МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2000

УДК 539.376

© 2000 г. А.М. ЛОКОЩЕНКО, М.А. ЮМАШЕВА

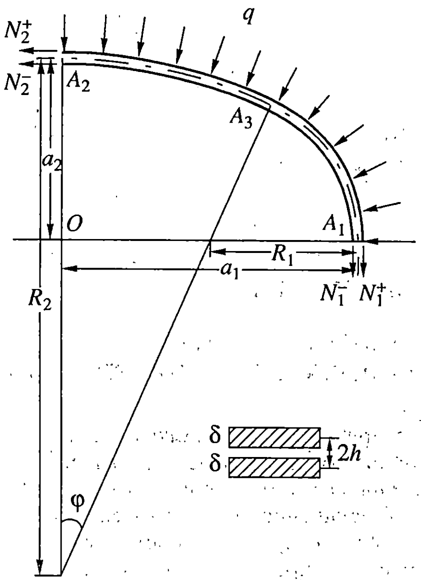
ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается процесс деформирования и разрушения овального кольца, моделирующего поведение длинной цилиндрической оболочки под действием внешнего распределенного давления. В качестве определяющего соотношения для оценки характеристик материала принимается гипотеза о нелинейной вязкости с сингулярной составляющей. В соотношении учитывается разносопротивляемость материала при растяжении и сжатии для напряжений, близких к предельным значениям. Сингулярность позволяет наряду с нелинейной вязкостью учитывать характеристики мгновенного разрушения.

Цилиндрическая оболочка является конструктивным элементом, широко применяемым в машиностроении. В ряде отраслей промышленности большое применение находят цилиндрические оболочки, нагруженные внешним равномерно распределенным давлением при высоких температурах. Если такая оболочка находится под нагрузкой длительное время с интенсивным развитием деформаций ползучести, то основная задача заключается в определении изменения напряжений и деформаций во времени, а также в вычислении времени работоспособности оболочки. Отношение длины цилиндрических оболочек к размерам поперечного сечения обычно достаточно велико, поэтому влиянием краевых закреплений при исследовании сплющивания оболочек можно пренебречь. В этих условиях рассматривается деформирование колец единичной ширины, толщины H и среднего радиуса R_0 при действии внешнего гидростатического давления q, при этом обычно мгновенные деформации пренебрегаются вследствие их малости по сравнению с деформациями ползучести.

Во всякой реальной оболочке срединная линия поперечного сечения в исходном состоянии в той или иной мере отличается от идеальной окружности. В большинстве работ при учете влияния начального несовершенства поперечного сечения на поведение оболочки обычно предполагается, что исходное поперечное сечение имеет слегка овальную форму, характеризуемую двумя осями симметрии. В качестве количественной характеристики исходной овальности Δ_0 принимается отношение разности максимального и минимального диаметров поперечного сечения кольца к их сумме. В данной работе исследуется зависимость времени работоспособности рассматриваемого кольца от его геометрических параметров, величины давления q и механических характеристик материала.

При аналитическом описании деформирования кольца под действием внешнего давления можно использовать различные гипотезы. Во многих работах ([1, 2] и др.) форма кольца в полярных координатах аппроксимируется уравнением, в котором отклонение его срединной линии от идеальной окружности при произвольном времени t пропорционально косинусу двойного полярного угла. Такой подход позволяет рассматривать только малые перемещения кольца. Для обеспечения возможности учета больших перемещений кольца в данной работе форма его срединной линии аппроксимируется сопряженными дугами двух окружностей (такой подход ранее



Фиг. 1

использовался в цикле работ С.А. Шестерикова с сотрудниками ([3–5] и др.)). Геометрия срединной линии четверти кольца $A_1A_3A_2$ (фиг. 1) определяется с помощью трех параметров: радиусов R_1 и R_2 и угла φ, который соответствует точке сопряжения дуг A_1A_3 и A_2A_3. Для простоты принимается, что длины дуг A_1A_3 и A_2A_3 в процессе деформирования кольца остаются неизменными. Назовем c отношение длины дуги A_1A_3 и $A_1A_2A_3$. В этом случае из условия неизменности длины дуги $A_1A_3A_2$

$$R_1(\pi/2 - \varphi) + R_2\varphi = \pi R_0/2$$

определяются радиусы R_1 и R_2:

$$R_1 = R_0c/(1-2\varphi/\pi), \quad R_2 = \pi R_0(1-c)/(2\varphi) \tag{1}$$

В каждом сечении принимается выполнение гипотезы плоских сечений

$$d\varepsilon_i/dt = d\varepsilon_{i0}/dt + zd\chi_i/dt \tag{2}$$

Здесь z – координата по нормали к срединной линии, направленная от центра кольца, ε_i – деформация кольца в произвольной точке, ε_{i0} – деформация срединной линии, $d\chi_i/dt$ – изменение кривизны, индекс i здесь и всюду ниже принимает значения 1 или 2 (в зависимости от того, к дуге какого радиуса – R_1 или R_2 – относится соответствующая величина).

Во всех известных решениях задачи о поведении кольца под внешним давлением используется зависимость скоростей ползучести от напряжений в степенной форме, а в качестве критического значения t^* принимается время, при котором либо радиус R_2 стремится к бесконечности, либо отрезок OA_2 стремится к нулю. Однако анализ соответствующих решений показывает, что напряжения в дугах A_1A_3 и A_2A_3 при увеличении времени t приближаются к предельным разрушающим значениям. При малых значениях овальности Δ эти разрушающие значения напряжений характеризуют потерю несущей способности кольца при сжатии. При достаточно больших значениях Δ напряжения на внешней и внутренней поверхностях кольца имеют противоположные знаки, при определенных условиях возникает потеря несущей способности кольца при растяжении. Для учета этих эффектов в данной работе, в отличие от известных решений, зависимость скорости деформации от напряжения принимается в виде дробной функции [6, 7]:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A\left(\frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma_{b1}-\sigma)(\sigma-\sigma_{b2})}}\right)^n \tag{3}$$

Здесь $\sigma_{b1} > 0$ и $\sigma_{b2} < 0$ – пределы кратковременной прочности материала при растяжении и сжатии соответственно, показатель n для простоты представляет собой отношение двух нечетных чисел. Определяющее уравнение (3) характеризует нелинейную вязкость материала с сингулярной составляющей. В соотношении (3) учитывается разносопротивляемость материала при растяжении и сжатии для напряжений, близких к предельным значениям. Сингулярность позволяет наряду с нелинейной вязкостью учитывать характеристики мгновенного разрушения.

Заменим реальное кольцо сплошного сечения идеализированным двухслойным кольцом [8]; толщина каждого слоя δ, расстояние между слоями $2h$, усилия в этих слоях в сечении A_i назовем $N_i^{\pm}$, знаки "+" и "−" относятся соответственно к внешнему и внутреннему слоям кольца (фиг. 1). В [8] вычисление отношений $k_1 = h/H$ и $k_2 = \delta/H$ основано на сравнении результатов деформирования реального и идеализированного колец при одноосном растяжении и чистом изгибе. При использовании степенного закона ползучести с показателем степени n Ю.Н. Работнов [8] показал, что $k_2 = 0.5$ при произвольном n, а k_1 изменяется от $\sqrt{3}/6 = 0.289$ при $n = 1$ до 0.25 при $n \to +\infty$. В данной работе для простоты принимается $k_1(t) = \text{const} = 0.25$.

Введем параметр относительной толщины кольца $\lambda = H/R_0$ и характеристику разносопротивляемости материала растяжению и сжатию $\alpha = -\sigma_{b2}/\sigma_{b1}$. В дальнейшем рассмотрении будут использоваться только безразмерные переменные, в качестве безразмерных величин q, $N_i^{\pm}$, t, R_i, a_i будут приниматься аналогичные реальные величины, отнесенные соответственно к $\lambda\sigma_{b1}$, σ_{b1}, A^{-1}, R_0, R_0.

Исключая из (2) удлинения срединной линии ε_{i0}, с учетом (3) получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\pi c}{\lambda}(Z_1^+ - Z_1^-) = \frac{\pi(1-c)}{\lambda}(Z_2^+ - Z_2^-), \quad Z_i^{\pm} = \left[\frac{N_i^{\pm}}{\sqrt{(1-N_i^{\pm})(\alpha + N_i^{\pm})}}\right]^n \tag{4}$$

Уравнения равновесия дуги $A_1A_3A_2$ в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$N_i^+ + N_i^- = -2qa_i, \quad N_1^+ - N_1^- + N_2^- - N_2^+ = \frac{4q(a_1^2 - a_2^2)}{\lambda} \tag{5}$$

При учете (1) длины a_1 и a_2 зависят от c и φ следующим образом:

$$a_1 = \frac{\pi c}{2}\left[\frac{2}{\pi - 2\varphi} + \left(\frac{1-c}{c\varphi} - \frac{2}{\pi - 2\varphi}\right)\sin\varphi\right]$$

$$a_2 = \frac{\pi c}{2}\left[\frac{1-c}{c\varphi} - \left(\frac{1-c}{c\varphi} - \frac{2}{\pi - 2\varphi}\right)\cos\varphi\right] \tag{6}$$

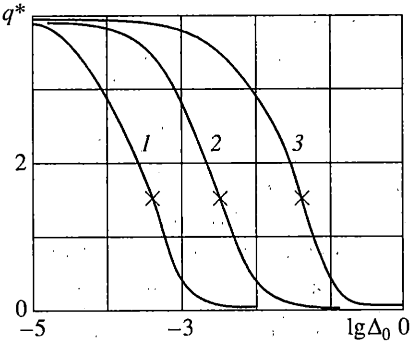
Система алгебраических уравнений (4), (5), дополненная уравнениями (6), позволяет определить все 4 рассматриваемые усилия $N_i^{\pm}$ в зависимости от c и φ. Зависимость всех силовых и геометрических характеристик решения от времени определяется с помощью (4):

$$t = \frac{\lambda}{\pi c}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(Z_1^- - Z_1^+)} = \frac{\lambda}{\pi(1-c)}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(Z_2^+ - Z_2^-)}, \quad \varphi_0 = \varphi(t = 0) \tag{7}$$

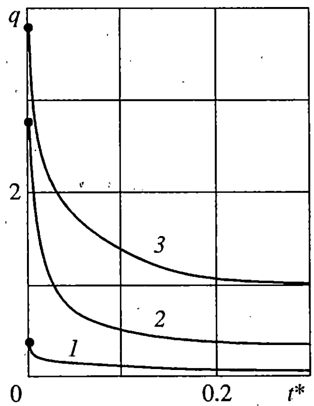
Основным вопросом является выяснение условий потери несущей способности кольца в процессе ползучести. Из (4) следует, что каждое из усилий $N_i^{\pm}$ должно удовлетворять двойному неравенству

$$-\alpha < N_i^{\pm} < 1 \tag{8}$$

В случае, если при каком-либо значении $t = t^*$ хотя бы одно из усилий $N_i^{\pm}$ достигает какой-нибудь границы интервала (8), то это означает разрушение одного из двух слоев кольца и, следовательно, потерю несущей способности всего кольца. На фиг. 2, 3 приведены результаты вычислений при $n = 3$, $\alpha = 4$, $c = 0.5$, $\lambda = 0.001$, 0.01 и 0.1 (кривые *1–3* соответственно). Предварительно необходимо выяснить условия мгновенного разрушения при действии критического давления q^*. С этой целью на фиг. 2 приведены зависимости q^* от параметра исходной овальности Δ_0, при которых



Фиг. 2



Фиг. 3

хотя бы одно из усилий $N_i^{\pm}$ достигает какой-либо границы интервала (8). При $q_1 < q^* \leqslant 4$ потеря несущей способности кольца вызывается разрушением какого-либо слоя при сжатии, при $q_2 \leqslant q^* < q_1$ – при растяжении, при $q = q_1$ – одновременным разрушением одного слоя при растяжении и другого слоя при сжатии. Значения q_1 на кривых *1–3* отмечены крестом. Расчеты показали, что влияние c на зависимости $q^*(\Delta_0)$ несущественно, так как приводит к изменению соответствующих параметров на величину порядка 1%. Давление $q_2(\Delta_0)$ соответствует условию $\Delta_0(\varphi_0 = 0) = \pi/(\pi + 4) = 0.44$, значения q_2 достаточно малы, они составляют $7.1 \cdot 10^{-4}$, $7.2 \cdot 10^{-3}$, $7.6 \cdot 10^{-2}$ соответственно для $\lambda = 0.001$, 0.01 и 0.1. Ниже определяется продолжительность работоспособности кольца t^* до потери им несущеей способности, т.е. при $q_2 \leqslant q \leqslant 4$.

Проведем приближенную оценку долговечности кольца под внешним давлением. Введем новую переменную $\psi = 1 - 4\varphi/\pi$ и проведем разложение в ряд Маклорена всех рассматриваемых функций по ψ с удержанием линейных членов

$$a_{1,2} = 1 \pm (\sqrt{2} - 1)\psi, \quad \Delta = (\sqrt{2} - 1)\psi$$

$$N_{1,2}^{-} = [-1 \mp 5(\sqrt{2} - 1)\psi]q, \quad N_{1,2}^{+} = [-1 \pm 3(\sqrt{2} - 1)\psi]q \tag{9}$$

Интегрирование (7) при использовани (9) приводит к следующей зависимости критического времени t^* от основных параметров задачи:

$$t^* = B\ln\left(\frac{\Delta^*}{\Delta_0}\right), \quad B = \frac{\lambda[(1+q)(\alpha - q)]^{(0.5n+1)}}{8(\sqrt{2} - 1)n(2\alpha + \alpha q - q)q^n} \tag{10}$$

величина овальности $\Delta^*(q)$, соответствующей потере несущей способности кольца, определяется кривой на фиг. 2 при замене q^* на q и Δ_0 на Δ^*. На фиг. 3 приведены зависимости $t^*(q)$ при $\Delta_0 = 0.001$ и различных значениях λ. При достаточно малых значениях давления q зависимость критического времени от различных параметров задачи согласно (10) имеет следующий вид:

$$t^* = \frac{0.15\lambda\alpha^{0.5n}}{nq^n}\ln\left(\frac{\Delta^*}{\Delta_0}\right)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-00094).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 532 с.
2. *Hoff N.* Buckling at high temperature // J. Roy. Aeronaut. Soc. 1957. V. 61. № 563. P. 756–774.
3. *Ванько В.И., Шестериков С.А.* Сплющивание кольца в условиях ползучести // Инж. ж. МТТ. 1966. № 5. С. 127–130.
4. *Локощенко А.М., Шестериков С.А.* Сплющивание цилиндрических оболочек при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 113–118.
5. *Локощенко А.М., Шестериков С.А.* Сплющивание цилиндрических оболочек под внешним равнораспределенным давлением в условиях ползучести // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 144–149.
6. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 86–91.
7. *Shesterikov S.A., Yumasheva M.A.* On the non-linear creep flow potential // Creep in Structures. 4th IUTAM Symp. Cracow: Poland. Springer-Verlag, 1991. P. 615–620.
8. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.06.2000