МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. Е.Н. ЧУМАЧЕНКО, С.Е. ЧУМАЧЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ ДАВЛЕНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ФОРМОИЗМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИХ ОБОЛОЧЕК В УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ СВЕРХПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

В работе поставлена задача управления изотермическим формоизменением нелинейно-вязких оболочек в условиях локальной реализации сверхпластичности, путем воздействия на оболочку рассчитанным внешним давлением. При решении учитываются форма оболочки и гравюры штампа, технические возможности оборудования и системы управления установленной на нем, требуемое конечное качество изделия. Предложенный алгоритм поиска решения реализован в вычислительной системе SPLEN-O и прошел успешное промышленное опробование.

Основные преимущества сверхпластической деформации (СПД): большие степени деформации без разрушения, устранение неоднородностей микроструктуры и, как следствие, повышение служебных характеристик изделий, отсутствие остаточных напряжений после деформирования, низкое напряжение течения достигаются в довольно узком интервале скоростей деформации и температур. При этом соответствующая температура T°С и диапазон ее изменения ΔT, равный $T - \Delta T < T' < T + \Delta T$, при котором значения $\dot\varepsilon_u^{\min}(T')$ и $\dot\varepsilon_u^{\max}(T')$ остаются постоянными, а также сами значения $\dot\varepsilon_u^{\min}$ и $\dot\varepsilon_u^{\max}$, определяющие границы скоростного интервала, обеспечивающего режим сверхпластичности, находят экспериментально.

Формовка оболочек с постоянным давлением приводит к достаточно большим колебаниям (иногда на несколько порядков) скорости деформации, которая значительно изменяется вдоль образующей оболочки в зависимости от ее геометрии и формы внутренней полости штампа.

Во многих практических задачах возникает проблема поддержания условия сверхпластичности в определенных зонах формуемой оболочки, причем эти зоны на разных этапах формовки могут изменяться как по размеру, так и по месту положения [1, 2]. Появление новых решений при модернизации специальных приводов и систем управления ими, делает целесообразным разработку методики для расчетов более точного режима изменения давления, обеспечивающего решение названной проблемы.

Для описания формоизменения рассматриваемой среды воспользуемся следующей моделью [3]:

$$\sigma_{ij,j}(x, t) = 0 \tag{1}$$

$$2\dot\varepsilon_{ij}(x, t) = u_{i,j}(x, t) + u_{j,i}(x, t) \tag{2}$$

$$\tilde\sigma_{ij}(x, t) = 2\mu(\dot\varepsilon_u)\cdot\tilde{\dot\varepsilon}_{ij}(x, t) \tag{3}$$

$$\sigma(x, t) = K\int_{t_0}^{t} \dot\theta(\xi, t)dt \tag{4}$$

$$\dot\theta = 3\dot\varepsilon = \dot\varepsilon_{ij}\delta_{ij} \tag{5}$$

где x, ξ – эйлерова и лагранжева системы координат, соответственно; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; $\tilde{\sigma}_{ij}$ – компоненты девиатора тензора напряжений; σ – шаровая часть тензора напряжений; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненты тензора скоростей деформации; $\tilde{\dot{\varepsilon}}_{ij}$ – компоненты девиатора тензора скоростей деформации; K – известная константа; u_i – компоненты вектора скорости; $\dot{\varepsilon}_u$ – интенсивность тензора скоростей деформаци; $\mu = \mu(\dot{\varepsilon}_u)$ – функция, характеризующая вязкость среды; $\dot{\theta}$ – функция, характеризующая скорость изменения объема (все компоненты подразумеваются физическими).

При помощи приближенного равенства

$$\int_{t_0}^{t} \dot{\theta} dt \approx \int_{t_0}^{t-\Delta t} \dot{\theta} dt + \dot{\theta} \Delta t \tag{6}$$

можно свести (1)–(5) к системе уравнений относительно скоростей. Задавая на границе $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u \cup \Gamma_{\sigma u}$ условия трех основных видов приходим к краевой задаче, решая которую получим поле скоростей, позволяющее на момент времени t определить напряжения и деформации.

Сформулируем задачу в терминах оптимального управления. В качестве управления выступает величина задаваемого газового давления P, позволяющая считать известными величины σ_n и σ_τ на Γ_σ: $\sigma_n = P$, $\sigma_\tau = 0$.

В качестве состояния

$$\Gamma = \Gamma(t) = \Gamma_u(t) \cup \Gamma_\sigma(t) \cup \Gamma_{\sigma u}(t), \quad \sigma = \sigma(x,\ t), \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x,\ t)\,|_{x \in \Gamma_{\sigma u}(t)} \tag{7}$$

где $\Gamma_u = \Gamma_u(t)$ – часть границы, на которой известна скорость среды; $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(t)$ – часть границы, которая является либо свободной поверхностью ($\sigma_n = 0$, $\sigma_\tau = 0$), либо рабочей поверхностью ($\sigma_n = P$, $\sigma_\tau = 0$); $\Gamma_{\sigma u} = \Gamma_{\sigma u}(t)$ – часть границы, на которой заданы условия контактного типа (трение) [4, 5]; $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(t)$ – касательные силы трения, действующие на $\Gamma_{\sigma u}(t)$.

Значение управления P и состояние (7) в момент времени t позволяют, получив поле скоростей $\mathbf{u}(x, t)$, определить состояние в момент времени $t + \Delta t$. При этом должны выполняться ограничения:

$$f_1 \leqslant \Gamma(t + \Delta t) \leqslant f_2 \tag{8}$$

где f_1 и f_2 – функции, задающие поверхности штампов.

Помимо этих ограничений можно выписать группу ограничений, характеризующих технические возможности оборудования и системы управления установленной на нем

$$P_{\min} \leqslant P(t) \leqslant P_{\max} \tag{9}$$

$$V^p_{\min} \leqslant dP(t)/dt \leqslant V^p_{\max} \tag{10}$$

где $P_{\min}$, $P_{\max}$ – минимально и максимально допустимые давления; $V^p_{\min}$, $V^p_{\max}$ – минимально и максимально допустимые скорости изменения давления.

Условия возникновения сверхпластичности в заданных зонах $\Omega_k(t)$:

$$\dot{\varepsilon}_u^{\text{opt}}(t) - \Delta_1 \leqslant \dot{\varepsilon}_u(x,\ t) \leqslant \dot{\varepsilon}_u^{\text{opt}}(t) + \Delta_2, \quad x \in \Omega_k(t) \subset R^3 \tag{11}$$

где $\dot{\varepsilon}_u^{\text{opt}}$ – оптимальная интенсивность скорости деформации; Δ_1, Δ_2 – параметры, задающие допустимые отклонения $\dot{\varepsilon}_u(x,\ t)$ в заданных зонах $\Omega_k(t)$.

Условие заполняемости штампа

$$|\,\Gamma(x,\ t^*) - D(x)\,| \leqslant \delta_1 \tag{12}$$

Здесь $D(x)$ – функция, задающая уравнение поверхности желаемой конфигурации изделия; t^* – время окончания процесса; δ_1 – малая величина.

Кроме этого целесообразно ограничить величину максимальной разнотолщинности оболочки в процессе ее формовки

$$|\Delta\Gamma(x,\ t)_{\max} - \Delta\Gamma(x,\ t)_{\min}| \leq \delta_2 \qquad (13)$$

Здесь $\Delta\Gamma(x,\ t)_{\min}$, $\Delta\Gamma(x,\ t)_{\max}$ – соответственно минимальная и максимальная толщина оболочки в момент времени t формовки; δ_2 – параметр, характеризующий максимально допустимую разнотолщинность.

Если дополнить эти требования функционалом качества процесса, который может включать величины, не стесненные ограничениями (например, время процесса, определяющее производительность), а также может включать штрафные слагаемые, снимающие ряд ограничений (например, (9) или (10), а может быть (13)), то придем к задаче оптимального управления.

Основная проблема, возникающая при анализе такой задачи, это проблема управляемости. Т.е. необходимо ответить на вопрос о существовании такого граничного условия, которое обеспечило бы при выполнении условий (1)–(5), (8)–(11), (13) удовлетворение финально наблюдаемого условия (12).

На сегодняшний день нет теории, дающей ответ на такой вопрос. Реально вопрос управляемости может быть решен приближенно при помощи численного зондирования.

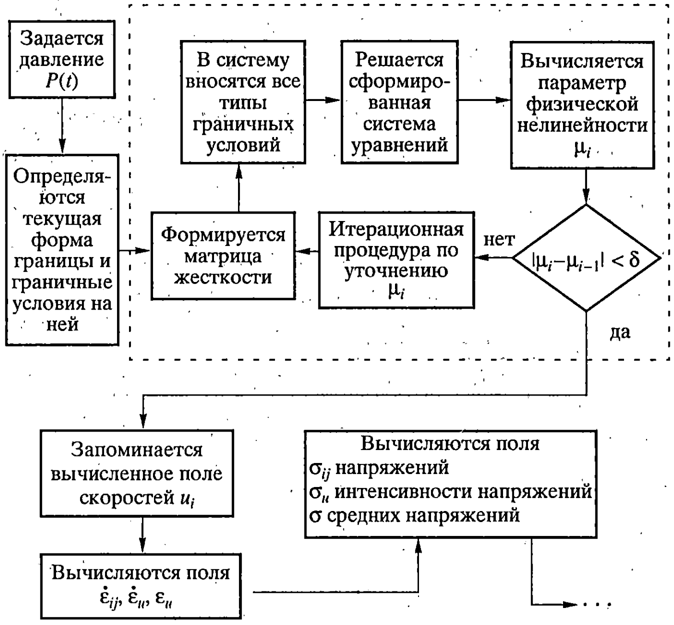
Предположим, что удалось построить управление $P(t)$, не нарушая ограничений (1)–(5), (8)–(11), (13) на интервале времени $[0, t]$. Необходимо продолжить его вплоть до момента t^*, заранее неизвестного, для которого будет выполняться, помимо прочих, и ограничение (12).

Для решения этой задачи необходимо получить продолжение решения в малую окрестность $[t, t + \Delta t]$. Если, выбирая давление P, удовлетворяющее (9), (10), удается удовлетворить ограничениям (1)–(5), (8), (11), то можно момент времени $t + \Delta t$ считать текущим и продолжить процесс построения решения в следующей малой окрестности. Если же среди управлений, удовлетворяющих (9), (10), не наблюдается такого, что обеспечило бы выполнение условий (1)–(5), (8), (11), то вывод о неуправляемости можно сделать лишь при условии отсутствия удовлетворительного $P(t')$ не только при $t' \in [t, t + \Delta t]$, но и при $t' \in [0, t + \Delta t]$, что предполагает варьирование всей предыстории. Вычислительная сложность такой задачи даже при использовании наиболее экономичных методов (например, метода локальных вариаций) очень велика. Поэтому целесообразно несколько изменить задачу: вывод о неуправляемости будем делать на основании невозможности удовлетворить ограничениям (1)–(5), (8), (11) при варьировании управления в рамках множества (9), (10) лишь на интервале $[t, t + \Delta t]$.

Такой подход позволяет сильно упростить задачу, свести ее к анализу состояния системы в текущий момент времени t (в точке) вместо того, чтобы рассматривать ее на временном интервале $[0, t]$.

Почти очевидно, что при произвольно заданных $\dot{\varepsilon}_u^{\text{opt}}$, Ω_k, $P_{\min}$, $P_{\max}$, $V_{\min}^p$, $V_{\max}^p$, система окажется неуправляемой. Из вывода о неуправляемости, следует необходимость смягчения ограничений. Прерогатива проектировщика технологического процесса решить какие ограничения необходимо выдержать прежде всего, а какие могут быть и вовсе сняты.

Целесообразна следующая логика моделирования. Выделяется основной параметр, который должен изменяться в заданном диапазоне или по заданному закону. На прочие параметры ограничения не накладываются, ведется лишь наблюдение за ними и в случае необходимости осуществляется переход на управление по другому основному параметру. В качестве основных параметров могут выступать давление формовки $P(t)$ или интенсивность скоростей деформмции $\dot{\varepsilon}_u$ в интересующих зонах (см. (11)). Эти



параметры определяют производительность процесса формовки и реализацию эффекта сверхпластичности. При этом учитываются технические характеристики оборудования, системы управления, установленной на нем, свойства материала заготовки и смазки.

Такой подход позволяет облегчить удовлетворение основного требования формоизменения (12), поскольку не выбраковываются (по невыполнению ограничений, накладываемых на не основные параметры) те варианты, которые приводят к его выполнению. Само ограничение (12) целесообразно оценивать визуально, наблюдая за графически представляемыми результатами математического моделирования процесса формовки. То же можно сказать и о требованиях (13), которые контролируются во время всего процесса формообразования изделия.

Управление $P(t)$ входит в число задаваемых граничных условий и без труда может быть задано в виде произвольной функции времени. Схематичная последовательность действий при определении поля скоростей при прямом счете приведена на фигуре.

Задача удовлетворения заданной программе изменения $\dot{\varepsilon}_u(\mathbf{x}, t)$ обратна той, что решается при прямом счете. Можно было бы, многократно решая задачу в момент времени t с различными значениями $P(t)$, удовлетворяющими ограничениям (9), (10), добиться получения заданных значений $\dot{\varepsilon}_u$ в интересующих зонах. Однако такой подход потребует многократного увеличения времени по сравнению с прямым счетом. Поэтому, имея ввиду в качестве основной цели создание эффективной системы проектирования допустимых режимов технологического процесса формовки, поступим иначе.

Примем следующее допущение. Поле скоростей деформаций представляет собой некоторую тензорную функцию известной структуры, зависящую от некоторого количества параметров. Их значения могут быть определены из дополнительно привлекаемых, по некоторым соображениям, уравнений, т.е.

$$\dot{\bar{\varepsilon}}(x,\ t) = \bar{f}(\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_n) \tag{14}$$

где $\bar{f}$ известно, а $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ подлежат определению из n дополнительных уравнений. В качестве одного из таких уравнений можно принять само уравнение (14), которое в этом случае примет вид

$$\ddot{\bar{\varepsilon}}(x,\ t)=\bar{f}(\nu) \tag{15}$$

Так как интересующие поля известны вплоть до момента времени $t-\Delta t$, то можно сконструировать $\bar{f}$ достаточно простого вида (ξ – лагранжевы координаты)

$$\dot{\bar{\varepsilon}}(x(\xi,\ t),\ t)=\nu\dot{\bar{\varepsilon}}(x(\xi,\ t-\Delta t),\ t-\Delta t) \tag{16}$$

Гипотезу (16) можно несколько модифицировать и учесть тенденцию изменения каждой из компонент $\dot{\bar{\varepsilon}}$. Для этого введем систему величин

$$\nu_{ij}(x(\xi,\ t-\Delta t),t-\Delta t)=\frac{\dot{\varepsilon}_{ij}(x(\xi,\ t-\Delta t),\ t-\Delta t)}{\dot{\varepsilon}_{ij}(x(\xi,\ t-2\Delta t),\ t-2\Delta t)} \tag{17}$$

Далее, предполагая, что

$$\nu_{ij}(x(\xi,\ t),\ t)=\nu_{ij}(x(\xi,\ t-\Delta t),\ t-\Delta t) \tag{18}$$

Т.е. исключая скачки в решении и предполагая его плавность, окончательно получим

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(x(\xi,\ t),\ t)=\nu\nu_{ij}(x(\xi,\ t),\ t)\dot{\varepsilon}_{ij}(x(\xi,\ t-\Delta t),\ t-\Delta t) \tag{19}$$

Здесь по индексам i, j суммирования нет.

Значение ν находятся из соображений минимума отклонения интенсивности тензора скоростей деформации в зонах Ω_k от оптимальной интенсивности $\dot{\varepsilon}_u^{\text{opt}}(t)$:

$$J(\nu)=\frac{1}{\sum\limits_{i\in A} V(e^{(i)})}\sum_{i\in A}\ \int\limits_{V(e^{(i)})}(\dot{\varepsilon}^{(i)}(t)-\dot{\varepsilon}_u^{\text{opt}})^2 dV \tag{20}$$

где A – множество элементов, для которых $\dot{\varepsilon}_u^{(i)}(t)$ (интенсивность тензора скоростей деформации в элементе $e^{(i)}$) должно быть, по возможности, ближе к $\dot{\varepsilon}_u^{\text{opt}}(t)$.

Подразумевается, что данная зона $\cup\Omega_k$ совпадает с ее конечноэлементной аппроксимацией $\Sigma e^{(i)}(i\in A)$, и соответствующие им объемы равны

$$V(\bigcup_k \Omega_k)=\sum_{i\in A} V(e^{(i)}) \tag{21}$$

С учетом (19) $J(\nu)$ принимает вид

$$J(\nu)=\frac{1}{\sum\limits_{i\in A} V(e^{(i)})}\sum_{i\in A}\ \int\limits_{V(e^{(i)})}\{\ (\dot{\varepsilon}_u^{(i)}(t))^2-2\dot{\varepsilon}_u^{(i)}(t)\dot{\varepsilon}_u^{\text{opt}}+(\dot{\varepsilon}_u^{\text{opt}})^2\}dV=$$

$$=\nu^2(\sum_{i\in A} V(e^{(i)}))^{-1}\sum_{i\in A}\ \int\limits_{V(e^{(i)})}\frac{2}{9}D^2 dV+\nu(\sum_{i\in A} V(e^{(i)}))^{-1}\sum_{i\in A}\ \int\limits_{V(e^{(i)})}\left(-2\frac{\sqrt{2}}{3}D\dot{\varepsilon}_u^{\text{opt}}\right)dV+$$

$$+\left(\sum_{i\in A} V(e^{(i)})\right)^{-1}\sum_{i\in A}\ \int\limits_{V(e^{(i)})}(\dot{\varepsilon}_u^{\text{opt}})^2 dV=a\nu^2+b\nu+c \tag{22}$$

Заметим, что в соотношении (22) $a>0$, $b<0$ и $c>0$, т.к.

$$D=[(\nu_{rr}\dot{\varepsilon}_{rr}(t-\Delta t)-\nu_{zz}\dot{\varepsilon}_{zz}(t-\Delta t))^2+(\nu_{zz}\dot{\varepsilon}_{zz}(t-\Delta t)-\nu_{\varphi\varphi}\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(t-\Delta t))^2+$$

$$+(\nu_{\varphi\varphi}\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(t-\Delta t)-\nu_{rr}\dot{\varepsilon}_{rr}(t-\Delta t))^2+6(\nu_{rz}\dot{\varepsilon}_{rz}(t-\Delta t))^2]^{1/2} \tag{23}$$

Условие минимума (а речь идет о минимуме, т.к. $a > 0$) обеспечит значение ν, найденное из уравнения

$$\partial J(\nu)/\partial\nu = 0 \tag{24}$$

Действительно, так как $\partial J(\nu)/\partial\nu = 2a\nu + b = 0$, то отсюда следует, что

$$\nu = -b/2a > 0 \tag{25}$$

Далее по формулам (19) можно определить искомое поле $\dot{\bar{\varepsilon}}(x,\ t)$, обеспечивающее минимальное отклонение интенсивности тензора скоростей деформации от заданной величины в интересующих нас областях Ω_k.

Зная все компоненты тензора скорости деформации в Ω_k и предысторию нагружения, попробуем найти давление P, которое необходимо задать на текущем шаге по времени для обеспечения в анализируемой зоне оболочки желаемого напряженно-деформированного состояния.

Для осесимметричной задачи

$$\dot{\varepsilon}_u = \sqrt{2/3}\sqrt{(\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{\varepsilon}_{zz})^2 + (\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi})^2 + (\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{\varepsilon}_{rr})^2 + 6\dot{\varepsilon}_{rz}^2} \tag{26}$$

с учетом (19)

$$\dot{\varepsilon}_u(t) = [(\nu_{rr}\dot{\varepsilon}_{rr}(t-\Delta t) - \nu_{zz}\dot{\varepsilon}_{zz}(t-\Delta t))^2 + (\nu_{zz}\dot{\varepsilon}_{zz}(t-\Delta t) - \nu_{\varphi\varphi}\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(t-\Delta t))^2 +$$

$$+(\nu_{\varphi\varphi}\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(t-\Delta t) - \nu_{rr}\dot{\varepsilon}_{rr}(t-\Delta t))^2 + 6(\nu_{rz}\dot{\varepsilon}_{rz}(t-\Delta t))^2]^{1/2} \tag{27}$$

Теперь, зная предысторию нагружения, легко определить все компоненты тензора напряжений для соответствующего поля напряжений в Ω_k.

Воспользуемся (3)–(5), (19), (25) и (27):

$$\sigma_{ij}(x,\ t) - \sigma(x,\ t)\delta_{ij} = 2\mu(\dot{\varepsilon}_u)(\dot{\varepsilon}_{ij}(x,\ t) - \dot{\varepsilon}(x,\ t)\delta_{ij})$$

$$\sigma_{ij}(x,\ t) = (\sigma^* + 3K\dot{\varepsilon}(x,\ t)\Delta t)\delta_{ij} + 2\mu(\dot{\varepsilon}_u)(\dot{\varepsilon}_{ij}(x,\ t) - \dot{\varepsilon}(x,\ t)\delta_{ij}) \tag{28}$$

Здесь σ^* – накопленное к текущему шагу гидростатическое давление в материале оболочки; Δt – текущий шаг по времени, вид функции $\mu(\dot{\varepsilon}_u)$ обычно задается, а коэффициенты в заданном представлении определяются заранее из соответствующих экспериментов.

Напомним, что

$$\sigma^* = K\int_{t_0}^{t-\Delta t} \operatorname{div} u(\xi,\ t)dt \tag{29}$$

Теперь найдем компоненты функции давления

$$P_{n_r}(t) = \frac{1}{\sum\limits_{k\in B} l(\Gamma_{\Omega_k})}\sum_{k\in B}\int_{\Gamma_{\Omega_k}}(\sigma_{rr}(x,\ t)n_r(x,\ t) + \sigma_{rz}(x,\ t)n_z(x,\ t))d\Gamma \tag{30}$$

$$P_{n_z}(t) = \frac{1}{\sum\limits_{k\in B} l(\Gamma_{\Omega_k})}\sum_{k\in B}\int_{\Gamma_{\Omega_k}}(\sigma_{zz}(x,\ t)n_z(x,\ t) + \sigma_{zr}(x,\ t)n_r(x,\ t))d\Gamma \tag{31}$$

и само давление

$$P(t) = (P_{n_r}^2(t) + P_{n_z}^2(t))^{1/2} \tag{32}$$

Здесь B – множество подобластей $\Omega_k, \Gamma_{\Omega_k} = \Omega_k \cap \Gamma$; l – длина соответствующего участка границы.

С учетом конечно-элементной аппроксимации формулы (30), (31) можно переписать в виде

$$P_{n_r}(t) = \frac{1}{\sum\limits_{i\in A} l(\Gamma_{e^{(i)}})} \sum_{i\in A} \int\limits_{\Gamma_{e^{(i)}}} (\sigma_{rr}(x,\ t)n_r(x,\ t) + \sigma_{rz}(x,\ t)n_z(x,\ t))d\Gamma \tag{33}$$

$$P_{n_z}(t) = \frac{1}{\sum\limits_{i\in A} l(\Gamma_{e^{(i)}})} \sum_{i\in A} \int\limits_{\Gamma_{e^{(i)}}} (\sigma_{zz}(x,\ t)n_z(x,\ t) + \sigma_{zr}(x,\ t)n_r(x,\ t))d\Gamma \tag{34}$$

где $\Gamma_{e^{(i)}} = e^{(i)} \cap \Gamma$ и в случае, если это пересечение пустое, то соответствующие этим элементам интегралы в (33), (34) равны нулю.

Замечание 1. Параметр ν определяется для зон Ω_k, отмеченных оператором-расчетчиком. Если $\cup\Gamma \cap \Omega_k = 0$, то в интегралах (30), (34) множество A можно расширить до множества всех элементов, аппроксимирующих рассматриваемую оболочку. Вообще говоря, множество A можно заменить множеством B всех приграничных элементов оболочки, пересекающихся по двум узлам с тем участком внешней границы, на котором задано давление $P(t)$.

Замечание 2. Задаваясь гипотезой (19), в поле $\dot{\varepsilon}_{ij}(x,\ t)$ вносится погрешность, что в свою очередь приводит к внесению погрешности в поле вязкостей $\mu(x, t)$. В силу ярко выраженной нелинейной зависимости μ от $\dot{\varepsilon}_u$, погрешность вычисления $\mu(x, t)$ может быть много больше, чем погрешность определения $\dot{\varepsilon}_{ij}(x,\ t)$. Это может смазать или исказить картину поля напряжений и привести к большой погрешности в вычислении суммарного давления. С целью снижения погрешностей целесообразно поле вязкости при прогнозе в момент времени t принимать равным полю вязкости в момент времени $t - \Delta t$.

Замечание 3. Так как напряжения, рассчитываемые МКЭ по сечению оболочки, образуют некоторую разрывную при перемещении от элемента к элементу функцию, то получаемые погрешности решения, связанные с "проскакиванием" оптимального значения P и приводящие к изменению знака P_{n_r} или P_{n_z} на последующем шаге (33), (34), можно исправить следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} P_{n_r}^{e^{(i)}}(t) = \int\limits_{\Gamma_{e^{(i)}}} (\sigma_{rr}n_r + \sigma_{rz}n_z)d\Gamma \\ \text{Если } (P_{n_r}^{e^{(i)}}(t)n_r) > 0, \text{ то положить } P_{n_r}^{e^{(i)}}(t) = 0 \\ P_{n_r}(t) = \dfrac{1}{\sum\limits_{i\in A} l(\Gamma_{e^{(i)}})} \sum\limits_{i\in A} P_{n_r}^{e^{(i)}}(t) \end{array}\right\} \tag{35}$$

и аналогично

$$\left.\begin{array}{l} P_{n_z}^{e^{(i)}}(t) = \int\limits_{\Gamma_{e^{(i)}}} (\sigma_{zz}n_z + \sigma_{zr}n_r)d\Gamma \\ \text{Если } (P_{n_z}^{e^{(i)}}(t)n_z) > 0, \text{ то положить } P_{n_z}^{e^{(i)}}(t) = 0 \\ P_{n_z}(t) = \dfrac{1}{\sum\limits_{i\in A} l(\Gamma_{e^{(i)}})} \sum\limits_{i\in A} P_{n_z}^{e^{(i)}}(t) \end{array}\right\} \tag{36}$$

Это ограничение говорит о том, что вектор давления $\mathbf{P}^e(t)$ на элементе должен быть коллинеарен и противоположен по направлению вектору нормали $\mathbf{n}^e$ к поверхности оболочки на этом же участке поверхности. "Отрицательное" по направлению давление не допустимо.

Замечание 4. Для ускорения выполнения расчетов целесообразно начинать управление после некоторого значения P_0, которое достигается от 0 за N заданных шагов. Перед переходом на управление минимум два шага нужно сделать с постоянным значением P_0. В противном случае на первых шагах управления существенно скажется субъективная предыстория нагружения. На графике $\dot{\varepsilon}_u(t)$ в анализируемой зоне может образоваться провал.

Замечание 5. Для лучшей стабилизации решения и смягчения возможных скачков метрику управления по двум точкам (17), (18) можно заменить на:

управление по трем точкам

$$\nu_{ij}(x(\xi, t), t) = \nu_{ij}(x, t-\Delta t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon_{ij}(x, t-2\Delta t)}{\varepsilon_{ij}(x, t-3\Delta t)} + \frac{\varepsilon_{ij}(x, t-\Delta t)}{\varepsilon_{ij}(x, t-2\Delta t)}\right] \tag{37}$$

управление по двум точкам с затухающим влиянием предыстории нагружения

$$\nu_{ij}(x, t) = \nu_{ij}(x, t-\Delta t) = \frac{1}{2}\left[\nu_{ij}(x, t-2\Delta t) + \frac{\varepsilon_{ij}(x, t-\Delta t)}{\varepsilon_{ij}(x, t-2\Delta t)}\right] \tag{38}$$

Замечание 6. Ограничение (10), реализованное следующим образом:

$$A = P(t) - P(t-\Delta t)$$

если $|A| > \Delta P \Delta t$, то $P(t) = P(t-\Delta t) + \operatorname{sign} A \Delta P \Delta t$ иначе $P(t) = P(t-\Delta t) + A$, где ΔP – скорость изменения объема (максимально допустимая в рассматриваемом процессе), Δt – шаг решения по времени, можно скорректировать так: если $\frac{|\dot{\varepsilon}_u^{opt} - \dot{\varepsilon}_u^{тек}|}{0{,}1\dot{\varepsilon}_u^{opt}} < 1$, то $\Delta P = \left|\frac{\dot{\varepsilon}_u^{opt} - \dot{\varepsilon}_u^{тек}}{0{,}1\dot{\varepsilon}_u^{opt}}\right| \Delta P$

Т.е. при приближении к оптимуму скорость изменения давления ΔP следует уменьшить. Это приведет к стабилизации решения при достижении оптимума управления.

Замечание 7. Рассмотренный пример для осесимметричной задачи легко распространяется на плоскую задачу и на общий случай управления формоизменением пространственных оболочек в условиях локальной реализации заданных ограничений на течение изотропной нелинейно-вязкой среды.

Разработанный алгоритм поиска решения поставленной задачи включен в вычислительную систему SPLEN-O, созданную коллективом московских ученых и программистов под руководством автора. Вычислительная система SPLEN-O прошла широкое промышленное опробование на предприятиях России. Она была протестирована специальной международной комиссией концерна AIRBUS INDUSTRY на базе данных по титановым сплавам и затем приобретена им для промышленной эксплуатации и использования полученных результатов при проектировании технологических процессов на известных зарубежных фирмах Aerospatiale Sociente Nationale Industrielle, Франция; Daimler-Benz Aerospace Airbus GmbH, Германия; Construcciones Aeronauticas S.A., Испания; British Aerospace (Operations) Ltd., Англия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов О.М.* Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности. М.: Машиностроение, 1979. 184 с.
2. *Chumachenko E.N., Smirnov O.M.* Computer aided design of superplastic forming processes based on the splen program set. // Materials Science Forum. 1994. V. 170–172. P. 601–606.
3. *Чумаченко Е.Н.* Математическое моделирование пластического формоизменения материалов при обработке давлением. М.: МГИЭМ, 1998. 156 с.
4. *Ефимов А.Б., Романюк С.Н., Чумаченко Е.Н.* Об определении закономерностей трения в процессах обработки металлов давлением // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 82–98.
5. *Давыдов В.С., Чумаченко Е.Н.* Метод реализации модели контактного взаимодействия в МКЭ при решении задач об управлении формоизменением сплошных сред // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С. 53–63.

Москва

Поступила в редакцию
22.12.1998