

УДК 539.385

© 2000 г. А.А. МОВЧАН

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

Система микромеханических определяющих соотношений для сплавов с памятью формы (СПФ) [1] предложена в [2–4]. В [5, 6] предложена модификация этой системы, в которой, в отличие от прототипа, учитывается влияние фазовых деформаций на диаграмму термоупругого мартенситного превращения и удовлетворяется принцип градиентальности.

В данной работе в рамках известных кинематических гипотез [7] рассмотрены задачи кручения призматических стержней из СПФ. Считается, что температура распределена по материалу стержня равномерно. Получено аналитическое представление решения несвязных задач о прямом, обратном и ориентированном превращениях при кручении. Сформулированы и обоснованы аналоги известных относительно упругого кручения положений в применении к соответствующим задачам для СПФ. Получено аналитическое решение связанной задачи о релаксации напряжений при прямом превращении в стержне круглого поперечного сечения при фиксированном угле закручивания. Показано, что в рамках модели [2–4] температура, при которой крутящий момент обращается в нуль не зависит от угла закручивания и одинакова при решении задачи как в связанной, так и в несвязной постановках. Численное решение связанной задачи о прямом превращении под действием постоянного крутящего момента позволило сделать вывод о существенном перераспределении напряжений по сечению по сравнению с упругой задачей или с задачей о прямом превращении в несвязной постановке.

1. Предложенные в [2–6] определяющие уравнения для СПФ в случае, когда отличны от нуля лишь касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} , могут быть записаны в виде:

$$\gamma_{i3} = \gamma_{i3}^1 + \gamma_{i3}^2 \quad (1.1)$$

$$\gamma_{i3}^1 = \tau_{i3} / G, \quad G = G_1 q + G_2 (1 - q) \quad (1.2)$$

$$d\gamma_{i3}^2 / dq = B_{i3} + a_0 \gamma_{i3}^2 \quad (1.3)$$

$$q = \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{M_1 + k\sqrt{3}S - T}{M_1 - M_2} \right), \quad B_{i3} = 2c_0 \tau_{i3} \quad (1.4)$$

для прямого превращения и

$$q = \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{T - A_1 - k\sqrt{3}\tau_i}{A_2 - A_1} \right), \quad B_{i3} = 2c_0 \lambda_1 \tau_i + \frac{(1 - \lambda_1) a_0 \varepsilon^0}{\exp(a_0 q_0) - 1} \quad (1.5)$$

$$\tau_i = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$$

для обратного превращения.

Здесь координатная ось 3 (z) совпадает с осью кручения, ($i = 1, 2$), оси 1, 2 (x, y) лежат в плоскости поперечного сечения, γ – сдвиги, верхние индексы 1 и 2 относятся,

соответственно к упругим и фазовым компонентам деформации, $S = \tau_i$ в рамках модели, предложенной в [2-4], и

$$S = \sqrt{\left(\tau_{xz} + \frac{a_0}{2c_0} \gamma_{xz}^2\right)^2 + \left(\tau_{yz} + \frac{a_0}{2c_0} \gamma_{yz}^2\right)^2}$$

для модели [5, 6], G , G_1 и G_2 – модуль сдвига для текущего значения объемной доли мартенситной фазы q и для мартенситного и аустенитного состояний, M_1, M_2, A_1, A_2 – температуры начала и окончания реакций прямого и обратного мартенситных превращений в свободном от напряжений материале, T – температура, $\tau = \tau_1(q), q^0, \epsilon^0$ – для рассматриваемого этапа обратного превращения представляют из себя зависимость компонент τ_{xz}, τ_{yz} от q на предшествующем этапе прямого превращения и значения q и γ^2 , достигнутые в конечной точке этого этапа; величины a_0, c_0, λ_1, k являются постоянными материала.

Параметр k , следуя (1.4), (1.5) отражает влияние действующих напряжений и фазовых деформаций на фазовый состав. В случае, если этим влиянием можно пренебречь ($k = 0$), задача определения величины q может быть решена до нахождения напряженно-деформированного состояния (несвязная постановка). В противоположном случае приходится решать связную задачу одновременного определения напряженно-деформированного состояния и фазового состава.

2. В [8, 9] предложен аналитический метод решения краевых задач для СПФ в несвязной постановке, использующий преобразование Лапласа по величине q . Применительно к решению задач кручения метод приводит к следующему алгоритму. В общем случае переменные внешние воздействия (крутящий момент M или угол закручивания на единицу длины θ) выражаются как функции монотонно уменьшающейся при прямом превращении температуры. С помощью (1.4) температура в этих выражениях заменяется на величину q : $M = M(q)$ или $\theta = \theta(q)$. Полученные функции продолжают каким-либо образом на всю положительную полуось q так, чтобы существовал образ по Лапласу от этих функций $\tilde{M}(s)$ или $\tilde{\theta}(s)$, (s соответствует q). Находится решение упругой задачи при этих внешних воздействиях, зависящее от s как от параметра. В этом решении модуль сдвига G заменяется на функцию

$$\tilde{G}(s) = G \frac{s - a_0}{s - d}, \quad d = a_0 - 2c_0G \quad (2.1)$$

В [8] доказано, что полученные зависимости (называемые далее решением эквивалентной упругой задачи и снабжаемые, в отличие от решений задачи о прямом превращении, знаком тильды) являются образом по Лапласу от решений задачи о прямом превращении. Искомое решение можно получить, возвращаясь к оригиналам и заменяя в полученных выражениях аргумент q на температуру T с помощью (1.4). Установлено [8], что если эквивалентное упругое решение для некоторой величины не зависит от q , то соответствующая величина при прямом превращении не зависит от температуры и одинакова как в упругом решении, так и в решении задачи о прямом превращении.

Представление решения задачи об упругом кручении через функцию напряжений имеет вид [7]:

$$M = C_1 \theta, \quad C_1 = 2G\Psi, \quad \Psi = \iint_{\Omega} U(x, y) d\Omega + \sum_{i=1}^n U_i \Omega_i \quad (2.2)$$

$$\tau_{xz} = \frac{M}{2\Psi} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{M}{2\Psi} \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$\gamma_{xz} = \theta \partial U / \partial y, \quad \gamma_{yz} = -\theta \partial U / \partial x$$

Здесь C_1 – жесткость при кручении, $U(x, y)$ – функция напряжений, которая так же как и функция Ψ от упругих постоянных или внешних воздействий не зависит.

В общем случае произвольно меняющихся момента и крутки связь между ними в эквивалентной упругой задаче, следуя (2.2) и (2.1) может быть представлена в виде:

$$\tilde{M}(s) = 2G\Psi\tilde{\theta}(s)f(s), \quad f(s) = \frac{s - a_0}{s - d} \quad (2.4)$$

а напряжения и деформации связаны с моментом или круткой с помощью формул

$$\tilde{\tau}_{xz}(s) = \frac{\tilde{M}(s)}{2\Psi} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tilde{\tau}_{yz}(s) = -\frac{\tilde{M}(s)}{2\Psi} \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\tilde{\gamma}_{xz}(s) = \tilde{\theta}(s) \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tilde{\gamma}_{yz}(s) = -\tilde{\theta}(s) \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.6)$$

Переходя к оригиналам в формулах (2.5), (2.6) можно получить

$$\tau_{xz}(q) = \frac{M(q)}{2\Psi} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{yz}(q) = -\frac{M(q)}{2\Psi} \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$\gamma_{xz}(q) = \theta(q) \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \gamma_{yz}(q) = -\theta(q) \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.8)$$

Следуя (2.7), при прямом превращении касательные напряжения связаны с крутящим моментом точно такими же соотношениями, как и в упругой задаче. То же можно сказать про связь между деформациями и круткой (2.8). Следовательно, все положения, справедливые для упругого кручения и формулируемые только в терминах касательных напряжений и крутящего момента или сдвиговых деформаций и крутки, будут справедливы и для решения задачи о прямом превращении в несвязной постановке (например, положения о поведении напряжений в окрестности входящих и выступающих углов, о достижении максимального значения модулем вектора касательного напряжения на контуре тела и т.д.).

В частности, для стержня круглого поперечного сечения в полярной системе координат отличны от нуля лишь напряжения $\tau_{\phi z}$ деформация $\epsilon_{\phi z}$ и смещения u_{ϕ} , а деформация поперечного сечения отсутствует.

Кроме того, распределение полных деформаций по сечению стержня в задаче о прямом превращении будет с точностью до постоянного множителя совпадать с распределением в упругой задаче, или, иначе говоря, будет соответствовать упругой задаче для того же стержня, но при некотором другом значении крутящего момента или крутки. То же самое можно сказать про распределение фазовых деформаций. В дальнейшем значение крутящего момента, дающего распределение упругих деформаций, идентичное распределению фазовых деформаций, получаемому при решении задачи о прямом превращении, будет обозначаться как $M_2(q)$.

Сдвиги следуя (2.7), (2.8) пропорциональны касательным напряжениям

$$\tau_{xz} / \gamma_{xz} = \tau_{yz} / \gamma_{yz} = g(q), \quad g(q) = M(q) / (2\Psi\theta(q)) \quad (2.9)$$

где аналог модуля сдвига $g(q)$ зависит не только от q , но и от рассматриваемого процесса изменения внешних воздействий, однако не меняется при изменении формы поперечного сечения стержня. Действительно, вводя обозначение $\tilde{\mu}(s) = \tilde{M}(s) / (2G\Psi)$, соотношение (2.4) можно записать в виде $\tilde{\mu}(s) = \tilde{\theta}(s)f(s)$, не зависящем от формы поперечного сечения. Следовательно, форма поперечного сечения не входит и в соотношение между оригиналами $\mu(q)$ и $\theta(q)$. Поэтому отношение $\mu(q)/\theta(q) = g(q)$ также не зависит от формы поперечного сечения.

Используя любую из формул (2.3) для выражения крутящего момента через

компоненту касательного напряжения, например $M = 2\Psi\tau_{xz}/(\partial U/\partial y)$, заменяя здесь $\tau_{xy} = G\gamma_{xz}^2 = G(\gamma_{xz} - \tau_{xz}/G)$ и пользуясь (2.9) можно получить

$$M_2(q) = M(q)(G/g(q) - 1) \quad (2.10)$$

Крутку можно представить в виде суммы двух слагаемых, связанных с упругой (верхний индекс 1) и фазовой (индекс 2) деформациями

$$\theta = \theta^1 + \theta^2, \quad \theta^1 = M(q)/(2G\Psi), \quad \theta^2 = M_2(q)/(2G\Psi)$$

Теорема Бредта о циркуляции касательного напряжения для эквивалентной упругой задачи записывается в виде:

$$\oint_L \tilde{\tau}_{Lz}(s)dL = 2\tilde{\theta}(s)\tilde{G}(s)\Omega \quad (2.11)$$

где L – произвольный замкнутый контур, состоящий из точек сечения закручиваемого стержня, Ω – площадь, охватываемая этим контуром, τ_{Lz} – тангенциальная к контуру составляющая касательного напряжения. Подставляя в (2.11) выражение $\tilde{\theta}(s)$ через $\tilde{M}(s)$, найденное из (2.4) и возвращаясь к оригиналам, можно получить формулировку теоремы Бредта для прямого превращения при кручении:

$$\oint_L \tau_{Lz}dL = \frac{M}{\Psi}\Omega$$

Необходимо отметить, что теорема Бредта в своей обычной формулировке, содержащей в правой части произведение модуля сдвига на крутку для явления прямого превращения не справедлива (ее формулировка содержит как касательные напряжения, так и крутку).

3. В случае прямого превращения под действием постоянного крутящего момента

$$M = M_0 = \text{const}, \quad \tilde{M}(s) = M_0/s \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (2.4), выражая из этой формулы $\tilde{\theta}(s)$ и переходя к оригиналам можно получить

$$\theta(q) = \theta_0 f_1(q), \quad \theta_0 = \frac{M_0}{2G\Psi}, \quad f_1(q) = \left(1 - \frac{d}{a_0}\right) \exp(a_0 q) + \frac{d}{a_0} \quad (3.2)$$

Здесь θ_0 – упругая крутка при том же значении момента. Следуя (2.5), (2.6) напряжения в этом случае постоянны (не зависят от температуры и совпадают с их же значениями в упругой задаче).

Из физических соображений в модели (1.1) – (1.3) должно быть $a_0 > 0$, $c_0 > 0$. В этом случае, следуя (2.1) $a_0 > d$, и $f_1(q)$ является монотонно возрастающей положительной функцией. Следовательно, угол закручивания при прямом превращении под действием постоянного крутящего момента монотонно возрастает при уменьшении температуры, достигая максимального значения при $T = M_2$. Отношение максимальной крутки к той же величине в упругой задаче равно $f_1(1)$ и не зависит ни от величины приложенного крутящего момента ни от формы поперечного сечения.

Жесткость при кручении $C = M/\theta$ является в рассматриваемом процессе положительной убывающей функцией q : $C_2(q) = C_1/f_1(q)$. Аналог модуля сдвига (2.9) $g(q) = G/f_1(q)$ также положительная убывающая функция q .

4. Пусть стержень в аустенитном состоянии закручен до некоторого значения крутки θ_0 , после чего угол закручивания не меняется. Далее происходит охлаждение

через интервал температур прямого превращения. В данном случае

$$\tilde{\theta}(s) = \theta_0 / s \quad (4.1)$$

Подставляя (4.1) в (2.4) и переходя к оригиналам, можно получить:

$$M(q) = M_0 f_2(q), \quad M_0 = 2G\Psi\theta_0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^0 f_2(q), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^0 f_2(q) \\ f_2(q) = a_0 / d - (a_0 / d - 1) \exp(dq)$$

Здесь M_0 , τ_{xz}^0 , τ_{yz}^0 – крутящий момент и касательные напряжения в начальный момент при $q = 0$. Функция $f_2(q)$ монотонно убывает с ростом q , достигая нулевого значения при

$$q = q^* = \frac{1}{d} \ln \frac{a_0}{a_0 - d} \quad (4.2)$$

Следуя (4.2) при любом знаке d $q^* > 0$. Для значений постоянных материала, характерных для никелида титана или сплавов на основе меди $q^* < 1$. Таким образом, для этих материалов величина объемной доли мартенситной фазы может принимать значение q^* . В этой точке крутящий момент обращается в нуль, а напряжения полностью релаксируют. При дальнейшем охлаждении крутящий момент меняет знак и возрастает по модулю.

Поскольку напряжения падают при постоянной крутке, то уменьшается и циркуляция касательных напряжений, в то время как правая часть соотношения, выражающего теорему Бредта в ее классической формулировке не меняется. Следовательно для явления прямого превращения при постоянной крутке эта формулировка не справедлива.

Жесткость стержня при кручении в рассматриваемом процессе $C_3(q) = C_1 f_2(q)$ также убывает с ростом q , причем в данном случае, в отличие от прямого превращения под действием постоянного крутящего момента, возможны нулевые и отрицательные значения жесткости. Аналог модуля сдвига $g(q) = G f_2(q)$ также может убывая принимать нулевое и отрицательные значения. Следовательно, говорить о единой зависимости жесткости при кручении или аналога модуля сдвига от q для различных процессов прямого превращения в СПФ не корректно.

5. Пусть в некоторый момент процесса охлаждения через интервал температур прямого мартенситного превращения при $q = q_0$ ранее действовавший крутящий момент снят, т.е. производится опыт на ориентированное превращение [1] при кручении. Поскольку напряжения при прямом превращении в рамках несвязной постановки задачи связаны с крутящим моментом упругими соотношениями, то они также равны нулю и полные деформации равны фазовым. Интегрируя уравнение (1.3) для фазовых деформаций при нулевых напряжениях, можно получить

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0 \exp(a_0(q - q_0)), \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz}^0 \exp(a_0(q - q_0)) \quad (5.1)$$

Здесь γ_{xz}^0 , γ_{yz}^0 – значения сдвиговых деформаций непосредственно после снятия напряжений. Учитывая, что при прямом превращении крутка связана со сдвиговыми деформациями точно таким же соотношением, что и в упругом случае, из (5.1) получим

$$\theta(q) = \theta(q_0) \exp(a_0(q - q_0)) \quad (5.2)$$

т.е. крутка экспоненциально нарастает в процессе ориентированного превращения. Опыт на ориентированное превращение может быть использован для определения параметра материала a_0 в процессе идентификации определяющих уравнений, поскольку, следуя (5.2), это – единственный параметр, от которого зависит крутка.

В частности, явление ориентированного превращения возникает в случае, если в рассмотренной в предыдущем пункте задаче о релаксации крутящего момента осуществляется одностороннее закрепление одного из концов стержня – заданная крутка θ_0 может увеличиваться, но не может уменьшаться. В процессе дальнейшего охлаждения после релаксации напряжений при $q = q^*$ в случае одностороннего закрепления момент и напряжения останутся равными нулю, а крутка будет нарастать по закону (5.2), где $\theta(q_0) = \theta_0$, $q_0 = q^*$.

6. Задача об обратном превращении в несвязной постановке, следуя [8] сводится к упругой с заранее вычисляемой начальной (фазовой) деформацией, которая в случае кручения определяется по формулам:

$$\gamma_{i3}^2 = (1 - \lambda_1) \gamma_{i3}^0 \varphi_1(q, q^0) + \lambda_1 c_0 \int_0^q \tau_{i3}(r) \exp(a_0(q - r)) dr \quad (6.1)$$

$$\varphi_1(q, q^0) = \frac{\exp(a_0 q) - 1}{\exp(a_0 q^0) - 1} \quad (i = 1, 2)$$

где q^0 – значение доли мартенситной фазы в момент начала обратного превращения, γ_{i3}^0 – компоненты фазовой деформации в этот момент, λ_1 – параметр материала. Начальные деформации (6.1) эквивалентны начальной крутке θ^0 , определяемой по формуле

$$\theta^0 = (1 - \lambda_1) \varphi_1(q, q^0) \theta^2(q^0) + \lambda_1 c_0 \int_0^q g(r) \theta(r) \exp(a_0(q - r)) dr$$

где $\theta(q)$ – зависимость крутки от доли мартенситной фазы в предшествующем процессе прямого превращения.

Начальные деформации можно с помощью обычной процедуры перевести в дополнительные объемные и поверхностные силы, статически эквивалентными напряжениям, получаемым из фазовой деформации по упругому закону. В [8] доказано, что если гидростатическое напряжение при прямом превращении не зависит от координат, то дополнительные объемные силы равны нулю. Поскольку при кручении гидростатическое напряжение равно нулю, то дополнительные воздействия сводятся к заданному на торце крутящему моменту M^+ , который может быть определен по формуле:

$$M^+ = (1 - \lambda_1) \varphi_1(q, q^0) M_2(q^0) + \lambda_1 c_0 \int_0^q M(r) \exp(a_0(q - r)) dr \quad (6.2)$$

$$\theta^0 = M^+ / (2G\psi)$$

где величина $M_2(q^0)$ – определяется по формуле (2.10), а $M(q)$ – зависимость крутящего момента от q , которая имела место на предшествующем этапе прямого превращения. Дополнительная крутка, соответствующая моменту M^+ , равна $\theta^+ = M^+ / (2G\psi)$ и должна быть добавлена к крутке, получаемой из решения упругой задачи для крутящего момента M , действующего в процессе обратного превращения

$$\theta = (M + M^+) / (2G\psi) \quad (6.3)$$

Формулы (6.2), (6.3) решают задачу об обратном превращении при кручении в несвязной постановке. В случае, если касательные напряжения при прямом превращении не зависели от q (или, что то же, крутящий момент сохранял постоянное значение) то, как показано в [8], фазовые деформации при обратном и при предшествующем прямом превращениях совпадают для одних и тех же значений q , начальная крутка при обратном превращении совпадает с фазовой при прямом: $\theta^0(q) = \theta^2(q)$, а дополнительный момент $M^+(q)$ равен $M_2(q)$.

Пусть угол закручивания, полученный в результате деформации прямого превращения и последующего снятия нагрузки зафиксирован: $\theta = \theta^2(q^0) = \text{const}$ и происходит нагревание стержня через интервал температур обратного мартенситного превращения. В результате явления памяти формы фазовая деформация будет уменьшаться, переходя в упругую. Соответствующий угол закручивания будет равен $\theta^* = \theta^2(q^0) - \theta^0(q)$. В результате в стержне возникнет так называемый "реактивный" крутящий момент, равный $M^* = 2G\psi\theta^*$ или

$$M^*(q) = M^2(q^0) - M^+(q) \quad (6.4)$$

Следуя (6.4), (6.2), (2.10) при заданной истории изменения крутящего момента на этапе прямого превращения, история изменения реактивного момента на последующем этапе обратного превращения не зависит от формы поперечного сечения стержня.

Максимального значения крутящий момент достигает при $\dot{q} = 0$ и оно равно

$$M^+(0) = 2G\psi\theta^2(q^0) = M_2(q^0) \quad (6.5)$$

Следуя (6.5), при фиксированной начальной крутке $\theta^2(q^0)$ максимальный реактивный момент пропорционален упругой жесткости на кручение. Следовательно, используя известные положения, установленные для упругого кручения Сен-Венаном и Поляа [7], можно показать, что из всех стержней, имеющих одинаковую площадь поперечного сечения и одинаковую начальную крутку, максимальный реактивный момент будет развиваться в стержне круглого поперечного сечения.

7. Далее рассматриваются связанные задачи о кручении стержня круглого поперечного сечения радиуса R из СПФ. Предполагается, что в этом случае, так же как и в несвязной задаче депланация поперечного сечения отсутствует и единственными отличными от нуля компонентами напряжений и деформаций являются $\tau_{\varphi z} = \tau$ и $\varepsilon_{\varphi z} = \varepsilon$, причем полная деформация пропорциональна расстоянию ρ от рассматриваемой точки до оси кручения

$$\varepsilon = \varepsilon^1 + \varepsilon^2 = 1/2\rho\theta \quad (7.1)$$

Здесь ε – смешанная компонента тензора деформации (половина соответствующего сдвига).

В данном пункте получено аналитическое решение связанной задачи о релаксации напряжений в круглом стержне из СПФ, закрученном в аустенитном состоянии на некоторый угол и охлаждаемом через интервал температур прямого мартенситного превращения при $\theta = \theta_0 = \text{const}$. В сделанных предположениях выражение для q имеет вид (1.4), где $S = |\omega|$, $\omega = \tau$ для модели [2–4] и $\omega = \tau + (a_0/c_0)\varepsilon^2$ для модели [5, 6].

Заменяя в выражении (7.1) $\varepsilon^1 = \tau/(2G)$ и выражая из полученного соотношения касательное напряжение, можно получить

$$\tau = G(\rho\theta_0 - 2\varepsilon^2) \quad (7.2)$$

Подстановка (7.2) в уравнение для фазовой деформации для процесса прямого превращения (1.3), (1.4) дает

$$d\varepsilon^2/dq = c_0\rho\theta_0G + (a_0 - 2Gc_0)\varepsilon^2 \quad (7.3)$$

Решение (7.3), удовлетворяющее нулевым начальным условиям и учитывающее зависимость G от q (1.2) можно представить в виде

$$\varepsilon^2 = 0.5\rho\theta_0(1 + f(q)(a_0F(q) - 1)) \quad (7.4)$$

$$f(q) = \exp(k_1q + (k_2q)^2), \quad k_1 = a_0 - 2c_0G_2, \quad k_2 = (\lambda c_0G_2)^{0.5}$$

$$\lambda = 1 - \frac{G_1}{G_2}, \quad F(q) = \frac{\exp(\eta^2)}{k_2} (\Phi(k_2q + \eta) - \Phi(\eta)), \quad \eta = \frac{k_1}{2k_2}$$

$$\Phi(x) = \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi$$

Подстановка (7.4) в (7.2) дает выражение для касательного напряжения:

$$\tau = G_2 \rho \theta_0 (1 - \lambda q) f(q) (1 - a_0 F(q)) \quad (7.5)$$

Подстановка (7.4) в (7.2) в (1.4) дает уравнение

$$q = \sin \left(\frac{\pi}{2} (t + \sqrt{3} \zeta \xi \chi | \psi(q) |) \right) \quad (7.6)$$

$\chi = kG_2/(M_1 - M_2)$, $\psi(q) = a_1 + (1 - \lambda q - a_1)f(q)(1 - a_0F(q))$ численно решая которое можно для любых значений безразмерных параметров температуры $t = (M_1 - T)/(M_1 - M_2)$, крутки $\xi = \theta R$ и относительного радиуса $\zeta = \rho/R$ найти величину $q = q(t, \zeta)$. В (7.6) для модели [5, 6] необходимо положить $a_1 = a_0/(2c_0G_2)$, а для модели [2-4] $a_1 = 0$.

Подстановка этой функции в (7.4), (7.5) позволяет найти зависимости фазовых деформаций и напряжений от температуры и координаты точки сечения. Полученные зависимости справедливы в зоне прямого превращения, которое начинается в крайних волокнах стержня при температуре $T^0 = \sqrt{3}kG_2R\theta_0 + M_1$. Координата границы фронта начала превращения ρ_0 может быть вычислена по формуле $\rho_0 = (T - M_1)/(\sqrt{3}kG_2\theta_0)$. При $T = M_1$ фронт начала преобразования достигает оси кручения.

Следуя (1.4), (7.4), (7.5) величина q впервые достигает значения 1 в крайних волокнах стержня при температуре $T = T^{00} = R\sqrt{3}k\theta_0G_2\psi(1) + M_2$. При дальнейшем охлаждении от крайних волокон стержня начнется движение фронта завершения преобразования, радиальная координата которого ρ_{00} при $M_2 < T < T^{00}$ определяется по формуле

$$\rho_{00} = (T - M_2)/(\sqrt{3}k\theta_0G_2\psi(1))$$

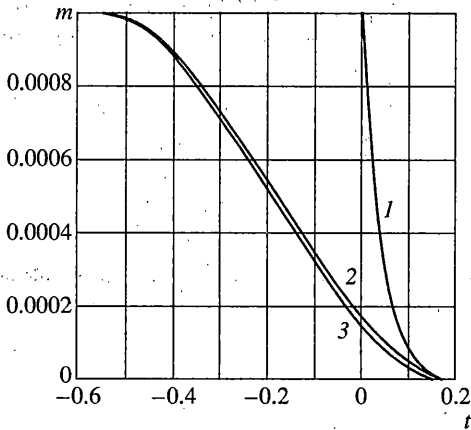
Решение (7.4) - (7.6) справедливо в зоне преобразования $\rho_0 < \rho < \rho_{00}$. При $\rho < \rho_0$ справедливо упругое решение, при $\rho > \rho_{00}$ для вычисления ε^2 и τ можно воспользоваться формулами (7.4), (7.5), в которые необходимо подставить $q = 1$. Крутящий момент M может быть определен по формуле

$$M = 0.5\pi \left(G_2\theta_0\rho_0^4 + G_1\theta_0f(1)(1 - a_0F(1))(R^4 - \rho_{00}^4) + 2 \int_{\rho_0}^{\rho_{00}} \tau(\rho)\rho^2 d\rho \right)$$

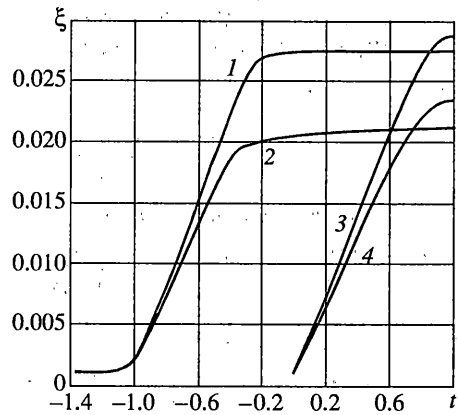
В этой формуле в случае отсутствия упругой области ($T < M_1$) необходимо положить $\rho_0 = 0$, а в случае отсутствия зоны завершения преобразования ($T > T^{00}$) $\rho_{00} = R$.

Можно показать, что в рамках модели [2-4] температура T^* , при которой крутящий момент обращается в нуль, не зависит от заданной крутки θ_0 и от параметра материала k , т.е. одинакова при решении задач как в связной, так и в несвязной постановках. Действительно, поскольку функция $F(q)$ (7.4) не зависит от k и θ_0 и монотонно возрастает, то если уравнение $F(q) = 1/a_0$ имеет решение $q = q^*$ на отрезке $[0, 1]$, то это решение единственно и не зависит ни от заданной крутки, ни от постоянной материала k . Соотношениям (7.4), (7.5), (7.6) удовлетворяет следующее решение: $q = q^*$, $t^* = 2 \arcsin(q^*)/\pi$, $\tau(t^*, \zeta) = 0$, $M = 0$, $\varepsilon^1 = 0$, $\varepsilon^2 = 0.5\rho\theta_0 = \varepsilon$. Это решение соответствует моменту полной релаксации напряжений. Соответствующая температура $T^* = M_1 - t^*(M_1 - M_2)$, так же как и величина t^* , не зависит ни от θ_0 , ни от k , что и требовалось доказать. Необходимо отметить, что в рамках модели [5, 6] это положение не выполняется, значения величины T^* несколько различаются для различных значений крутки и при решении задачи в связной и в несвязной постановках.

В качестве иллюстрации на фиг. 1 приведены графики релаксации безразмерного крутящего момента $m = 2M/(\pi G_2 R^3)$ в стержне из никелида титана для значения безразмерной крутки $\xi = 0.001$. Здесь и далее решения получены при значении постоянных материала $a_0 = 0.718$, $c_0 = 0.000243 \text{ МПа}^{-1}$, $E_1 = 28000 \text{ МПа}$, $E_2 = 84000 \text{ МПа}$,



Фиг. 1



Фиг. 2

$v_1 = 0.48$, $v_2 = 0.33$, характерных для никелида титана. Кривая 1 соответствует решению задачи в несвязной постановке (одинаковому для обеих моделей), кривая 2 соответствует модели [2–4], кривая 3 – модели [5, 6]. При охлаждении ниже температуры T^* в случае двустороннего закрепления обоих концов стержня крутящий момент меняет знак и незначительно растет по абсолютной величине. Пусть закрепление одного из концов является односторонним, т.е. величина θ не может быть меньше θ_0 , но возможно беспрепятственное увеличение крутки. Легко видеть, что в этих условиях всем уравнениям задачи в связной постановке в рамках модели [2–4] удовлетворяет при $t > t^*$ решение

$$\theta(q) = \theta_0 \exp(a_0(q - q^*)), \quad \varepsilon = \varepsilon^2 = 0.5\rho\theta(q), \quad \tau = M = 0.$$

т.е. решения задач об ориентированном превращении в координатах $\theta - q$ в связной и несвязной постановках совпадают. В рамках модели [5, 6] это положение опять не справедливо, т.к. здесь величина q^* в рамках модели [5, 6] не постоянна по сечению стержня.

8. Для численного решения задач в связной постановке систему (1.1) – (1.5) удобно представить в виде, разрешенном относительно приращений напряжений. Задача обращения системы (1.1) – (1.5) в общем случае решена в [10, 11]. В применении к сдвиговому нагружению при кручении круглого стержня для скорости изменения касательного напряжения при прямом превращении может быть получено выражение

$$d\tau = A d\varepsilon + B dT \quad (8.1)$$

где в рамках модели [2–4]:

$$A = 2G/q_1, \quad B = 2Gp/q_1, \quad q_1 = 1 + 2G\beta_1 \text{sign}(\tau)p \quad (8.2)$$

$$p = (c_0 + (G_2 - G_1)/(2G^2))\tau + a_0\varepsilon^2, \quad \beta_1 = \sqrt{3}k\gamma_1$$

$$\gamma_1 = \frac{\pi\sqrt{1-q^2}}{2(M_1 - M_2)}$$

а в рамках модели [5, 6]:

$$A = 2G(1 - \beta_1 a_0 |\omega|)/q_2, \quad S = \tau + a_0\varepsilon^2/c_0 \quad (8.3)$$

$$B = \gamma_1(\tau(G_2 - G_1)/G + 2Gc_0\omega)/q_2$$

$$q_2 = 1 + \beta_1((2Gc_0 - a_0)|\omega| + \tau \text{sign}(\omega)(G_2 - G_1)/G)$$

Подставляя в (8.1) продифференцированное выражение (7.1), умножая на ρ^2 и интегрируя по площади поперечного сечения стержня, можно получить выражение для приращения крутящего момента

$$dM = A_1 d\theta + B_1 dT \quad (8.4)$$

$$A_1 = \pi \int_0^R A(\rho) \rho^3 d\rho, \quad B_1 = 2\pi \int_0^R B(\rho) \rho^2 d\rho$$

Соотношения (8.1), (8.2) или (8.3) справедливы в зоне прямого превращения, начало которого соответствует температуре $T^0 = M_1 + \sqrt{3}kG\theta R$. В упругой зоне, примыкающей к оси кручения при $T^0 \geq T > M_1$ необходимо положить

$$A = 2G, \quad B = 0 \quad (8.5)$$

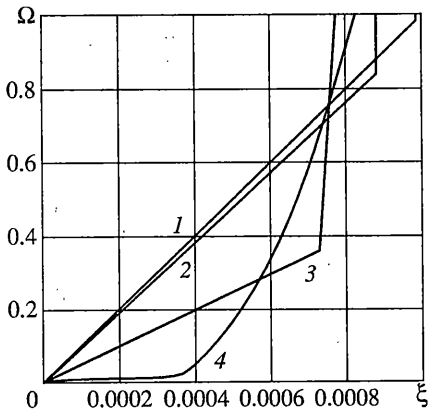
Радиус упругой зоны r_0 определяется по формуле $r_0 = (T - M_1)/(\sqrt{3}kG\theta)$.

Такие же значения A и B (8.5) необходимо использовать в зоне завершения прямого превращения, которая возникает при достаточном охлаждении вблизи боковой поверхности стержня. Нижняя граница зоны завершения фазового перехода двигается при охлаждении к оси кручения. Ее радиус определяется из условия достижения величиной q , вычисленной с помощью (1.4), значения 1.

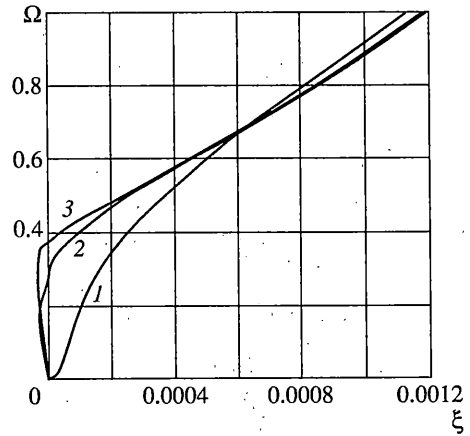
Связная задача о прямом превращении под действием постоянного крутящего момента решается численно по шагам изменения температуры. Соответствующее значение приращения крутки определяется с помощью (8.4), где надо положить $dM = 0$: $d\theta = -B_1/A_1 dT$.

На фиг. 2 приведены графики получающихся зависимостей относительной крутки $\xi = R\theta$ от безразмерного параметра температуры $t = (M_1 - T)/(M_1 - M_2)$ при прямом превращении под действием постоянного крутящего момента, безразмерное значение которого $\mu = 2M/(\pi R^3 G_2)$ равно $\mu = 0.003$. Данные соответствуют модели [2-4]. Кривая 1 построена при решении связной задачи с учетом переменности упругих модулей, кривая 2 - для связной задачи, но с постоянным значением модуля сдвига, характерным для аустенитного состояния, кривая 3 соответствует несвязной задаче с учетом переменности модулей, кривая 4 - несвязной задаче с постоянным модулем сдвига (аустенитное значение). Как видно, максимально достигаемое значение крутки меньше меняется в зависимости от того, решается связная или несвязная задача, чем от того, учитывается или нет переменность модуля сдвига.

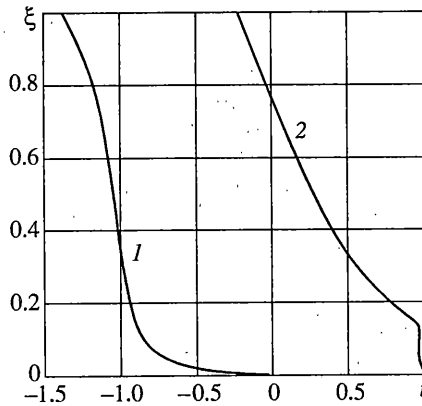
На фиг. 3 и 4 приведены графики получающихся распределений по сечению стержня безразмерных касательных напряжений $\Omega = \tau/G_2$. По оси абсцисс отложено относительное значение радиальной координаты $\xi = \rho/R$. Кривые на фиг. 3 соответствуют более низким температурам $T < M_1$, ($t < 0$), когда еще не все сечение захвачено прямым превращением (прямая 1 соответствует упругому решению и решению несвязной задачи о прямом превращении при любом значении температуры, линия 2 - $t = -1.1$, линия 3 - $t = -1$, линия 4 - $t = -0.5$). Как видно, здесь распределение напряжений напоминает получающееся при решении задач упругопластического кручения. Кривые фиг. 4 построены для положительных значений t , когда упругая область вблизи оси кручения отсутствует. Кривая 1 соответствует $t = 0$, кривая 2 - $t = 0.5$, кривая 3 - $t = 1$. Здесь характер распределения напряжений резко меняется и существенно отличается от упругопластического. Центральная часть стержня разгружается от напряжений (появляются даже небольшие по величине касательные напряжения противоположного знака). Крайние же волокна существенно перегружаются (напряжения при $\rho = R$ на 20% превосходят упругие). Аналогичные явления обнаружены в связных задачах изгиба балок [11] и пластин [12], а также при решении связной задачи Ламе [13]. Это явление связано с движением по материалу границы зоны завершения преобразования. Жесткость крайних волокон, находящихся в этой



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

зоне и деформирующихся упруго существенно возрастает, что и приводит к росту напряжений.

На фиг. 5 изображено расположение для различных значений безразмерной температуры t фронтов начала (кривая 1) и окончания (кривая 2) прямого превращения. Область слева от первой кривой соответствует упругому деформированию до начала превращения, область между кривыми соответствует фазовому переходу, в области справа от кривой 2 происходит упругое деформирование после завершения преобразования.

С помощью соотношения (8.4) может быть численно решена задача о мартенситной неупругости при кручении (т.е. о деформировании в изотермических условиях при $T > M_1$ под действием монотонно возрастающего крутящего момента, когда прямое превращение вызывается не охлаждением, а ростом напряжений. Для этого в (8.4) необходимо положить $dT = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 990101187).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: Наука, 1993. 471 с.
2. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47–53.
3. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 197–205.
4. Мовчан А.А. Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 2. С. 173–181.
5. Мовчан А.А. Определяющие уравнения для прямого превращения в сплавах с памятью формы, удовлетворяющие принципу градиентальности // Механика композиционных материалов и конструкций. 1996. Т. 2. № 3–4. С. 99–108.
6. Мовчан А.А., Казарина С.А. Учет влияния фазовой деформации на диаграмму термоупругих мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Механика композиционных материалов и конструкций. 1997. Т. 3. № 4. С. 93–102.
7. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
8. Мовчан А.А. Аналитическое решение задач о прямом и обратном превращении для сплавов с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 4. С. 136–144.
9. Мовчан А.А. Некоторые проявления способности к ориентированному превращению для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 6. С. 181–189.
10. Мовчан А.А. Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 79–90.
11. Мовчан А.А. Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 1. С. 164–173.
12. Кузнецов А.В. Численное решение связанной осесимметричной задачи о прямом превращении для сплавов с памятью формы // Механика композиционных материалов и конструкций. 1996. Т. 2. № 3–4. С. 71–79.

Москва

Поступила в редакцию
2.02.1999 г.