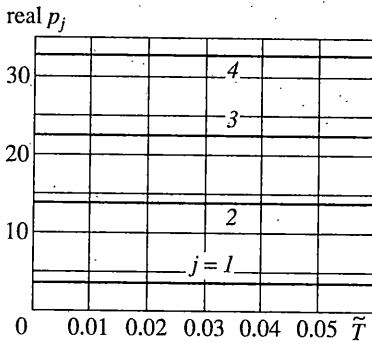


Фиг. 5

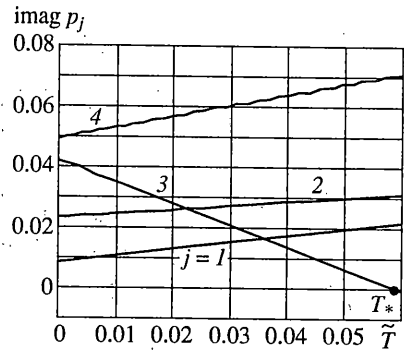
момент, не меняя своей величины, меняют свое направление, следя за углом поворота диска – "следающая" осевая сила и "следающий" крутящий момент. На фиг. 5 представлены графики изменения действительных частей частот колебаний в зависимости от осевой силы при  $\tilde{T} = 0$  (на фиг. 5 сила "мертвая"), из которых видно, что для случая мертвой силы с ее возрастанием низшая частота убывает и при  $f = f_*$  становится равной нулю, т.е. теряется статическая устойчивость (приняты параметры:  $l = 0,05$  м;  $d = 0,007$  м;  $r = 0,05$  м;  $h = 0,03$  м;  $n = 0$ ,  $l_0/l = 1$ ;  $\nu = 14,77$ ;  $c = 0$ ).

Более сложное поведение системы при наличии крутящего момента. При любом отличном от нуля моменте частоты являются комплексно сопряженными и при отсутствии демпфирования в системе приводят к неустойчивым колебаниям с нарастающей амплитудой. На фиг. 6 и 7 (параметры:  $l = 0,5$  м;  $d = 0,007$  м;  $r = 0,05$  м;  $h = 0,03$  м;  $l_0/l = 1$ ;  $c = 0$ ;  $\nu = 14,77$ ;  $f = 0$ ) представлены графики изменения действительных и мнимых частей комплексных частот в зависимости от  $\tilde{T}$  (момент "следающий") при  $n \neq 0$  ( $n = 0,1$ ), из которых видно, что действительная часть от крутящего момента не зависит, а мнимая часть всех частот положительна при  $\tilde{T} \leq \tilde{T}_*$ , что соответствует режиму затухающих колебаний, и отрицательна при  $\tilde{T} > \tilde{T}_*$ , что соответствует режиму с нарастающей амплитудой. Скорость вращения не изменяет качественную картину поведения системы при  $f \neq 0$  и  $\tilde{T} \neq 0$ , хотя увеличение  $\nu$  несколько повышает значение критической силы потери устойчивости.

Большой интерес представляет случай, когда силы резания и крутящий момент меняются по гармоническому закону, что соответствует случаю виброобразивной обработки, когда детали или инструменту дополнительно сообщаются осевые вибрации с частотой  $\omega_1: f = f_0 + f_a \cos(\nu_1 \tau)$ ,  $\tilde{T} = \tilde{T}_0 + \tilde{T}_a \cos(\nu_1 \tau)$



Фиг. 6



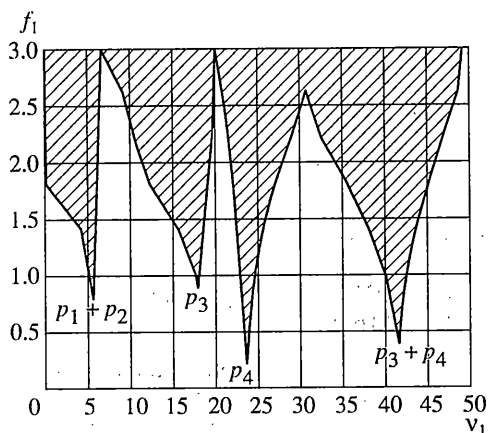
Фиг. 7

Тогда система уравнений (4) будет с периодическими коэффициентами. Решение такого типа уравнений может быть как устойчивым, так и неустойчивым вследствие возбуждения параметрических колебаний.

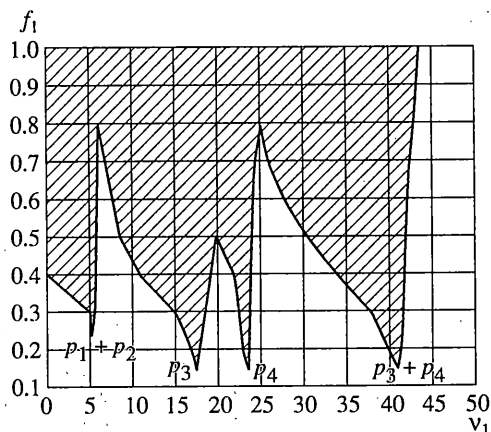
Исследованию динамической устойчивости параметрически возбуждаемых систем посвящено достаточно большое количество публикаций [3–10], в которых приведены методы приближенного и численного исследования динамической устойчивости подобных систем. Установлено, что наиболее опасными являются режимы, когда частота возбуждения находится вблизи удвоенных собственных частот колебаний системы  $\nu_1 \cong 2p_k/m$ , так называемые простые резонансы. Для систем с несколькими степенями свободы возможно и возбуждение неустойчивых режимов на комбинации собственных частот  $\nu_1 \cong (p_k \pm p_j)/m$  – комбинационный резонанс суммарного и разностного типа [11]. Число  $m = 1, 2, 3, \dots$  является порядком резонанса. Возможно существование неустойчивых режимов и на более сложных комбинациях собственных частот. В работах [2, 9] исследованы случаи возбуждения параметрических колебаний стержней при периодической осевой силе, где получены простые главные резонансы. Наличие в такого рода системах и простых и комбинационных резонансов при нагружении осевой силой и моментом исследовано в [10], где приведены результаты экспериментальных исследований. Однако в этих работах исследовалась динамическая устойчивость невращающихся стержней. Для рассматриваемых систем существенную роль оказывает вращение.

Исследование параметрических колебаний проведем методом Флоке [4], численно определяя собственные значения матрицы монодромии (мультипликаторы) системы уравнений. Области устойчивости будут соответствовать значения параметров системы, при которых модули всех мультипликаторов меньше или равны единицы. На границе зон модуль хотя бы одного из них достигает единичного круга на комплексной области. И наконец, если модуль хотя бы одного из них будет больше единицы, это будет неустойчивый режим колебаний с нарастающей амплитудой, что приведет к ухудшению точности и качества поверхности обрабатываемой детали.

На фиг. 8, 9 приведены результаты численного исследования динамической устойчивости для шарнирно закрепленного вала при следующих значениях параметров системы:  $l_0/l = 0,7$ ;  $l = 0,5$  м;  $d = 0,007$  м;  $r = 0,05$  м;  $h = 0,03$  м;  $\nu = 5,91$ ;  $n = 0,1$ ;  $f_0 = 0,03$ ;  $c = 20,37$ . На фиг. 8 представлены области динамической неустойчивости (заштрихованы) в случае действия "мертвой" осевой силы и "мертвого" крутящего момента (собственные частоты:  $p_1 = 2,81$ ;  $p_2 = 2,94$ ;  $p_3 = 19,2$ ;  $p_4 = 22,5$ ), а на фиг. 9 области динамической неустойчивости для "следающей" осевой силы и "следающего" крутящего момента (собственные частоты такие же). Так как сила и момент в реальном процессе связаны друг с другом, то при численном решении между ними взята зависимость (в безразмерном виде)  $\tilde{T} = 0,5f$ , которая определяется выбранной гео-



Фиг. 8



Фиг. 9

метрией конструкции. Из приведенных графиков следует, что для выбранной схемы конструкции характерны простые резонансы второго порядка для третьей и четвертой собственных частот, и комбинационные резонансы суммарного типа первого порядка парно для первой и второй частот, и третьей и четвертой частот.

По результатам проведенных исследований можно сделать выводы, что вращение инструмента, а также действующие силы и момент оказывают существенное влияние не только на собственные частоты (фиг. 3–7), но и на динамическую устойчивость. Увеличение силы приводит к уменьшению собственных частот и приводит к потере статической устойчивости при  $f = f_*$ . Увеличение крутящего момента приводит к потере устойчивости динамическим путем. Скорость вращения повышает критическую силу и момент. При периодическом изменении силы и момента при определенных значениях параметров системы возбуждаются неустойчивые параметрические колебания. Причем зоны комбинационного резонанса суммарного типа играют существенную роль, т.е. их учет не дает полного представления о динамическом поведении системы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Светлицкий В.А. Механика стержней. Ч. 2. М.: Высш. шк., 1987. 304 с.
2. Lao Chung-Li, Huang Bo-Wun. Parametric instability of a spinning pretwisted beam under periodic axial force // Intern. J. Mech. Sci. 1995. V. 37. No. 4. P. 423–439.
3. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1972. 416 с.
4. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
5. Lalanne M., Ferraris G. Rotordynamics Prediction in Engineering. John Wiley, 1990. 408 p.
6. An Chen Lee, Yuan Kang, Shin Li Liu. A Modified Transfer Matrix Method for Linear Rotor-Bearing Systems // Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1991. V. 58. No. 3. P. 776–783.
7. Unger A., Brull M.A. Parametric Instability of a Rotating Shaft Due to Pulsating Torque // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1981. V. 48. No. 4. P. 948–958.
8. Lee C.-W., Yun J.-S. Dynamic Analysis of Flexible Rotors Subjected to Torque and Force // J. Sound and Vibration. 1996. V. 192. No. 2. P. 439–452.
9. Iwatsubo T., Saigo M., Sugiyama Y. Parametric Instability of Clamped-Clamped and Clamped-Simply Supported Columns Under Periodic Axial Load // J. Sound and Vibration. 1973. V. 30. No. 1. P. 65–77.
10. Berlioz A., Der Hagopian J., Dufour R., Draoul E. Dynamic Behavior of a Drill-String: Experimental Investigation of Lateral Instabilities // Trans. ASME. J. Vibrat. and Acoust. 1996. V. 118. No. 3. P. 292–298.
11. Вибрации в технике / Под ред. В.В. Болотина. Т. 1. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

Поступила в редакцию  
11.07.1998