

УДК 539.3

© 2000 г. В.Н. КУКУДЖАНОВ, Д.Н. ШНЕЙДЕРМАН

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
НЕОСЕСИММЕТРИЧНОГО УПРУТОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С НЕРЕГУЛЯРНОЙ ГРАНИЦЕЙ**

Разработан численный метод решения трехмерных задач для осесимметричных изотропных упругих тел, нагруженных неосесимметричной нагрузкой. Метод представляет собой разновидность метода Рунге, в котором по окружному направлению используется разложение по системе тригонометрических функций, а по двум другим – двухмерная конечноэлементная аппроксимация. К конечноэлементной аппроксимации добавляются сингулярные функции, определяющие поведение решения в окрестности угловых линий и конических точек.

Полученные результаты для тестовой задачи показывают, что использование сингулярной функции повышает точность вычисления перемещений в узлах, расположенных вблизи особой точки. Однако, добавление сингулярных к конечноэлементным функциям приводит к плохой обусловленности матрицы жесткости и требует использования метода окаймления [1] для решения системы линейных уравнений.

Метод применен для решения задачи о деформировании полупространства с несквозным отверстием под действием нагрузки, приложенной к боковой поверхности отверстия. Эта задача используется при определении остаточных напряжений на поверхности тела методом проделывания малого отверстия.

1. Метод решения задачи. Рассмотрим тело вращения, к которому приложена неосесимметричная нагрузка. Граница тела может содержать угловые линии и конические точки. Тело считается однородным, изотропным и упругим. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z . Задача в этом случае распадается на симметричную и антисимметричную относительно плоскости $\varphi = 0$. В дальнейшем будем рассматривать симметричную задачу, антисимметричная решается аналогично.

Компоненты перемещений $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi, u_z)$ представляются в виде

$$u_r(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^n a_r^k(r, z) \cos k\varphi, \quad u_\varphi(r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^n a_\varphi^k(r, z) \sin k\varphi \quad (1.1)$$

$$u_z(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^n a_z^k(r, z) \cos k\varphi$$

Из теории метода конечных элементов [2] известно, что если точное решение задачи имеет производную k -го порядка, интегрируемую с квадратом, а степень конечноэлементных полиномов равна $k - 1$, то энергия деформации разности точного и конечноэлементного решений имеет порядок h^{2k-2} , где h – диаметр конечного элемента. Если только первая производная точного решения интегрируется с квадратом, что имеет место для нерегулярной границы с входящим углом, то скорость сходимости ухудшается. Так для задачи кручения тела с трещиной энергия ошибки имеет порядок h [2], тогда как для задач с регулярной границей, когда по крайней мере

вторая производная точного решения интегрируется с квадратом энергии ошибки имеет порядок h^2 .

Для улучшения скорости сходимости конечноэлементного решения к точному применяется ряд методов. В одном из них [3] решение в секторе с центром в особой точке представляется в виде его усеченного разложения по собственным функциям с неизвестными коэффициентами. В остальной области используется обычная конечноэлементная аппроксимация. Для непрерывной стыковки стандартной и сингулярной аппроксимаций используются буферные элементы.

Другой подход состоит в использовании в окрестности особой точки так называемых полуаналитических сингулярных элементов, которые представляют из себя треугольники с вершиной в особой точке [4]. В них по радиусу решение разлагается по ρ^λ , а по углу – по обычным функциям формы одномерного конечного элемента (ρ , θ – полярные координаты в меридиональной плоскости с началом в особой точке, λ – в общем случае комплексное собственное значение). Такие элементы могут совмещаться по перемещениям с обычными конечными элементами без использования буферных элементов. Недостатком этих двух методов является то, что точность решения достигается при одновременном измельчении обычных конечных элементов и увеличении числа членов разложения по собственным функциям. Аналитическое определение последних не всегда является простой задачей.

Еще один метод улучшения скорости сходимости, который используется в данной работе, заключается в добавлении к обычной конечноэлементной аппроксимации, определенной во всей области, линейной комбинации собственных функций, соответствующих решениям в окрестности нерегулярных точек границы [5]. При этом сходимость численного решения к точному достигается только измельчением конечных элементов, а скорость сходимости тем выше, чем больше добавляется собственных функций. Так, если удерживать все собственные функции, k -ая производная которых неинтегрируема с квадратом, то энергия ошибки имеет порядок k^{2k-2} , если степень конечноэлементных полиномов равна $k-1$.

Разобьем меридиональное сечение тела на конечные элементы и представим коэффициенты рядов Фурье (1.1) в виде

$$\mathbf{a}^k(r, z) = \sum_{j=1}^m N_i(r, z) \mathbf{b}_i^k + \sum_{i=1}^l \mathbf{f}_j^k \gamma_j^k \quad (1.2)$$

где N_i – функция формы узла i ; $\mathbf{a}^k = [a_r^k, a_\phi^k, a_z^k]$, \mathbf{b}_i^k – значение регулярной части \mathbf{a}^k в узле i , \mathbf{f}_j^k – сингулярная вектор-функция, γ_j^k – искомый коэффициент при ней, m – число узлов сетки конечных элементов, l – число сингулярных функций.

Введем обозначения

$$\delta^T = [\delta_0^T, \delta_1^T, \dots, \delta_n^T], \quad \delta_k^T = [\mathbf{b}_1^k, \dots, \mathbf{b}_m^k, \gamma_1^k, \dots, \gamma_l^k] \quad (k = 0, \dots, n)$$

тогда будем иметь

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\delta, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\delta \quad (1.3)$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_0, \mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_n], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n]$$

где \mathbf{N}_k – матрица $3 \times 3m + l$, \mathbf{B}_k – матрица $6 \times 3m + l$ ($k = 0, \dots, n$), $\boldsymbol{\epsilon}$ – тензор деформации. Элементы матриц имеют вид $f(r, z) \cos k\phi$ или $f(r, z) \sin k\phi$.

Задача минимизации функционала энергии приводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right\} \delta = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T t d\Gamma$$

где Ω – область, занимаемая телом, Γ – часть границы, на которой заданы поверхностные силы, \mathbf{t} – вектор поверхностных сил.

Матрица жесткости

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

состоит из блоков

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{V}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega \quad (i, j = 0, 1, \dots, n) \quad (1.4)$$

В силу представления для коэффициентов матрицы \mathbf{V} интеграл (1.4) отличен от нуля только при $i = j$, т.е. матрица \mathbf{K} – блочнодиагональная. Таким образом, задача распадается на задачи отдельно для каждой гармоники.

В силу представления (1.2) матрицу \mathbf{V}_i можно представить виде $\mathbf{V}_i = [\mathbf{R}_i, \mathbf{S}_i]$, где $\mathbf{R}_i, \mathbf{S}_i$ – матрицы производных от обычных функций формы и сингулярных функций соответственно.

Тогда матрица жесткости \mathbf{K}_{ii} представляется в виде

$$\mathbf{K}_{ii} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{12} = \int_{\Omega} \mathbf{R}_i^T \mathbf{D} \mathbf{S}_i d\Omega, \quad \mathbf{M}_{22} = \int_{\Omega} \mathbf{S}_i^T \mathbf{D} \mathbf{S}_i d\Omega \quad (1.5)$$

а \mathbf{M}_{11} – обычная матрица жесткости и $\mathbf{M}_{21} = \mathbf{M}_{12}^T$.

Для того, чтобы \mathbf{M}_{12} не была полностью заполненной, сингулярные решения можно брать только в некоторой окрестности особой точки, после чего они гладко (с непрерывной первой производной) приводятся к нулю. Добавление сингулярных функций к конечноэлементным функциям делает матрицу \mathbf{K}_{ii} плохо обусловленной. Для решений системы уравнений с такой матрицей удобно применять метод окаймления Фаддеева и Фаддеевой [1], позволяющий свести задачу к разложению на треугольные множители Холесского матриц $\mathbf{M}_{11} = \mathbf{L}_{11} \mathbf{L}_{11}^T$ (\mathbf{L}_{11} – нижняя треугольная матрица) и $\mathbf{M}_{22}^* = \mathbf{M}_{22} - \mathbf{L}_{12}^T \mathbf{L}_{12}$ (\mathbf{L}_{12} находится из системы уравнений $\mathbf{L}_{11} \mathbf{L}_{12} = \mathbf{M}_{12}$), из которых только \mathbf{M}_{22}^* является плохо обусловленной.

2. Сингулярные решения. Для тела вращения нерегулярными точками границы могут быть угловые линии и конические точки. Будем рассматривать сингулярные решения с нулевыми напряжениями на границе.

В [6] показано, что для угловой линии задача распадается на две задачи – плоскую и антиплоскую деформацию. Для обеих задач коэффициенты при косинусах и синусах не зависят от номера гармоники.

Для антиплоской деформации отлично от нуля только перемещение u_{ϕ} . Функция a_{ϕ}^k представляется в виде

$$a_{\phi}^k(\rho, \theta) = \rho^{\lambda} \sin(\lambda \theta) \quad (2.1)$$

где $\lambda = \pi/(2\alpha)$, α – половина угла, образованного касательными в точке излома границы меридионального сечения, ρ, θ – полярные координаты в меридиональной плоскости с началом в особой точке и с $\theta = 0$ на биссектрисе угла. Из (2.1) видно, что неограниченные напряжения возникают, когда $2\alpha > \pi$.

Для плоской деформации отличны от нуля только перемещения u_r, u_{θ} . Если рассматривать компоненты перемещений u_r, u_{θ} в полярной системе координат, то функции a_r^k, a_{θ}^k представляются в виде

$$a_r^k(\rho, \theta) = \rho^{\lambda} f(\theta), \quad a_{\theta}^k(\rho, \theta) = \rho^{\lambda} g(\theta) \quad (2.2)$$

Показатель степени λ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\sin(2\alpha\lambda) = \pm\lambda\sin(2\alpha) \quad (2.3)$$

Когда в (2.3) выбирается знак (+) функции f и g представляются в виде

$$f = k_1 \cos((1 + \lambda)\theta) + \cos((1 - \lambda)\theta), \quad g = -k_1 \sin((1 + \lambda)\theta) - v_2 \sin((1 - \lambda)\theta)$$

$$v_2 = \frac{3 + \lambda - 4v}{3 - \lambda - 4\lambda}, \quad k_1 = \frac{(1 + \lambda)(v_2 - 1) \cos((1 - \lambda)\alpha)}{2\lambda \cos((1 + \lambda)\alpha)}$$

где v – коэффициент Пуассона.

Когда в (2.3) выбирается знак (–) функции f и g представляются в виде

$$f = k_2 \sin((1 + \lambda)\theta) + \sin((1 - \lambda)\theta), \quad g = k_2 \cos((1 + \lambda)\theta) + v_2 \cos((1 - \lambda)\theta)$$

$$k_2 = \frac{(1 + \lambda)(v_2 - 1) \sin((1 - \lambda)\alpha)}{2\lambda \sin((1 + \lambda)\alpha)}$$

Исследование уравнения (2.3) показывает, что неограниченные напряжения ($\lambda < 1$) возникают при $2\alpha > \pi$.

Для конической точки сингулярное решение содержит все три компоненты перемещения. Функции a_p^k , a_θ^k , a_ϕ^k представляются в виде

$$a_p^k(\rho, \theta) = \rho^\lambda f(\theta), \quad a_\theta^k(\rho, \theta) = \rho^\lambda g(\theta), \quad a_\phi^k(\rho, \theta) = \rho^\lambda h(\theta) \quad (2.4)$$

В этом случае показатель степени λ и функции f , g , h зависят от номера гармоники. Задача приводится к задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно f , g , h :

$$\begin{aligned} (1 - 2v)f'' + (1 - 2v)\operatorname{ctg}\theta f' + (2(1 - v)(\lambda^2 + \lambda - 2) - (1 - 2v)n^2 / \sin^2\theta)f + \\ + (\lambda - 3 + 4v)g' + (\lambda - 3 + 4v)\operatorname{ctg}\theta g + n(\lambda - 3 + 4v) / \sin\theta h = 0 \\ 2(1 - v)g'' + 2(1 - v)\operatorname{ctg}\theta g' + ((\lambda^2 + \lambda)(1 - 2v) - (2 - 2v + n^2(1 - 2v)) / \sin^2\theta)g + \\ + (4 - 4v + \lambda)f' + n / \sin\theta h' - (3 - 4v)\cos\theta n / \sin^2\theta h = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} (1 - 2v)h'' + (1 - 2v)\operatorname{ctg}\theta h' + ((\lambda^2 + \lambda)(1 - 2v) - (1 - 2v + 2n^2(1 - v)) / \sin^2\theta)h - \\ - n / \sin\theta g' - (3 - 4v)(\cos\theta n / \sin^2\theta)g - (4 - 4v + \lambda)(n / \sin\theta)f = 0 \end{aligned}$$

При $\theta = \alpha$ заданы нулевые поверхностные силы

$$(1 + v\lambda)f + (1 - v)g' + (v\operatorname{ctg}\alpha)g + (nv / \sin\alpha)h = 0$$

$$f' - (1 - \lambda)g = 0 \quad (2.6)$$

$$h' - \operatorname{ctg}\alpha h - n / \sin\theta g = 0$$

а при $\theta = 0$ – условия на оси вращения: $f' = g = 0$ при $n = 0$ и $f = g = h = 0$ при $n \geq 1$.

3. Результаты решения тестовой задачи. Была решена тестовая задача о деформировании тела, образованного вращением относительно оси z четырехугольника AC_1BC с входящим углом SAC_1 , равным $3\pi/2$ (фиг. 1). Четырехугольник имеет следующие размеры: $OA = AB = AC = AC_1 = 1$.

Для перемещений

$$u_r = u_z = 0, \quad u_\phi = R^{2/3} \sin(2\theta/3) \sin\phi \quad (3.1)$$

где R, θ – полярные координаты.

Определялись объемная и поверхностная нагрузки и граничные перемещения. Затем с такими нагрузками и граничным перемещением численно решалась краевая задача и полученное решение сравнивалось с точным решением (3.1).

В силу антисимметрии перемещения (3.1) относительно горизонтальной плоскости достаточно решать задачу только для верхней половины четырехугольника – треугольника ABC (фиг. 1). Объемная нагрузка, соответствующая (3.1), имеет вид

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{R^{-1/3}}{r} \left(\frac{2}{3} (\lambda + \mu) \sin \frac{\theta}{3} + (\lambda + 3\mu) \frac{R}{r} \sin \frac{2\theta}{3} \right) \cos \varphi \\ P_\varphi &= \frac{R^{-1/3}}{r} \left(\frac{2}{3} \mu \sin \frac{\theta}{3} + (\lambda + 3\mu) \frac{R}{r} \sin \frac{2\theta}{3} \right) \sin \varphi \\ P_z &= -\frac{R^{-1/3}}{r} \frac{2}{3} (\lambda + \mu) \cos \frac{\theta}{3} \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.2)$$

На стороне AC задается поверхностная нагрузка

$$\begin{aligned} t_r &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\lambda}{r} R^{2/3} \cos \varphi, \quad t_\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\mu}{r} R^{2/3} \sin \varphi \\ t_z &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\lambda}{r} R^{2/3} \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.3)$$

На стороне BC треугольника задаются перемещения, равные значениям на этой стороне перемещений (3.1). На стороне AB задаются граничные условия, соответствующие антисимметрии задачи относительно горизонтальной плоскости $u_r = u_\varphi = 0$, $t_z = 0$.

Численное решение задачи проводилось вышеизложенным методом конечных элементов с добавлением к ним сингулярных функций. Выбиралась одна гармоника с номером $k = 1$ и одна антиплоская сингулярная функция

$$u_\varphi = R^{2/3} \sin(2\theta/3) \sin \varphi \quad (3.4)$$

совпадающая с точным решением (3.1).

Кроме функции (3.4) использовались сингулярные функции вида

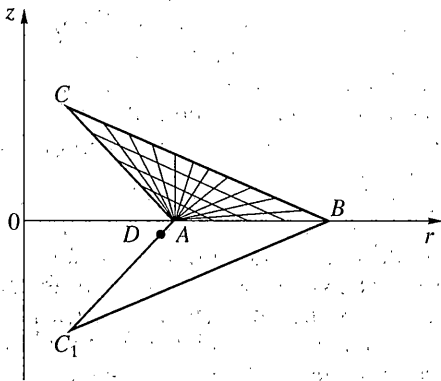
$$u_\varphi = f(R) \sin(2\theta/3) \sin \varphi \quad (3.5)$$

где $f(R) = R^{2/3}$ при $0 \leq R \leq R_1$, а при $R_1 \leq R \leq R_2$ $f(R)$ есть кубический полином, который при $R = R_1$ имеет те же значение и производную, что и функция $R^{2/3}$, а при $R = R_2$ значение и производная полинома равны 0.

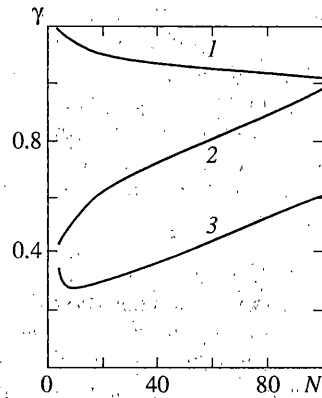
Для тестовой задачи исследовался вопрос о близости вычисленного значения коэффициента при сингулярной функции к его точному значению (равному 1), его зависимости от вида сингулярной функции и величине погрешности при вычислении перемещений.

На фиг. 2 показана зависимость коэффициента γ при сингулярной функции от среднего числа разбиений треугольника $N = M^{1/2}$, где M – число конечных элементов, на которые разбит треугольник. Цифрами 1, 2 и 3 обозначены графики зависимости соответственно для сингулярных функций (3.4), (3.5) с $R_1 = 0,1$; $R_2 = 1$ и (3.5) с $R_1 = 0,1$; $R_2 = 0,5$. Как и следовало ожидать, наименьшая погрешность при вычислении коэффициента при сингулярной функции имеет место при использовании сингулярной функции (3.4), где погрешность вызвана только ошибками численного интегрирования.

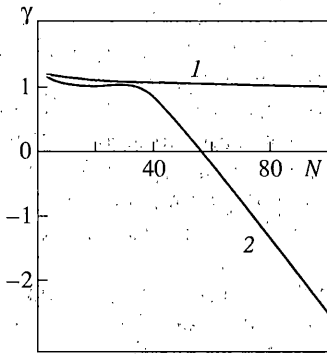
Результаты, представленные на фиг. 2, получены при решении системы линейных алгебраических уравнений методом окаймления Фаддеева и Фаддеевой. На фиг. 3



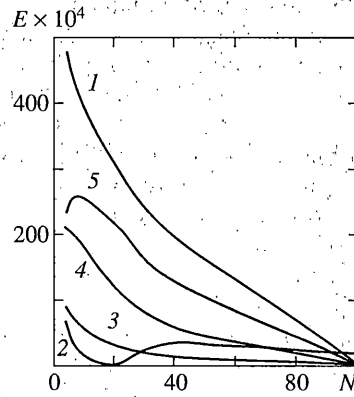
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

сравниваются коэффициенты при сингулярной функции (3.4), полученные методом окаймления (линия 1) и обычным методом решения системы (линия 2). При достаточно мелком разбиении области обычный метод решения системы дает совершенно неудовлетворительные результаты для коэффициента при сингулярной функции. Это вызвано ошибками округления при решении обычным методом системы линейных уравнений с плохо обусловленной матрицей.

На фиг. 4 показана зависимость абсолютной ошибки E вычисления функции a_{φ}^1 в точке D , расположенной на расстоянии 0,02 от точки A , от среднего числа разбиений N . Сама функция равна 0,0737. Цифрой 1 обозначены результаты, полученные без использования сингулярной функции, 2 – с сингулярной функцией (3.4) и обычным методом решения системы линейных уравнений, 3 – с сингулярной функцией (3.4) и методом окаймления Фаддеева и Фаддеевой для решения системы линейных уравнений, 4 и 5 – с сингулярной функцией (3.5) соответственно с $R_1 = 0,1$; $R_2 = 1$ и с $R_1 = 0,1$; $R_2 = 0,5$ и также с использованием метода окаймления.

Полученные результаты для тестовой задачи показывают, что использование сингулярной функции повышает точность вычисления перемещений в узлах, расположенных вблизи особой точки. Однако, добавление сингулярных к конечноэлементным функциям приводит к плохой обусловленности матрицы жесткости и требует использования метода окаймления для решения системы линейных уравнений. Для достаточно точного вычисления коэффициента при сингулярной функции требуется достаточно мелкое разбиение области для проведения численного интегри-

рования. Это вызвано тем, что при плохо обусловленной матрице решение системы линейных уравнений сильно зависит от ошибок численного интегрирования при вычислении коэффициентов матрицы жесткости, а эти ошибки уменьшаются при измельчении разбиения области для проведения численного интегрирования.

4. Деформирование полупространства с отверстием. Рассмотрим задачу о деформировании полупространства с несковозным отверстием (фиг. 5), к боковой поверхности которого приложена нагрузка с компонентами:

$$t_r = \cos^2 \varphi, \quad t_\varphi = -\sin \varphi \cos \varphi, \quad t_z = 0 \quad (4.1)$$

Решение этой задачи используется для определения остаточных напряжений на поверхности упругого изотропного тела методом продельвания малого отверстия [7].

Как известно, система уравнений метода конечных элементов для изотропного тела вращения распадается на отдельные гармоники. В правых частях таких систем стоят вектора узловых нагрузок для соответствующей гармоники. В нашем случае в нагрузке (4.1) присутствуют только нулевая и вторая гармоники, поэтому искомое перемещение также имеет только нулевую и вторую гармоники.

Как видно из фиг. 5, сингулярные решения возникают в точке A , где $2\alpha = 3\pi/2$. Они состоят из решений задачи плоской деформации для нулевой и второй гармоник и антиплоской деформации для второй гармоники.

Для антиплоской деформации в функции (2.1) $\lambda = 2/3$. Для плоской деформации численное решение уравнения (2.3) дает два корня, меньшие 1: $\lambda_1 = 0,54484$, когда выбирается знак (+), и $\lambda_2 = 0,908529$, когда выбирается знак (-).

Для решения задачи методом конечных элементов меридиональное сечение рассматриваемого тела разбивается на 7 конечных и 4 бесконечные зоны. Выбирались следующие размеры: $r_0 = z_0 = 1$, $r_1 = z_1 = 2$, $r_2 = z_2 = 5$. Точки B и C расположены на серединах соответствующих отрезков. Расчеты проводились при модуле упругости $E = 1$, коэффициенте Пуассона $\nu = 0,3$.

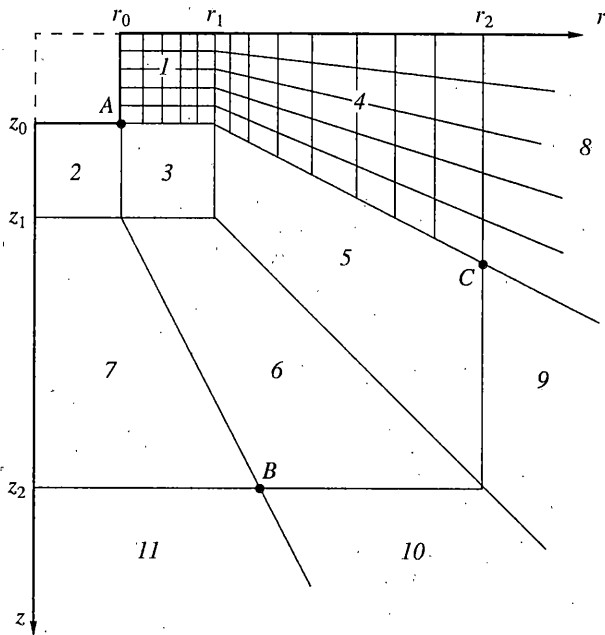
Каждая из конечных зон разбивается на линейные изопараметрические четырехугольные конечные элементы; а бесконечные зоны – на бесконечные элементы, стыкующиеся с конечными по общей границе. Бесконечный элемент представляет собой неограниченный четырехугольник, две бесконечные стороны которого являются продолжениями лучей, исходящих из начала координат. Функции формы в бесконечном элементе обеспечивают асимптотику перемещений на бесконечности вида R^{-2} , где R – расстояние до начала координат.

Сингулярные функции представлялись в виде (2.1) и (2.2) при $0 \leq \rho \leq 0,1$, где ρ – расстояние до точки A . При $0,1 \leq \rho \leq 1$ множитель ρ^λ заменялся кубическим полиномом Эрмита, гладко стыкующимся со степенной функцией при $\rho = 0,1$ и с нулевыми значениями производной при $\rho = 1$. При $\rho > 1$ сингулярные функции равнялись 0.

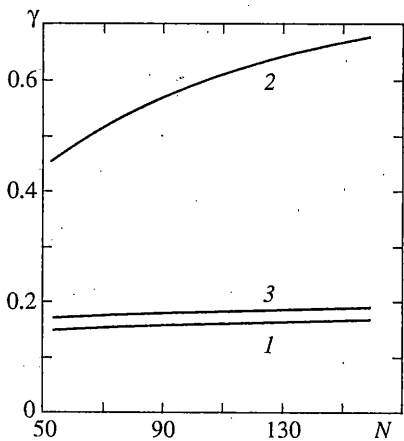
Для построения сетки конечных элементов все 7 четырехугольных конечных зон разбивались на одинаковое количество частей в обоих направлениях. Это число разбиений принимало следующие значения: 20, 30, 40, 50, 60. Для получения приемлемых решений необходимо очень точно вычислять матрицы M_{12} и M_{22} из (1.5). Для проведения численного интегрирования по квадратурной формуле Гаусса первые три зоны разбивались на 300 частей по координатам r и z .

На фиг. 6 представлены графики зависимости коэффициентов γ при сингулярных функциях от среднего числа разбиений области на конечные элементы. Цифрами 1 и 3 обозначены коэффициенты при сингулярной функции (2.2) с $\lambda = 0,54484$ соответственно для нулевой и второй гармоники, цифрой 2 – коэффициент при сингулярной функции (2.1) для второй гармоники. Коэффициенты при сингулярной функции (2.2) с $\lambda = 0,908529$ для нулевой и второй гармоник существенно меньше коэффициентов, изображенных на графике.

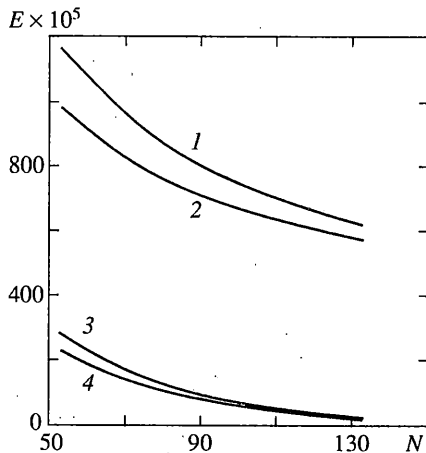
На фиг. 7 показана зависимость абсолютной ошибки E вычисления функций a_z^0 и a_z^2 в точке A от среднего числа разбиений N . Сами функции равны соответ-



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

венно 0,19035 и 0,04486. Цифрами 1 и 2 обозначены соответственно значения a_z^2 и a_z^0 , полученные без использования сингулярных функций, цифрами 3 и 4 – те же функции, вычисленные методом добавления сингулярных функций к конечноэлементной аппроксимации.

Полученные результаты показывают, что использование сингулярных функций существенно повышает точность вычисления перемещений в особой точке.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-01538а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960. 656 с.
2. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
3. Луцик О.Н. Модификация метода конечных элементов для областей с особыми точками // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 87–93.
4. Борзенков С.М., Матвеев В.П. Полуаналитические сингулярные элементы для плоских и пространственных задач теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 48–61.
5. Fix G.J., Gulati S., Wakoff G.I. On the use of singular functions with finite element approximations // J. Comput. Phys. 1973. V. 13. № 2. P. 209–228.
6. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 178–186.
7. Кукуджанов В.Н., Шнейдерман Д.Н. Решение пространственных упругих задач при определении остаточных напряжений в анизотропных материалах // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 38–46.

Москва

Поступила в редакцию
22.12.1998 г.