**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2000**

УДК 539.3

© 2000 г. И.Г. ТЕРЕГУЛОВ, С.Н. ТИМЕРГАЛИЕВ

# ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния нелинейно упругих тонких оболочек при достаточно общих условиях их закрепления. Для исследования задачи предлагается метод, в основе которого лежит идея выражения компонент перемещения и деформации через вспомогательные функции, представляющие собой линейные комбинации компонент деформации линейной теории оболочек. При этом линейные комбинации составляются таким образом, чтобы можно было использовать теорию аналитических функций. Такой подход дал возможность получить для перемещений и деформаций такие выражения, которые в конечном итоге позволили исследовать геометрически и физически нелинейную задачу об изгибе непологой анизотропной оболочки и вывести достаточные условия существования хотя бы одного обобщенного решения задачи, непосредственно вытекающего из вариационного принципа Лагранжа. Ранее аналогичный метод применялся для решения задач в случае свободных пологих оболочек [1] и оболочек, жестко защемленных по всему граничному контуру [2]. Отметим, что близкие в идейном отношении методы исследования задач тонких оболочек рассматривались в [3–5].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим следующий вариант нелинейной теории тонких оболочек:

$$\text{(a)}\quad \varepsilon_{11}^{\circ} = w_{1\alpha^1} - G_{11}^k w_k - B_{11} w_3 + \omega_1^2/2 \ (1 \rightleftarrows 2) \tag{1.1}$$

$$2\varepsilon_{12}^{\circ} = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^k w_k - 2B_{12} w_3 + \omega_1\omega_2$$

$$\varepsilon_{11}^1 = -\omega_{1\alpha^1} + G_{11}^k \omega_k (1 \rightleftarrows 2), \qquad 2\varepsilon_{12}^1 = -\omega_{1\alpha^2} - \omega_{2\alpha^1} + 2G_{12}^k \omega_k$$

$$\omega_1 = w_{3\alpha^1} + B_1^k w_k (1 \rightleftarrows 2), \qquad B_i^j = A^{jk} B_{ki}$$

где $A^{jk}$ и $B_{ki}$ – составляющие метрического тензора и тензора кривизны срединной поверхности $S_0$; $\varepsilon_{ij}^0$ и $\varepsilon_{ij}^1$ – компоненты тангенциальной и изгибной деформации $S_0$; $w_k$ и $w_3$ – тангенциальные и нормальное перемещения точек $S_0$; $G_{ij}^k$ – символы Кристоффеля; $\alpha^1, \alpha^2$ – декартовы координаты на плоскости, изменяющиеся в некоторой плоской ограниченной области $\Omega$, гомеоморфной $S_0$, с границей $\Gamma \in C_\alpha^1 (0<\alpha<1)$; предположим, что $G_{ij}^k, B_{ij\alpha^k}$ суть ограниченные функции в $\bar{\Omega}$;

(*в*) определяющие соотношения даются формулами Грина $\sigma^{ij} = \partial u / \partial \varepsilon_{ij}$, которые, опираясь на гипотезы Кирхгофа – Лява, запишем в виде

$$\sigma^{\lambda\mu} = B^{\lambda\mu qs}\gamma_{qs} - \sigma_*^{\lambda\mu} \quad (\lambda, \mu, q, s = 1,2) \tag{1.2}$$

$$B^{\lambda\mu qs} = \partial^2 u / \partial\gamma_{\lambda\mu}\partial\gamma_{qs}\Big|_{\gamma_{ij}=0}, \quad \gamma_{ii} = \varepsilon_{ii}, \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

где $\sigma_*^{\lambda\mu}$ – нелинейная часть $\sigma^{\lambda\mu}$, $u$ – потенциал. В дальнейшем предполагается, что квадратичная форма $B^{\lambda\mu qs}\gamma_{\lambda\mu}\gamma_{qs}$ положительно определена во всем объеме оболочки;

($c$) для задания граничных условий следуя [6, с. 41] возьмем два разбиения граничного контура $\Gamma$ области $\Omega$: $\Gamma = \bigcup\limits_k \Gamma_k = \bigcup\limits_j \Gamma_j (k = \overline{1,4}, \ j = \overline{5,8})$. На $\Gamma_k$ имеем

$$w_3\big|_{\Gamma_1} = w_4\big|_{\Gamma_1} = 0, \quad w_4 = \partial w_3 / \partial m \tag{1.3}$$

$$w_3\big|_{\Gamma_2} = 0, \quad u_*\big|_{\Gamma_2} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_2} k_u^{44} w_4^2 ds \tag{1.4}$$

$$w_4\big|_{\Gamma_3} = 0, \quad u_*\big|_{\Gamma_3} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_3} k_u^{33} w_3^2 ds \tag{1.5}$$

$$u_*\Big|_{\Gamma_4} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_4} k_u^{ij} w_i w_j\Big|_{i,j=3,4} ds$$

Второе разбиение используется для задания тангенциальных условий закрепления оболочки:

$$w_1\big|_{\Gamma_5} = w_2\big|_{\Gamma_5} = 0 \tag{1.6}$$

$$w_m\big|_{\Gamma_6} = 0, \quad u_*\big|_{\Gamma_6} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_\tau^2 ds, \quad w_m = w_k m^k \tag{1.7}$$

$$w_m\big|_{\Gamma_7} = 0, \quad u_*\big|_{\Gamma_7} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m^2 ds, \quad w_\tau = w_\tau \tau^k \tag{1.8}$$

$$u_*\Big|_{\Gamma_8} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i w_j\Big|_{i,j=1,2} ds$$

Здесь $k_u^{ij}, k_p^{ij}, k_p^{mm}, k_p^{\tau\tau}$ – коэффициенты упругости опор, которые считаем ограниченными функциями; сами опоры характеризуются энергией $u_*$, накапливающейся при деформации, $m^k$ и $\tau^k$ – составляющие орта нормали $m$ и орта касательной $\tau$ к $\Gamma$;

($d$) на оболочку действуют массовые $\mathbf{F}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ и поверхностные $\mathbf{F}^{\pm}(\alpha^1, \alpha^2)$ силы

$$\mathbf{F} \in L_2(\overline{\Omega}) \times L_1[-h, h], \quad \mathbf{F}^{\pm} \in L_2(\overline{\Omega}) \tag{1.9}$$

где $2h = \text{const}$ – толщина оболочки.

Предлагаемый метод исследования задачи об изгибе тонкой оболочки в рамках модели (1.1)–(1.9) состоит из следующих основных этапов: вывод основных соотношений для перемещений и деформаций; построение основного пространства $H(\overline{\Omega})$; введение понятия обобщенного решения задачи в $H(\overline{\Omega})$ и сведение его к нелинейному операторному уравнению; исследование разрешимости операторного уравнения в $H(\overline{\Omega})$.

**2. Вывод основных соотношений.** Пусть $D_w(\overline{\Omega})$ есть пространство перемещений $w = (w_1, w_2, w_3)$ класса $w_i, w_{3\alpha^i} \in C_\alpha(\overline{\Omega})$, $w_{i\alpha^j}, w_{3\alpha^i\alpha^j} \in L_p(\overline{\Omega})$, $p > 2$, удовлетворяющих однородным граничным условиям (1.3)–(1.8). Каждому элементу $w \in D_w(\overline{\Omega})$ по формулам

$$\varepsilon_1 = w_{1\alpha^1} - w_{2\alpha^2}, \quad \varepsilon_2 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}, \quad \varepsilon_3 = -w_{3\alpha^1\alpha^1} - w_{3\alpha^2\alpha^2} \tag{2.1}$$

поставим в соответствие вектор-функцию $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Множество таких вектор-функций обозначим через $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$. Далее, пусть $D_\nu(\overline{\Omega})$ есть множество векторов $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ с компонентами вида

$$\nu_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{W_j(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad (j = 1,2) \tag{2.2}$$

$$W_1 = -w_{3\alpha^1} + iw_{3\alpha^2}, \quad W_2 = w_1 + iw_2, \quad z = \alpha^1 + i\alpha^2, \quad w \in D_w(\overline{\Omega})$$

Отметим, что вне Г функции $\nu_j(z)$ являются аналитическими функциями и $\nu_j \in C_\beta(\overline{\Omega})$, $\beta = \min(\alpha,(p-2)/p)$. Очевидно, $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$, $D_\nu(\overline{\Omega})$ суть линейные пространства.

Итак, каждому элементу $w \in D_w(\overline{\Omega})$ по формулам (2.1), (2.2) соответствует пара $a = (\varepsilon, \nu)$ векторов $\varepsilon \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$, $\nu \in D_\nu(\overline{\Omega})$; множество таких пар обозначим через $D_a(\overline{\Omega})$, которое также является линейным пространством. Теперь компоненты вектора $w \in D_w(\overline{\Omega})$ выразим через элементы пространства $D_a(\overline{\Omega})$. С этой целью при помощи комплексных функций $W_j(z)$ $(j = 1, 2)$ соотношения (2.1) представим в комплексной форме

$$W_{j\bar{z}} = f_j/2 \qquad (j = 1, 2) \tag{2.3}$$

$$f_1 = \varepsilon_3, \quad f_2 = \varepsilon_0 = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \quad W_{j\bar{z}} = (W_{j\alpha^1} + iW_{j\alpha^2})/2$$

Используя формулу (6.10) [7, с. 42], из (2.3) получаем

$$W_j(z) = \nu_j(z) + (Tf_j)(z)/2 \quad (j = 1,2) \tag{2.4}$$

$$Tf = -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

Известно [7, с. 39, 46], что $Tf$ есть вполне непрерывный оператор из $L_p(\overline{\Omega})$ в $L_q(\overline{\Omega})(1 \leqslant q \leqslant 2p/(2-p))$, если $1 \leqslant p \leqslant 2$ и из $L_p(\overline{\Omega})$ в $C_{(p-2)/p}(\overline{\Omega})$, если $p > 2$. Кроме этого, можно показать, что $Tf$ – вполне непрерывный оператор из $L_p(\overline{\Omega})$ $(1 < p \leqslant 2)$ в $L_\gamma(\Gamma)$ $(1 < \gamma < p/(2-p))$. Существуют $\partial Tf/d\bar{z}$, $\partial Tf/\partial z$ и

$$\frac{\partial Tf}{d\bar{z}} = f, \quad \frac{\partial Tf}{\partial z} = Sf = -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\xi d\eta \tag{2.5}$$

где интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши. Известно [7, с. 67], что $Sf$ – линейный ограниченный оператор в $L_p(\overline{\Omega})$ $p > 1$.

Через $W_j$ компоненты вектора перемещения $w \in D_w(\overline{\Omega})$ выражаются так

$$w_1 = \operatorname{Re} W_2, \quad w_2 = \operatorname{Jm} W_2, \quad w_3 = -\operatorname{Re}\int_{z_0}^{z} W_1(\zeta)d\zeta \tag{2.6}$$

где $z_0$ – произвольно фиксированная точка $\Gamma_1$. В случае односвязной области $\Omega$ криволинейный интеграл в (2.6) представляет собой однозначную функцию в $\Omega$. Если же $\Omega - n + 1$ – связная область с границей $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n$ ($\Gamma_0$ – внешняя замкнутая кривая), то этот интеграл будет, вообще говоря, многозначной функцией. Тогда для его однозначности необходимо и достаточно [7, с. 253], чтобы выполнялись условия $\operatorname{Re}\int\limits_{\Gamma_j} W_1(z)dz=0 \ (j=\overline{1,n})$.

Поэтому в случае многосвязной области $\Omega$ с самого начала будем считать, что компоненты перемещения удовлетворяют этим условиям.

Найдя при помощи формул (2.5) производные $W_{jz}, W_{j\bar{z}}$, затем через них $w_{i\alpha^j}, w_{3\alpha^i\alpha^j}$ $(i,j=1,2)$ и подставив последние вместо с (2.6) в соотношения (1.1), получим формулы для компонент деформации через $a=(\varepsilon,\nu)\in D_a(\overline{\Omega})$ в виде

$$\gamma^k_{\lambda\mu}(a)=t^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)+\tau^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)+\theta^k_{\lambda\mu}(\nu)+\alpha^k_{\lambda\mu}(\nu)+\varkappa^k_{\lambda\mu}(a) \quad (k=0,1;\lambda,\mu=1,2) \tag{2.7}$$

$$t^\circ_{11}=(\varepsilon_1+\operatorname{Re}S\varepsilon_\circ)/2,\quad t^\circ_{12}=\varepsilon_2,\quad t^\circ_{22}=(\operatorname{Re}S\varepsilon_0-\varepsilon_1)/2$$

$$t^1_{kk}=[\varepsilon_3+(-1)^{k-1}\operatorname{Re}S\varepsilon_3]/2-\operatorname{Re}[B^k_k/2S\varepsilon_0+(-i)^{k-1}\beta_k\varepsilon_0] \quad (k=1,2) \tag{2.8}$$

$$t^1_{12}=\operatorname{Jm}[-S\varepsilon_3-(\beta_1+i\beta_2)\varepsilon_0+(\beta_1-i\beta_2)S\varepsilon_0]$$

$$\tau^\circ_{\lambda\mu}=b_{\lambda\mu}\tilde{T}\varepsilon_3-\operatorname{Re}(g_{\lambda\mu}T\varepsilon_0) \quad (\lambda,\mu=1,2),\quad \tilde{T}\varepsilon_3=-\operatorname{Re}\int\limits_{z_0}^{z}T\varepsilon_3 d\zeta$$

$$\tau^1_{jj}=(-1)^jB^{3-j}_j/2\operatorname{Jm}S\varepsilon_0+\operatorname{Re}[(G^k_{jj}\beta_k-\beta_{j\alpha^j})T\varepsilon_0-\bar{g}_{jj}T\varepsilon_3] \quad (j=1,2) \tag{2.9}$$

$$\tau^1_{12}=\operatorname{Re}[(G^k_{12}\beta_k-(\beta_{1\alpha^2}+\beta_{2\alpha^1}))T\varepsilon_0-\bar{g}_{12}T\varepsilon_3]$$

$$\theta^\circ_{11}=\operatorname{Re}\nu'_2-B_{11}\tilde{\nu}_1-\operatorname{Re}\nu_2,\quad \theta^\circ_{12}=\tilde{\nu}_1,\quad \theta^\circ_{22}=\operatorname{Re}\nu'_2-B_{22}\tilde{\nu}_1$$

$$\theta^1_{11}=\operatorname{Re}[\nu'_1-B^1_1\nu'_2+(G^k_{11}B^1_k-B^1_{1\alpha^1}+i)\nu_2-2g_{11}\nu_1]$$

$$\theta^1_{12}=-2\operatorname{Jm}\nu'_1+2\operatorname{Re}[(2G^k_{12}\beta_k-(\beta_{1\alpha^2}+\beta_{2\alpha^1}))\nu_2-\bar{g}_{12}\nu_1] \tag{2.10}$$

$$\theta^1_{22}=-\operatorname{Re}\nu'_1+2\operatorname{Jm}(\beta_2\nu'_2)+2\operatorname{Re}[(G^k_{22}\beta_k-\beta_{2\alpha^2})\nu_2-\bar{g}_{22}\nu_1]$$

$$\alpha^\circ_{11}=\operatorname{Re}[(1-g_{11})\nu_2],\quad \alpha^\circ_{12}=-(1+2B_{12})\tilde{\nu}_1-\operatorname{Re}(g_{12}\nu_2)$$

$$\alpha^\circ_{22}=-\operatorname{Re}(g_{22}\nu_2),\quad \alpha^1_{11}=(1+B^2_{1\alpha^1}+G^k_{11}B^2_k)\operatorname{Jm}\nu_2-B^2_1\operatorname{Jm}\nu'_2 \tag{2.11}$$

$$\alpha^1_{12}=-2\operatorname{Jm}[(\beta_1-i\beta_2)\nu'_2],\quad \alpha^1_{22}=0,\quad \tilde{\nu}_1=-\operatorname{Re}\int\limits_{z_0}^{z}\nu_1 d\xi$$

$$\varkappa^\circ_{11}=\omega_1^2/2 \quad (1\rightleftarrows 2),\quad \varkappa^\circ_{12}=\omega_1\omega_2,\quad \varkappa^1_{\lambda\mu}=0 \quad (\lambda,\mu=1,2) \tag{2.12}$$

$$\omega_j=\operatorname{Re}(2\beta_j\nu_2-i^{j-1}\nu_1+\beta_jT\varepsilon_0-i^{j-1}T\varepsilon_3/2),\quad \beta_j=(B^1_j-iB^2_j)/2$$

$$g_{jj}=(G^1_{jj}-iG^2_{jj})/2,\quad b_{jj}=-B_{jj} \quad (j=1,2);\quad g_{12}=G^1_{12}-iG^2_{12},\quad b_{12}=-2B_{12}$$

Соотношения (2.7) вместе с (2.6) составляют основу наших исследований и играют такую же роль, какую играют формулы (1.1) при решении задачи в перемещениях. При их помощи с учетом тонкостенности оболочки и формул (1.2) вариацию энергии деформации $U$, накопленной во всем объеме оболочки, и элементарную работу $\delta A$

всех внешних приложенных к облочке сил также выражаем через $a \in D_a(\overline{\Omega})$:

$$\delta U = \iint_\Omega [Q\{t(\varepsilon);t(\delta\varepsilon)\} + Q\{\theta(\nu);\theta(\delta\nu)\} + Q\{e(a);\varkappa_\delta(a;\delta a)\} + \tilde{Q}(a;\delta a) +$$

$$+Q\{\varkappa(a);\gamma_\delta(a;\delta a)\}]Dd\alpha^1 d\alpha^2 - \iint_\Omega [\sigma_1^{\lambda\mu}(a)\gamma^\circ_{\delta,\lambda\mu}(a;\delta a) + \sigma_2^{\lambda\mu}(a)\gamma^1_{\delta,\lambda\mu}(a;\delta a)]Dd\alpha^1 d\alpha^2 \tag{2.13}$$

$$\delta A = \mathrm{Re}\left[\iint_\Omega K(\mathbf{R},\mathbf{L};\delta a)Dd\alpha^1 d\alpha^2 + \int_\Gamma K(\mathbf{P},\mathbf{M};\delta a)ds\right] \tag{2.14}$$

$$\tilde{Q}(a;\delta a) = Q\{t(\varepsilon);\tau(\delta\varepsilon)+\theta(\delta\nu)+\alpha(\delta\nu)\} + Q\{\theta(\delta\nu);t(\delta\varepsilon)+$$

$$+\tau(\delta\varepsilon)+\alpha(\delta\nu)\} + Q(\tau(\varepsilon)+\alpha(\nu);e(\delta a)\} \tag{2.15}$$

$$Q\{\gamma_1;\gamma_2\} = \int_{-h}^{h} B^{\lambda\mu qs}\gamma_{1,\lambda\mu}\gamma_{2,qs}d\alpha^3 = D_p^{\lambda\mu qs}\gamma^\circ_{1,\lambda\mu}\gamma^\circ_{2,qs} + D_*^{\lambda\mu qs}(\gamma^\circ_{1,\lambda\mu}\gamma^1_{2,qs} +$$

$$+\gamma^1_{1,\lambda\mu}\gamma^\circ_{2,qs}) + D_u^{\lambda\mu qs}\gamma^1_{1,\lambda\mu}\gamma^1_{2,qs} \tag{2.16}$$

$$e^k_{\lambda\mu} = t^k_{\lambda\mu} + \tau^k_{\lambda\mu} + \theta^k_{\lambda\mu} + \alpha^k_{\lambda\mu}, \quad \sigma_k^{\lambda\mu} = \int_{-h}^{h} (\alpha^3)^{k-1}\sigma_*^{\lambda\mu}d\alpha^3$$

$$K(\mathbf{R};\mathbf{L};\delta a) = (R^1 - iR^2)(\delta\nu_2 + T\delta\varepsilon_0) - R^3(\delta\tilde{\nu}_1 + \tilde{T}\delta\varepsilon_3) + (L^1 + iL^2)(\delta\nu_1 + T\delta\varepsilon_3)$$

где $Q$ – билинейная форма, порождающая положительно определенную квадратичную форму $Q\{\gamma;\ \gamma\} \equiv Q\{\gamma\}$; $\gamma$ – вектор деформации с компонентами $\gamma_{\lambda\mu} = \gamma^0_{\lambda\mu} + \alpha^3\gamma^1_{\lambda\mu}$; для вариации $\varkappa^k_{\lambda\mu}(a), \gamma^k_{\lambda\mu}(a)$ приняты обозначения $\delta\varkappa^k_{\lambda\mu}(a) \equiv \varkappa^k_{\delta,\lambda\mu}(a;\delta a), \delta\gamma^k_{\lambda\mu}(a) \equiv \gamma^k_{\delta,\lambda\mu}(a;\delta a)$; через $t$, $\tau$, $\theta$, $\alpha$, $\varkappa$, $\gamma_k$, $e$, $\varkappa_\delta$, $\gamma_\delta$ обозначены векторы с одноименными компонентами, имеющие такую же структуру, что и вектор $\gamma$; $\mathbf{R}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$ – известные вектор-функции, зависящие от внешних сил (1.9) и $\mathbf{R}$, $\mathbf{L} \in L_2(\overline{\Omega})$, $\mathbf{P}, \mathbf{M} \in L_2(\Gamma)$.

**3. Построение основного пространства** $H(\overline{\Omega})$. Каждой паре элементов $\varepsilon^j \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$, $\nu^j \in D_\nu(\overline{\Omega})$ $(j = 1,2)$ поставим в соответствие числа

$$(\varepsilon^1,\varepsilon^2)_E = \iint_\Omega Q\{t(\varepsilon^1);\ t(\varepsilon^2)\}Dd\alpha^1 d\alpha^2 \tag{3.1}$$

$$(\nu^1,\nu^2)_N = \iint_\Omega Q\{\theta(\nu^1);\ \theta(\nu^2)\}Dd\alpha^1 d\alpha^2 \tag{3.2}$$

где билинейная форма $Q$ дается формулой (2.16). Покажем, что (3.1), (3.2) удовлетворяют всем условиям скалярного произведения. Предположим, что $(\varepsilon,\ \varepsilon)_E=0$, $(\nu,\ \nu)_N = 0$. В силу положительной определенности квадратичных форм $Q\{t(\varepsilon)\}$, $Q\{\theta(\nu)\}$ имеем $t^k_{\lambda\mu}(\varepsilon) = 0$, $\theta^k_{\lambda\mu}(\nu) = 0$ $(k = 0,1;\ \lambda,\ \mu = 1,2)$. Тогда из формул (2.8), (2.10) легко получаем, что $\varepsilon = \nu = 0$ в $\Omega$. Выполнение остальных условий скалярного произведения очевидно. Замыкание $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$ в норме $\|\varepsilon\|_E = (\varepsilon,\varepsilon)_E^{1/2}$ обозначим через $E(\overline{\Omega})$, а замыкание $D_\nu(\overline{\Omega})$ в норме $\|\nu\|_N = (\nu,\nu)_N^{1/2}$ – через $N(\overline{\Omega})$. Справедлива следующая лемма.

*Лемма* 1. Пусть $G^k_{ij}, B_{ij\alpha^k}, D^{\lambda\mu qs}_{p,*,u}$ ограничены в $\overline{\Omega}$ и область $\Omega$ является соболевской класса (2, 1, 2). Тогда

$$m_\varepsilon \| \varepsilon \|^2_{L_2} \leqslant \| \varepsilon \|^2_E \leqslant M_\varepsilon \| \varepsilon \|^2_{L_2}$$

$$m_\nu \| \nu \|^2_{W^{(1)}_{2\Omega}} \leqslant \| \nu \|^2_N \leqslant M_\nu \| \nu \|^2_{W^{(1)}_{2\Omega}}$$

где $W^{(1)}_{2\Omega}$ – пространство Соболева; $m_\varepsilon$, $M_\varepsilon$, $m_\nu$, $M_\nu$ – положительные постоянные, не зависящие от $\varepsilon$, $\nu$.

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что формулы (2.8) представляют собой невырожденные линейные преобразования переменных $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, $\mathrm{Re}S\varepsilon_0$, $\mathrm{Re}S\varepsilon_3$, $t^1_{12}$. Поэтому квадратичная форма $Q\{t\}$ относительно этих новых переменных также будет положительно определенной в $\Omega$. Следовательно, $Q\{t\} \geqslant c[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + (\mathrm{Re}\,S\varepsilon_0)^2 + (\mathrm{Re}\,S\varepsilon_3)^2 + (t_{12})^2$ (здесь и в дальнейшем буквой $c$ обозначаем положительные постоянные); откуда следует нижняя оценка первой части леммы 1. Верхняя оценка очевидна. Вторая часть леммы 1 доказывается с помощью теоремы 10.8 из [6, с. 81], неравенства Корна [8, с. 16] и теорем вложения для соболевских пространств.

Из леммы 1 следует, что $E(\overline{\Omega})$, $N(\overline{\Omega})$ суть гильбертовы пространства. Кроме того, из теорем вложения для соболевских пространств вытекает следующая теорема вложения для $N(\overline{\Omega})$, которая неоднократно будет использоваться в дальнейшем:

*Теорема* 1. Пусть $\nu \in N(\overline{\Omega})$. Тогда

$$\nu_{i\alpha^j} \in L_2(\overline{\Omega}) \text{ и } \left\| \nu_{i\alpha^j} \right\|_{L_2} \leqslant c\| \nu \|_N$$

$$\nu_j \in L_q(\overline{\Omega}), \quad L_q(\Gamma), \;\; q \geqslant 1 \text{ и } \left\| \nu_j \right\|_{L_q(\overline{\Omega}), L_q(\Gamma)} \leqslant c\| \nu \|_N \;\; (i, j = 1, 2)$$

и оператор вложения $N(\overline{\Omega})$ в $L_q(\overline{\Omega})$ и $L_q(\Gamma)$ усиленно непрерывен.

На $D_a(\overline{\Omega})$ при помощи (3.1), (3.2) зададим скалярное произведение $(a_1, a_2)_H = (\varepsilon^1, \varepsilon^2)_E + (\nu^1, \nu^2)_N$, $a_j = (\varepsilon^j, \nu^j) \in D_a(\overline{\Omega})$ $(j = 1, 2)$. Замыкание $D_a(\overline{\Omega})$ в норме $\| a \|_H = (a, a)^{1/2}_H$ обозначим через $H(\overline{\Omega})$, которое, очевидно, является гильбертовым пространством.

*Лемма* 2. Пусть $a \in H(\overline{\Omega})$. Тогда правые части формул (2.4) имеют смысл и определяют функции $W_j(z) \in L_q(\overline{\Omega})$ $(q \geqslant 1)$, почти всюду удовлетворяющие соотношениям (2.1) и однородным граничным условиям (1.3)–(1.8).

*Доказательство.* Пусть $a = (\varepsilon, \nu) \in H(\overline{\Omega})$, т.е. $\varepsilon \in E(\overline{\Omega})$, $\nu \in N(\overline{\Omega})$. Тогда с учетом леммы 1, теоремы 1 и свойств оператора $Tf$ сразу получаем, что $W_j(z) \in L_q(\overline{\Omega})$ $(q \geqslant 1)$. Далее, пусть последовательность $a_n = (\varepsilon^n, \nu^n) \in D_a(\overline{\Omega})$ такая, что $\| a_n - a \|_H \to 0$, $n \to \infty$. Положим $W_{1,n} = \nu_1^n + T\varepsilon_3^n$, $W_{2,n} = \nu_2^n + T\varepsilon_0^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, которые по формулам (2.6) определяют $w^n = (w_1^n, w_2^n, w_3^n)$, принадлежащие $D_W(\overline{\Omega})$; в силу формул (2.5), теоремы 1 и вышеуказанных свойств операторов $Tf$, $Sf$ имеем

$$\left\| W_j - W_{j,n} \right\|_{W^{(1)}_{2\Omega}} \to 0, \quad \left\| W_j - W_{j,n} \right\|_{L_2(\Gamma)} \to 0, \quad n \to \infty$$

откуда следует утверждение леммы 2.

**4. Введение понятия обобщенного решения задачи и сведение его к линейному операторному уравнению.** Определение. Обобщенным решением краевой задачи (1.1)–(1.9) в пространстве $H(\overline{\Omega})$ назовем вектор-функцию $a \in H(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую интегральному соотношению

$$(a,b)_H = J(b) - \iint_{\Omega}[Q\{e(a);\varkappa_\delta(a;b)\} + Q\{\varkappa(a);\gamma_\delta(a;b)\} + \tilde{Q}(a;b)]Dd\alpha^1 d\alpha^2 +$$
$$+\iint_{\Omega} \sigma_1^{\lambda\mu}(a)\gamma^{\circ}_{\delta,\lambda\mu}(a;b) + \sigma_2^{\lambda\mu}(a)\gamma^1_{\delta,\lambda\mu}(a;b)]Dd\alpha^1 d\alpha^2 - V(a;b) \tag{4.1}$$

$$V(a;b) = \int_{\Gamma_2} k_u^{44} w_4(a)w_4(b)ds + \int_{\Gamma_3} k_u^{33} w_3(a)w_3(b)ds + \int_{\Gamma_4} k_u^{ij} w_i(a)w_j(b)\,|_{i,j=3,4}\, ds +$$
$$+\int_{\Gamma_6} k_p^{\tau\tau} w_\tau(a)w_\tau(b)ds + \int_{\Gamma_7} k_p^{mm} w_m(a)w_m(b)ds + \int_{\Gamma_8} k_p^{ij} w_i(a)w_j(b)\,|_{i,j=1,2}\, ds \tag{4.2}$$

$$J(b) = \mathrm{Re}\left[\iint_{\Omega} K(\mathbf{R},\mathbf{L};b)Dd\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} K(\mathbf{P},\mathbf{M};b)ds\right]$$

для любой вектор-функции $b = (\varphi, \psi) \in H(\overline{\Omega})$.

Отметим, что при введении обобщенного решения (4.1) использовались результаты из [6] и вариационный принцип Лагранжа. Действительно, если принять во внимание соотношения (2.13), (2.14), то легко видеть, что (4.1) выражает принцип Лагранжа $\delta U + \delta U_* = \delta A$, при этом вектор $b = (\varphi, \psi)$ означает вариацию вектора $a = (\varepsilon, \nu)$.

Корректность определения обобщенного решения (4.1) следует из следующей леммы.

*Лемма* 3. Пусть выполнены условия леммы 1, $\sigma_k^{\lambda\mu} \in L_2(\overline{\Omega})$ $(\lambda,\mu,k = 1,2)$ и коэффициенты упругости опор суть произвольные ограниченные функции. Тогда интегралы и функционал $J(b)$ в (4.1), (4.2) имеют смысл при $a$, $b \in H(\overline{\Omega})$ и представляют собой линейные ограниченные функционалы в $H(\overline{\Omega})$ относительно $b$ при фиксированном $a$.

*Доказательство*. Пусть, $a$, $b \in H(\overline{\Omega})$. Тогда используя формулы (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), принимая при этом во внимание свойства операторов $Tf$, $Sf$, лемму 1, теорему 1, получаем следующие оценки:

$$\| t^{\circ}_{\lambda\mu}(\varepsilon_0)\|_{L_2} \leq c\,\|\varepsilon_0\|_{L_2}, \quad \| t^1_{\lambda\mu}(\varepsilon)\|_{L_2}, \quad \|\tau^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)\|_{L_2} \leq c\,\|\varepsilon\|_E$$
$$\|\theta^k_{\lambda\mu}(\nu)\|_{L_2}, \quad \|\alpha^k_{\lambda\mu}(\nu)\|_{L_2} \leq c\,\|\nu\|_N, \quad \|\varkappa^{\circ}_{\lambda\mu}(a)\|_{L_2} \leq c\,\|a\|^2_H \tag{4.3}$$

$$\|\varkappa^{\circ}_{\delta,\lambda\mu}(a;b)\|_{L_2} \leq c\,\|a\|_H \|b\|_H \quad (k = 0,1; \lambda,\mu = 1,2)$$

$$\|w_j(a)\|_{L_2} \leq c(\|\nu\|_N + \|\varepsilon_0\|_{L_2}) \quad (j = 1,2), \quad \|w_k(a)\|_{L_2} \leq c(\|\nu\|_N + \|\varepsilon_3\|_{L_2}) \ (k = 3,4)$$

Теперь, применяя к интегралам в (4.1), (4.2) неравенство Гельдера и учитывая оценки (4.3), сразу получаем утверждение леммы 3.

В силу леммы 3 правая часть соотношения (4.1) представляет собой линейный ограниченный функционал в $H(\overline{\Omega})$ относительно $b$ при фиксированном $a$. Поэтому по теореме Рисса существует элемент $G(a) \in H(\overline{\Omega})$ такой, что правую часть (4.1) можно представить в виде скалярного произведения $(G(a), b)_H$. Тогда в силу произвольности вектора $b$ получаем

$$a - G(a) = 0 \tag{4.4}$$

которое представляет собой нелинейное операторное уравнение в $H(\overline{\Omega})$. Таким образом, задача об изгибе оболочки сведена к решению эквивалентного ей уравнения (4.4).

**5. Исследование разрешимости уравнения (4.4).**

*Лемма* 4. Оператор $G(a)$ представим в виде

$$G(a) = (1-t_0)\tilde{G}(a) + (1-t_0)G_k(a) + G_c(a;t_0) + G_*(a;t_0) + t_0 a$$

$$(\tilde{G}(a), b)_H = -\iint_\Omega \tilde{Q}(a;b) D d\alpha^1 d\alpha^2 \tag{5.1}$$

$$(G_k(a), b)_H = -\iint_\Omega Q\{e(a); \varkappa_\delta(a;b)\} D d\alpha^1 d\alpha^2 \tag{5.2}$$

$$(G_c(a;t_0), b)_H = J(b) - \iint_\Omega (1-t_0) Q\{\varkappa(a); \gamma_\delta(a;b)\} D d\alpha^1 d\alpha^2 - V(a;b) \tag{5.3}$$

$$(G_*(a;t_0), b)_H = \iint_\Omega [\sigma_1^{\lambda\mu}(a)\gamma^{\circ}_{\delta,\lambda\mu}(a;b) + \sigma_2^{\lambda\mu}(a)\gamma^{1}_{\delta,\lambda\mu}(a;b) -$$

$$-t_0 Q\{\gamma(a); \gamma_\delta(a;b)\}] D d\alpha^1 d\alpha^2 \tag{5.4}$$

где $t_0$ – произвольно фиксированный параметр из промежутка $[0, 1)$.

Для доказательства леммы 4 к правой части соотношения (4.1) достаточно прибавить и вычесть величину

$$t_0 \iint_\Omega Q\{\gamma(a); \gamma_\delta(a;b)\} D d\alpha^1 d\alpha^2$$

учесть формулы (2.7) и теорему Рисса.

Опираясь на лемму 4, уравнение (4.4) можно записать в виде

$$(1-t_0)a - (1-t_0)\tilde{G}(a) - G_c(a;t_0) - (1-t_0)G_k(a) - G_*(a;t_0) = 0 \tag{5.5}$$

Видно, что $\tilde{G}$ – линейный, а $G_c$, $G_k$, $G_*$ – нелинейные ограниченные операторы в $H(\overline{\Omega})$. Более того, справедлива теорема.

*Теорема* 2. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда число 1 не является собственным числом оператора $\tilde{G}$; $G_c(a;\, t_0)$ при фиксированном $t_0$ суть вполне непрерывный оператор в $H(\overline{\Omega})$.

*Доказательство*. Предположим, что существует $a_0 \in H(\overline{\Omega})$ такой, что

$$a_0 - \tilde{G}(a_0) = 0 \tag{5.6}$$

Умножая (5.6) скалярно в $H(\overline{\Omega})$ на $a_0$, получим $\|a_0\|_H^2 - (\tilde{G}(a_0), a_0)_H = 0$, которое в силу (2.15), (3.1), (3.2), (5.1) можно записать в виде

$$\iint_\Omega Q\{e(a_0)\} D d\alpha^1 d\alpha^2 = 0$$

откуда следует $e^k_{\lambda\mu}(a_0) = 0$ $(k = 0,1;\ \lambda, \mu = 1, 2)$.

Нетрудно заметить, что $e^k_{\lambda\mu}$ являются компонентами деформации геометрически линейной теории оболочек. Поэтому $w_j(a_0) = 0$ $(j = \overline{1,3})$ в $\overline{\Omega}$. Тогда из формул (2.1), (2.2) следует, что $a_0 = 0$. Первая часть теоремы 2 доказана.

Пусть $a_n, a_0 \in H(\overline{\Omega})$ и $a_n \to a_0$ (слабо) в $H(\overline{\Omega})$, $n \to \infty$. В силу вполне непрерывности оператора $Tf$ и теоремы 1 имеем:

$$\| \overset{\circ}{\varkappa}_{\lambda\mu}(a_n) - \overset{\circ}{\varkappa}_{\lambda\mu}(a_0) \|_{L_q} \to 0, \quad \| w_j(a_n) - w_j(a_0) \|_{L_q(\Gamma)} \to 0, \quad n \to \infty \quad (j = \overline{1,4})$$

Тогда из формулы (5.3) с учетом (4.2), применяя неравенство Гельдера и оценки (4.3), получаем $|(G_c(a_n;t_0) - G_c(a_0;t_0)b)_H| \leqslant C\delta_n \| b \|_H$, где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, откуда следует, что оператор $G_c$ усиленно непрерывен, следовательно, вполне непрерывен в $H(\overline{\Omega})$.

В силу теоремы 2 уравнение (5.5) эквивалентно уравнению

$$(1-t_0)a - (I-\tilde{G})^{-1} G_c(a;t_0) - (1-t_0)(I-\tilde{G})^{-1} G_k(a) - (I-\tilde{G})^{-1} G_*(a;t_0) = 0 \tag{5.7}$$

где $(I - \tilde{G})^{-1}$ – оператор, обратный $(I - \tilde{G})$, который предполагаем ограниченным в $H(\overline{\Omega})$; $I$ – тождественный оператор.

Дальнейшее исследование разрешимости уравнения (5.7) основано на вычислении вращения вполне непрерывного векторного поля $\Phi(a) = (1-t_0)a - (I-\tilde{G})^{-1} G_c(a;t_0)$. Так как $V(a;\, b)$ и $J(b)$ суть линейные ограниченные функционалы в $H(\overline{\Omega})$ относительно $b$, их можем представить в виде $V(a;\, b) = (G_V(a),\, b)_H$, $J(b) = (a_F,\, b)_H$, где $G_V(a)$, $a_F \in H(\overline{\Omega})$ и зависят соответственно от коэффициентов упругости опор и внешних сил. С учетом этого и оценок (4.3) из (5.3) будем иметь: $\| G_c(a;t_0) \|_H \leqslant (1-t_0) q_c (\| a \|_H^3 + \| a \|_H^2) + \| G_V(a) \|_H + \| a_F \|_H$.

Следовательно

$$\| \Phi(a) \|_H \geqslant (1-t_0) \| a \|_H - \delta_0 [(1-t_0) q_c (\| a \|_H^3 + \| a \|_H^2) + \| G_V(a) \|_H + \| a_F \|_H] \tag{5.8}$$

где $\delta_0 = \| (I-\tilde{G})^{-1} \|_H$, $q_c$ – положительная постоянная.

Предположим, что коэффициенты упругости опор таковы, что

$$\| G_V(a) \|_H < (1-t_0)/(4\delta_0) \| a \|_H \tag{5.9}$$

Далее, пусть внешние силы, приложенные к оболочке, удовлетворяют условию

$$\| a_F \|_H < (1-t_0)/(4\delta_0) \| a \|_H \tag{5.10}$$

Тогда с учетом (5.9), (5.10) из (5.8) получаем

$$\| \Phi(a) \|_H \geqslant (1-t_0)/4 \| a \|_H + (1-t_0)[\| a \|_H / 4 - \delta_0 q_c (\| a \|_H^3 + \| a \|_H^2)]$$

Пусть радиус $R$ сферы $\|a\|_H = R$ (обозначим $S_H(R,\, 0)$) удовлетворяет неравенству

$$R^2 + R \leqslant 1/(4\delta_0 q_c) \tag{5.11}$$

Тогда на $S_H(R, 0)$ имеем $\| \Phi(a) \|_H \geqslant (1-t_0)/4R$.

Перейдем к оператору $G_1(a;t_0) = (1-t_0)(I-\tilde{G})^{-1} G_k(a) + (I-\tilde{G})^{-1} G_*(a;t_0)$. Используя оценки (4.3), из (5.2) будем иметь: $\| G_k(a) \|_H \leqslant q_k \| a \|_H^2$, где $q_\varkappa$ – положительная постоянная. Предположим, что радиус $R$ сферы $S_H(R,\, 0)$ кроме (5.11) удовлетворяет еще неравенству

$$R < 1/(8\delta_0 q_k) \tag{5.12}$$

и существует такой параметр $t_0 \in [0,\, 1)$, что для нормы оператора $G_*$, определенного формулой (5.4), справедлива оценка $\|G_*(a;\, t_0)\|_H < (1-t_0)/(8\delta_0)R$ для любого $a \in S_H(R,\, 0)$. Тогда для оператора $G_1(a;\, t_0)$ на $S_H(R,\, 0)$ получаем $\|G_1(a;\, t_0)\|_H < (1 - t_0)/4R$. Следовательно [9, с. 163], уравнение (5.7) внутри сферы $S_H(R,\, 0)$ имеет по крайней мере одно решение $a \in H(\overline{\Omega})$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

*Теорема* 3. Пусть выполнены условия: $G_{ij}^k, B_{ij\alpha^k}, D_{p^*,u}^{\lambda\mu qs}$ – ограничены в $(\overline{\Omega})$ и область $\Omega$ – соболевская класса (2, 1,2); $\sigma_k^{\lambda\mu} \in L_2(\overline{\Omega})$; коэффициенты упругости опор суть ограниченные функции и удовлетворяют условию (5.9); внешние силы, приложенные к оболочке, таковы, что имеет место (5.10). Тогда внутри сферы радиуса $R$, удовлетворяющего условиям (5.11), (5.12), существует по крайней мере одно обобщенное решение задачи (1.1)–(1.9).

В заключение рассмотрим задачу об изгибе оболочки, жестко защемленной по всему краю. Этот частный случай примечателен тем, что в отличие от рассмотренного выше разрешимость задачи для таких оболочек имеет место внутри сферы достаточно большого радиуса без каких-либо ограничений на внешние силы.

Итак, пусть $w_j|_\Gamma = 0$ $(j = \overline{1,4})$. Тогда $v_j(z) = 0$ $(j = 1, 2)$. Следовательно $\theta_{\lambda\mu}^k = \alpha_{\lambda\mu}^k \equiv 0$, $a = \varepsilon$, $b = \varphi$ и $H(\overline{\Omega}) = E(\overline{\Omega})$. Преобразуем уравнение (5.5). С этой целью $\tau_{\lambda\mu}^k$, заданные формулами (2.9), запишем в виде $\tau_{\lambda\mu}^k = \tau_{e\lambda\mu}^k + \tau_{c\lambda\mu}^k$ (в векторной форме $\tau = \tau_e + \tau_c$), где $\tau_{ekk}^1 = -\frac{1}{2}(B_k^{3-k} \cdot \mathrm{Jm}\, S\varepsilon_0)$, остальные $\tau_{eij}^k = 0$; отметим, что $\tau_{e\lambda\mu}^k$ и $\tau_{c\lambda\mu}^k$ представляют собой соответственно ограниченные и вполне непрерывные линейные операторы в $E(\overline{\Omega})$. В соответствии с этим оператор $\tilde{G}(\varepsilon)$ можно представить в виде

$$\tilde{G}(\varepsilon) = \tilde{G}_e(\varepsilon) + \tilde{G}_c(\varepsilon)$$

$$(\tilde{G}_e(\varepsilon), \varphi)_E = -\iint_\Omega \tilde{Q}_e(\varepsilon;\varphi) D d\alpha^1 d\alpha^2, \quad (\tilde{G}_c(\varepsilon), \varphi)_E = -\iint_\Omega \tilde{Q}_c(\varepsilon;\varphi) D d\alpha^1 d\alpha^2$$

где $\tilde{Q}_e$, $\tilde{Q}_c$ получаются из формулы (2.15) путем замены $\tau$ соответственно на $\tau_e$, $\tau_c(\theta = \alpha \equiv 0)$. С учетом изложенного уравнение (5.5) запишется в виде

$$(1-t_0)\varepsilon - K(\varepsilon;t_0) - (1-t_0)\tilde{G}_e(\varepsilon) - G_*(\varepsilon;t_0) = 0 \tag{5.13}$$

$$K(\varepsilon;t_0) = (1-t_0)\tilde{G}_c(\varepsilon) + G_c(\varepsilon;t_0) + (1-t_0)G_k(\varepsilon)$$

*Лемма* 5. Оператор $K(\varepsilon; t_0)$ при фиксированном $t_0 \in [0, 1)$ действует из $E(\overline{\Omega})$ в $E(\overline{\Omega})$ усиленно непрерывно.

Справедливость леммы 5 следует из вполне непрерывности операторов $\tau_{c\lambda\mu}^k$ в $L_2(\overline{\Omega})$ и сопряженных операторов $\tau_{c\lambda\mu}^{k^*}$ относительно гильбертовой метрики $(f,g) = \iint_\Phi fg d\alpha^1 d\alpha^2$ ($f$, $g$ – вещественные функции).

Вычислим вращение вполне непрерывного векторного поля $\Phi(\varepsilon) = (1 - t_0)\varepsilon - K(\varepsilon; t_0)$ на сфере $S_E(R, 0)$ радиуса $R$. Следуя [6, с. 125], сферу $S_E(R, 0)$ разобьем на две части. Пусть $S'_E(R, 0)$ есть подмножество $S_E(R, 0)$, элементы которого удовлетворяют условию

$$J_0(\varepsilon) \equiv (1-t_0)\left[\frac{3}{\delta} d_0^{\lambda\mu qs} \| \tau_{qs}^\circ(\varepsilon) \|_{L_2}^2 1_{\lambda\mu} + \| \tau_{c\lambda\mu}^k(\varepsilon) \|_{L_2} (d_k^{\lambda\mu qs} \| t_{qs}^k(\varepsilon) + \tau_{eqs}^k(\varepsilon) + e_{qs}^k(\varepsilon) \|_{L_2} + \right.$$

$$\left. + d_2^{\lambda\mu qs} \| t_{qs}^{1-k}(\varepsilon) + \tau_{eqs}^{1-k}(\varepsilon) + e_{qs}^{1-k}(\varepsilon) \|_{L_2}) |_{k=0,1} + | V(\varepsilon;\varepsilon) | > (1-t_0)/4R^2 \right. \tag{5.14}$$

$$d_0^{\lambda\mu qs} = \| D_p^{\lambda\mu qs} D \|_C, \quad d_1^{\lambda\mu qs} = \| D_u^{\lambda\mu qs} D \|_C, \quad d_2^{\lambda\mu qs} = \| D_*^{\lambda\mu qs} D \|_C$$

где $\delta$ – некоторая фиксированная положительная постоянная, $V(\varepsilon; \varepsilon)$ дается формулой (4.2), в которой $a = b = \varepsilon$, $v \equiv 0$.

Заметим, что $J_0(\varepsilon)$ суть однородный функционал в $E(\overline{\Omega})$. Через $S''_E(R, 0)$ обозначим множество элементов $\varepsilon \in S_E(R, 0)$, удовлетворяющих неравенству

$$J_0(\varepsilon) \leqslant (1-t_0)/4R^2 \tag{5.15}$$

Пусть $\overline{S'_E(R,0)}$ есть слабое замыкание $S'_E(R, 0)$. Справедлива

*Лемма* 6. Множество $\overline{S'_E(R,0)}$ не содержит нуля.

*Доказательство.* Очевидно, $S'_E(R, 0)$ не содержит нуля. Пусть $\varepsilon^n \in \overline{S'_E(R,0)}$ и $\varepsilon^n \to 0$ (слабо) в $E(\overline{\Omega})$ при $n \to \infty$. В силу непрерывности операторов $\tau^k_{c\lambda\mu}(\varepsilon)$, $Tf$ и ограниченности слабо сходящейся последовательности имеем: $\| \tau^k_{c\lambda\mu}(\varepsilon^n) \|_{L_2}$, $\| w_j(\varepsilon^n) \|_{L_2} \to 0$, $n \to \infty$ и $\| t^k_{\lambda\mu}(\varepsilon^n) \|_{L_2}$, $\| \tau^k_{\lambda\mu}(\varepsilon^n) \|_{L_2} \leqslant c$. Поэтому $J_0(\varepsilon^n) \to 0$, $n \to \infty$ и неравенство (5.14) становится невозможным. Полученное противоречие доказывает лемму 6.

Введем оператор $\varkappa_0(\varepsilon) = [(\mathrm{Re}\, T\varepsilon_3)^2 + (\mathrm{Jm}\, T\varepsilon_3)^2 + \delta_1(\mathrm{Re}\, T\varepsilon_0)^2 + \delta_2(\mathrm{Jm}\, T\varepsilon_3)^2]/4$, $\delta_k = (B_1^k)^2 + (B_2^k)^2 \quad (k = 1, 2)$.

*Лемма* 7. На $S'_E(R, 0)$ справедливо неравенство $\| \varkappa_0(\varepsilon) \|^2_{L_2} \geqslant cR^4$, $c > 0$.

*Доказательство.* В силу однородности $\varkappa_0(\varepsilon)$ и $J_0(\varepsilon)$ достаточно доказать, что на $S'_E(1,0)$ имеет место $\| \varkappa_0(\varepsilon) \|^2_{L_2} \geqslant c > 0$. Пусть существует последовательность $\varepsilon^n \in \overline{S'_E(1,0)}$ такая что $\| \varkappa_0(\varepsilon^n) \|_{L_2} \to 0, \quad n \to \infty$.

Пусть $\varepsilon^n \to \varepsilon^0$ (слабо) в $E(\overline{\Omega})$ при $n \to \infty, \varepsilon^0 \in \overline{S'_E(1,0)}$. Тогда $\varkappa_0(\varepsilon^n) \to \varkappa_0(\varepsilon^0)$ (сильно) в $E(\overline{\Omega})$. Следовательно, $\varkappa_0(\varepsilon^0) = 0$, откуда сразу следует, что $\varepsilon^0 = 0$, что противоречит лемме 6. Лемма 7 доказана.

Введем функционал $\Psi(\varepsilon; \mu) = ((1 - t_0)\varepsilon - \mu K(\varepsilon; t_0), \varepsilon)_E$, определенный на$(\overline{\Omega})$. Используя положительную определенность квадратичной формы $Q\{\varkappa(\varepsilon)\}$, легко получаемую для нее оценку $Q\{k\} \geqslant c[\varkappa_0^2(\varepsilon) - c\,|\varkappa_0(\varepsilon)|\,(|T\varepsilon_0|^2 + |T\varepsilon_3|\,|T\varepsilon_0|)]$, формулу $\varkappa_\delta(\varepsilon; \varepsilon) = 2\varkappa(\varepsilon)$, соотношения (5.2), (5.3), в которых $a = b = \varepsilon$, оценки (4.3) и лемму 7, на $S'_E(R, 0)$ будем иметь

$$\Psi(\varepsilon;\mu) \geqslant (1-t_0)R^2 + c\mu[(1-t_0)R^4 - c(1 + \| \varepsilon_0 \|_{L_2})R^3 - cR^2 - \| \varepsilon_F \|_E\, R],\ c > 0$$

Отсюда видно, что при произвольно фиксированном $\| \varepsilon_0 \|_{L_2}$ радиус $R$ можем взять настолько большим, что выражение в квадратных скобках будет неотрицательным. Следовательно, на $S'_E(R, 0)$ получаем $\Psi(\varepsilon; \mu) \geqslant (1 - t_0)R^2$ для любого $\mu \in [0, 1]$.

Предположим, что для $\varepsilon \in S''_E(R, 0)$ выполняется условие

$$\iint_\Omega [Q\{\varkappa(\varepsilon)\} + 3D_*^{\lambda\mu qs} e^1_{\lambda\mu}(\varepsilon) \overset{\circ}{\varkappa}_{qs}(\varepsilon)] D d\alpha^1 d\alpha^2 \geqslant 0 \tag{5.16}$$

Используя неравенство Коши

$$|fg| \leqslant \frac{\delta}{2}|f|^2 + \frac{1}{2\delta}|g|^2$$

которое справедливо для любой постоянной $\delta > 0$, для любых функций $f$, $g$, с учетом условия (5.16) на $S''_E(R,0)$ получаем

$$\Psi(\varepsilon;\mu) \geqslant (1-t_0)R^2 + \left[ \iint_\Omega Q\{\varkappa(\varepsilon)\} D d\alpha^1 \alpha^2 - \frac{3\delta}{2} d_0^{\lambda\mu qs} \left\| \overset{\circ}{\varkappa}_{\lambda\mu}(\varepsilon) \right\|^2_{L_2} 1_{qs} \right] -$$
$$- \left\{ J_0(\varepsilon) + \frac{3(1-t_0)}{\delta} d_0^{\lambda\mu qs} \left\| \overset{\circ}{t}_{qs}(\varepsilon_0) \right\|^2_{L_2} 1_{\lambda\mu} + \| \varepsilon_F \|_E\, R \right\} \tag{5.17}$$

Поскольку $Q\{\varkappa(\varepsilon)\}$ есть положительно определенная квадратичная форма переменных $\varkappa^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)$, постоянную $\delta > 0$ можем выбрать столь малой, что выражение в квадратных скобках в (5.17) будет неотрицательным. Выбрав $\delta$ таким образом, из (5.17) с учетом условия (5.15) и оценки для $\| t^{\circ}_{\lambda\mu}(\varepsilon_0) \|_{L_2}$ из (4.3), будем иметь

$$\Psi(\varepsilon;\mu) \geqslant \left(\frac{1-t_0}{2}\right)R^2 + \left[\left(\frac{1-t_0}{4}\right)R^2 - \left(\frac{1-t_0}{\delta}\right)c \| \varepsilon_0 \|^2_{L_2} - \| \varepsilon_F \|_E R\right]$$

откуда при произвольно фиксированном $\|\varepsilon_0\|_{L_2}$ и при достаточно больших $R$ следует $\Psi(\varepsilon;\mu) \geqslant \frac{1}{2}(1-t_0)R^2$ для любого $\mu \in [0, 1]$. Таким образом, доказана следующая лемма.

*Лемма* 8. Пусть выполнено условие (5.16). Тогда на сферах $S_E(R, 0)$ достаточно большого радиуса $R$ справедливо неравенство $\Psi(\varepsilon;\mu) \geqslant \frac{1}{2}(1-t_0)R^2, \quad \mu \in [0,1]$.

Из леммы 8 следует, что вращение векторного поля $\Phi(\varepsilon)$ на $S_E(R, 0)$ достаточно большого радиуса $R$ равно +1.

Перейдем к оператору $\tilde{G}_e(\varepsilon)$. Используя оценки (4.3) и известное неравенство $\| Sf \|_{L_2} \leqslant \| f \|_{L_2}$ [7, с. 66] для нормы оператора $Sf$, получаем

$$\| \tilde{G}_e(\varepsilon) \|_E \leqslant$$
$$\leqslant (d_1^{\lambda\mu kk} c_{\lambda\mu} + d_2^{\lambda\mu kk} 1_{\lambda\mu} + d_1^{jjkk} \| B_j^{3-j} \|_C|_{j=1,2} / 4) \| B_k^{3-k} \|_C|_{k=1,2} / m_\varepsilon \| \varepsilon \|_E \equiv \tilde{q}_e \| \varepsilon \|_E$$

$$c_{11} = 1 + \| B_1^1 \|_C + \| B_1^2 \|_C / 2 \quad (1 \rightleftarrows 2), \qquad c_{12} = 1 + \| \beta_1 + i\beta_2 \|_C + | \beta_1 - i\beta_2 \|_C$$

где постоянная $m_\varepsilon$ определена леммой 1.

Предположим, что выполняется условие $\tilde{q}_e < 1/4$. Следует отметить, что если срединная поверхность $S_0$ отнесена к линиям кривизны, то $\tilde{q}_e = 0$, т.е. в этом случае $\tilde{G}_e(\varepsilon) \equiv 0$. Далее, пусть существует параметр $t_0 \in [0, 1)$ такой, что имеет место $\|G_*(\varepsilon;t_0)\|_E < \frac{1}{4}(1-t_0)R$ для любой вектор-функции $\varepsilon$, принадлежащей $S_E(R, 0)$. Тогда на $S_E(R, 0)$ имеем

$$\|(1-t_0)\tilde{G}_e(\varepsilon) + G_*(\varepsilon;t_0)\|_E < \frac{1}{2}(1-t_0)R$$

и следовательно, уравнение (5.13) внутри сферы $S_E(R, 0)$ достаточно большого радиуса $R$ имеет по крайней мере одно решение $\varepsilon \in E(\overline{\Omega})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00518).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терегулов И.Г., Тимергалиев С.Н.* О существовании решения одной задачи нелинейной теории пологих оболочек // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 3. С. 21–29.
2. *Тимергалиев С.Н.* Об одном методе доказательства разрешимости задачи нелинейной теории пологих оболочек // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 34. № 10. С. 1412–1419.
3. *Черных К.Ф.* О сопряженных задачах теории тонких оболочек // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117. № 6. С. 949–951.

4. *Михайловский Е.И., Черных К.Ф.* О некоторых особенностях деформационного варианта граничных величин // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 155–162.
5. *Галимов К.З.* О формулировке геометрических граничных условий нелинейной теории оболочек в усилиях и моментах // Изв. КФАН СССР. Сер. физ.-мат. наук. 1958. Т. 12. С. 17–27.
6. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 376 с.
7. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
8. Математическая энциклопедия. Т. 3. М.: Советская энциклопедия, 1982. 1184 стб.
9. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956. 392 с.

Казань, Наб. Челны

Поступила в редакцию
15.02.1999