

УДК 539.3

© 2000 г. Г.А. ВАНИН

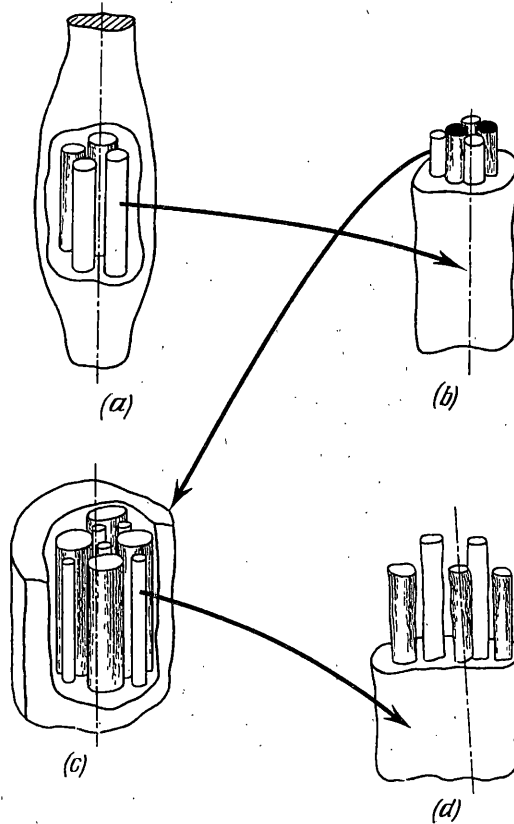
## УПРУГОСТЬ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С ИЕРАРХИЕЙ СТРУКТУРЫ

Классическая теория упругости является инструментом в познании напряженного состояния элементов конструкций, когда абстрагируются от реального строения материалов. Между тем усовершенствование их структуры на различных масштабных уровнях, которые осуществляются с помощью микро- и нанотехнологии, представляют широкие возможности для повышения показателей физико-механических и прочностных характеристик материалов и параметров конструкций. Поэтому актуальна задача о построении моделей и соотношений механики сред с учетом иерархии их структуры для исследования взаимодействия между разномасштабными составляющими компонентами материалов.

Попытки расширить область приложений теории упругости и учесть влияние неоднородного строения тел на их состояние в рамках классических концепций механики сплошных сред привели к созданию моментных, несимметричных, микрополярных и других теорий [1–5]. Эти разработки продолжают до сих пор [6, 7], но пока остались не преодолимыми трудности в определении упругих констант и другие.

Цель настоящего исследования – разработка теории неоднородных сред с учетом нецентрального взаимодействия и создание на ее основе уточненных методов исследования напряженного состояния элементов конструкций с учетом тонкой структуры материалов, решение задач о теоретическом синтезе, прогнозировании физико-механических характеристик и оптимизации строения и состава материалов, о распространении в них коротких волн, о построении теории разрушения тел с учетом их неоднородного строения, включая микротрещины, а также обобщение ее на родственные задачи.

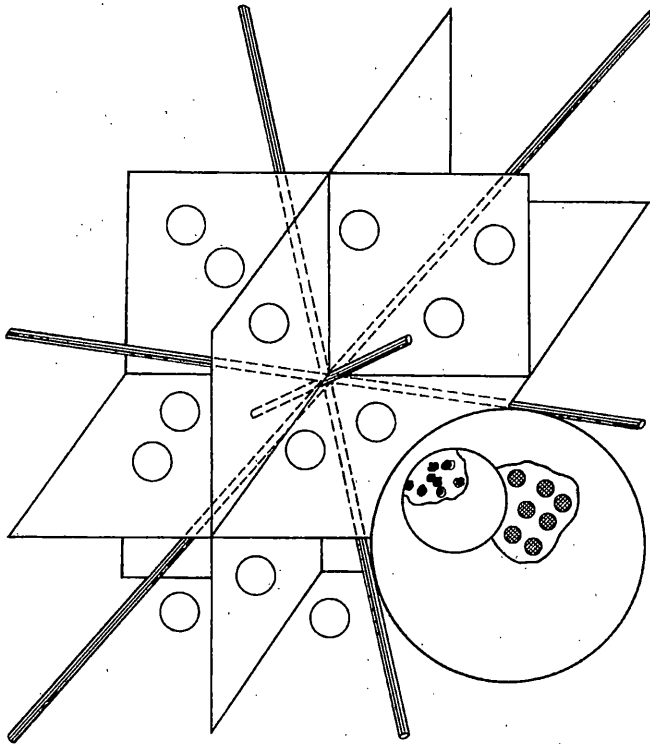
1. Рассматриваются среды с лестничной иерархией структуры, образованной последовательностью множеств одинаковых или близких по своим размерам элементов неоднородности. Смежные элементы последовательности отличаются своими габаритными размерами и свойствами. В качестве примеров сред с подобной иерархией структуры могут служить суперсплавы, биоконпозиты, армированные полимерцементбетоны и другие материалы. В ряде последних работ [8, 9] подобные системы моделируются без учета нецентрального взаимодействия между компонентами и вводятся другие упрощения. Подобные методы содержат погрешности в исходных соотношениях, которые при переходе от одного уровня к другому накапливаются. Упрочнение в суперсплавах достигается как при образовании одной системы, например NiAl или TiAl, так и при возникновении других фаз: Ni<sub>3</sub>Al, Ti<sub>3</sub>Al, обладающих более упорядоченной структурой [10]. Более явственно иерархическое упрочнение реализуется в композитах. В биоконпозите (скелетной мышце) насчитывается четыре масштабных уровня, образующих иерархию ее структуры (фиг. 1). Здесь упрочнение сочетается с физиологическим назначением элементов структуры. Мышца состоит из волокон диаметром 15–100 микрон (фиг. 1, а), окруженных соединительной тканью, состоящей из коллагеновых и эластичных волокон. Строение отдельного волокна (фиг. 1, в) включает фибриллы диаметром 0,3–0,5 микрон, окруженные мембранной тканью.



Фиг. 1

Если рассмотреть элементарную фибрилу (фиг. 1, *c*), то она состоит из размещенных в узлах гексагональной сетки регулярно чередующихся волокон двух диаметров: 0,08 и 0,04 микрон. Последний однотипный уровень (фиг. 1, *d*) образован макромолекулами диаметром в тысячные доли микрон, взаимодействие которых обеспечивает функционирование мышцы. В армированном полимерцементбетоне (фиг. 2) наряду с арматурой в матрицу внедрены крупные включения (щебень), а также включения на более высоком масштабном уровне (песок). На последующей ступени иерархии структуры находится система полимер – цемент. Еще более разнообразное строение наблюдается в синтетических компонентах материалов. В частности, элементарные волокна из углерода могут быть в виде полых или заполненных трубок диаметром 50 Å и иметь длину, на 4–5 порядков превышающую диаметр. Учитывая, что число возможных конфигураций иерархии структуры необозримо, для изготовления материалов с требуемыми свойствами необходимы прогноз физико-механических характеристик и оптимизация их состава и строения на нескольких масштабных уровнях.

Состояние среды с иерархией структуры определим как сумму взаимодействия множества элементов структуры на каждом масштабном уровне с усредненными состояниями предыдущего уровня. Для определения усредненных состояний выделим последовательность масштабных объемов, характеризующих типовое строение и состав каждого уровня. Если структура выделенного уровня периодическая, то ее периоды определяют указанный объем. В композитах при известной технологии изготовления и компоновки состава установление масштабного объема не вызывает затруднений. В сплавах, керамике и других материалах для установления масштабного объема необходимо исследование характеристик от размеров объема. Схема последовательности



Фиг. 2

масштабных объемов (на плоскости) в виде параллелограммов периодов изображена на фиг. 3, где стрелками указана очередность процессов усреднения состояний, начиная от высшего масштабного уровня. Заштрихованная область в центре определяет объем, в котором абстрагируются от строения тела. Локальные параметры состояния на каждом уровне связаны с параметрами, усредненными на этом уровне, и остаются неопределенными. Только после решения краевой задачи на основном, наиболее низком масштабном уровне устанавливается связь усредненных и локальных параметров с внешними нагрузками.

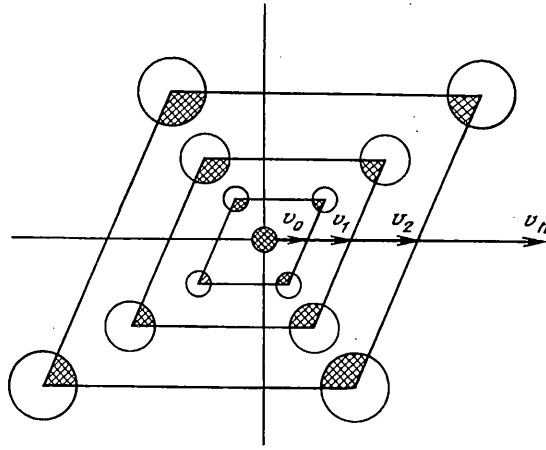
2. Рассмотрим задачу о продольном сдвиге напряжениями  $\sigma_{12}, \sigma_{13}$  волокнистого материала с  $n$ -уровневой иерархией структуры, когда каждый из них образован волокнами, диаметр которых меняется с каждым уровнем. Однородные одинаковые волокна на первом уровне назовем  $\alpha$ -фазой, на втором уровне —  $\beta$ -фазой и т.д. В дальнейшем индексами  $\alpha, \beta, \dots$  отмечаются величины, относящиеся к волокнам, без индексов — к матрице или ко всем компонентам одновременно. Центры  $\alpha$ -фазы размещены в узлах гексагональной решетки с периодами  $\omega_2 = \omega_\alpha, \omega_3 = \omega_\alpha e^{\pi i/3}$ , для  $\beta$ -фазы соответственно  $\omega_2 = \omega_\beta, \omega_3 = \omega_\beta e^{\pi i/3}$  при условии  $\omega_\beta \gg \omega_\alpha$ . Волокна наибольшего диаметра образуют наинизший масштабный уровень. Напряжения сдвига в масштабном объеме в  $N$ - $M$ -приближении нецентрального взаимодействия будут [11]:

$$\tau = \sigma_{12} - i\sigma_{13} = \tau^\circ - 2\partial V / \partial z, \quad \tau^\circ = \sigma_{12}^\circ - i\sigma_{13}^\circ$$

$$V = \sum_{n=1}^N V_n, \quad V_n = -\frac{z}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^N \frac{(z\partial)^{n-k} (\bar{z}\bar{\partial})^k}{(n-k+1)!k!} \tau \quad (2.1)$$

$$z = x_2 + ix_3, \quad \partial = \partial / \partial x_2 - i\partial / \partial x_3, \quad \partial \tau = \sigma_{12}^1 - \sigma_{13}^{01} - i(\sigma_{13}^1 + \sigma_{12}^{01})$$

где  $\tau^\circ$  — напряжения центрального взаимодействия.



Фиг. 3

Функции напряжений, учитывающие разделение состояний, найдены в виде

$$\tau = 2G \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \Psi = \sum_{k=1}^N \Psi_k, \quad \Psi_k = \varphi_k(z) - V_k / G \quad (2.2)$$

Функции смещений

$$u_1 = \sum_{n=0}^N u_n, \quad u_n = \varphi_n(z) + \overline{\varphi_n(z)} - (V_n + \overline{V_n}) / G, \quad V_0 = 0 \quad (2.3)$$

Гармонические функции  $\varphi_n(z)$  находятся из краевых условий

$$z \in l + P_\alpha, \quad P_\alpha = m\omega_\alpha + n\omega_\alpha e^{\pi i/3} \quad (m, n = 0, \pm 1, \dots) \quad (2.4)$$

Эффективные параметры состояния масштабного объема, ограниченного контуром  $\Gamma_\alpha$ , определены соотношением [11]

$$\hat{\sigma}_{1k} \hat{\gamma}_{1k} + m_{ik} \kappa_{ik} = \frac{1}{F_\alpha} \oint_{\Gamma_\alpha} u_1 (\sigma_{12} dx_3 - \sigma_{13} dx_2), \quad \kappa_{ik} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x_i \partial x_k} \right\rangle \quad (2.5)$$

где  $m_{ik}$  – соответствующие  $\kappa_{ik}$  усредненные компоненты градиентного состояния,  $F_\alpha = \omega_\alpha^2 \sin \pi/3$ . Гармонические функции найдены в рядах

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= Cz + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} C_k \zeta^{(k-1)}(z) \\ \zeta(z) &= \frac{1}{2} + \sum_{m,n} \left( \frac{1}{z - P_\alpha} + \frac{1}{P_\alpha} + \frac{z}{P_\alpha^2} \right) \\ \varphi_\alpha(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\xi^{(k)}(z)$  –  $k$ -я производная дзета-функции Вейерштрасса [12]. С помощью эллиптических функций точно удовлетворены краевые условия совершенного контакта на всех волокнах при центральном взаимодействии объемов. Градиентные напряжения

при удалении от границ волокон быстро затухают, поэтому погрешность неучета взаимодействия между градиентными состояниями в смежных объемах всегда мала. Усредненные градиентные состояния найдены согласно выражениям

$$\begin{pmatrix} m_{20} \\ m_{02} \end{pmatrix} = 2j_2(1 + \zeta_\alpha v_\alpha) \begin{pmatrix} \sigma_{12}^1 \\ \sigma_{13}^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \kappa_{20} \\ \kappa_{02} \end{pmatrix} = \frac{1 - \zeta_\alpha v_\alpha}{2G} \begin{pmatrix} \sigma_{12}^1 \\ \sigma_{13}^0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} \\ \kappa_{11} \end{pmatrix} = (\sigma_{13}^1 + \sigma_{12}^0) \begin{pmatrix} j_2(1 + \zeta_\alpha v_\alpha) \\ (1 - \zeta_\alpha v_\alpha)(4G)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$j_2 = \frac{1}{F_\alpha F_\infty} \int x_2^2 dF$$

$$v_\alpha = \zeta_\alpha(1 - G/G_\alpha)(1 + G/G_\alpha)^{-1}$$

Уравнения состояния, связывающие параметры, найдены в виде

$$\begin{aligned} m_{20} &= 2j_2 G_1 \partial^2 u / \partial x_2^2, & m_{02} &= 2j_2 G_1 \partial^2 u_1 / \partial x_3^2 \\ m_{11} &= 2j_2 G_{11} \partial^2 u / \partial x_2 \partial x_3 \\ G_k &= G(1 + \zeta_\alpha^k v_\alpha)(1 - \zeta_\alpha^k v_\alpha)^{-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Разрешающая функция во втором приближении удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 u - \mu_1 \nabla^2 \nabla^2 u + \mu_2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 u - \dots = 0 \quad (2.9)$$

$$\mu_1 = j_2 G_1 / G_{02}, \quad \mu_2 = 4j_{22} G_2 / G_0 [3(1 - \lambda/3)]^2, \quad \lambda^2 = 3$$

Второе приближение распадается на два варианта  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ . Учет более высоких, мультиградиентных состояний осуществляется аналогично и приводит к добавлению к (2.9) членов более высокого порядка. Решение (2.9) найдено в виде суммы функций

$$\bar{u} = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} + \sum_k \psi_k \quad (2.10)$$

$$\nabla^2 \varphi(z) = 0, \quad \nabla^2 \psi_k - \kappa_k^2 \psi_k = 0, \quad \kappa_{1,2}^2 = \frac{\mu_1}{2\mu_2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4\mu_2 \mu_1^{-2}} \right)$$

Состояние среды на втором масштабном уровне, образованном следующим множеством периодически расположенных волокон, строится из решений

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= dz + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s-1)!} d_s \zeta^{(s-1)}(z) \\ \zeta(z) &= \frac{1}{2} + \sum_{m,n} \left( \frac{1}{z - P_\beta} + \frac{1}{P_\beta} + \frac{z}{P_\beta^2} \right) \\ \psi_k &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ K_n(\kappa_k r) \begin{pmatrix} C_n \cos n\theta \\ s_n \sin n\theta \end{pmatrix} - I_n(\kappa_k r) \begin{pmatrix} a_n \cos n\theta \\ b_n \sin n\theta \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Число и состав краевых условий на каждом уровне определено числом членов, удерживаемых в формуле (2.1). Приведем естественные граничные условия, сохраняя

первые члены разложения

$$\begin{aligned}
 T_{1k} \hat{\gamma}_{1k} + \hat{m}_{ik} \hat{x}_{ik} &= \frac{1}{F} \oint_{\Gamma} [u T_n + \gamma_{12} (M_n \cos \theta - M_t \sin \theta) + \\
 &+ \gamma_{13} (M_n \sin \theta - M_t \cos \theta)] ds \\
 T_n &= -i G_0 d / ds [\varphi(z) - \overline{\varphi(z)}] - G_0 \partial \Psi / \partial n \\
 M_n - i M_t &= j_2 G_1 [2e^{2i\theta} \varphi''(z) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{i}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}]
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Условия совершенного контакта компонентов сводятся к уравнениям  $u^+ = u^-$ ,  $T_n^+ = T_n^-$ ,  $M_n^+ = M_n^-$ ,  $M_t^+ = M_t^-$ . Последние соотношения эквивалентны системе

$$\begin{aligned}
 \left( 1 + \frac{G_\beta}{G_0} \right) \varphi_\beta(z) + \left( 1 - \frac{G_\beta}{G_0} \right) \overline{\varphi_\beta(z)} &= 2\varphi_0(z) + \psi_0 - \psi_\beta \\
 \left[ 2e^{2i\theta} \varphi_\beta''(z) + \frac{\partial^2 \psi_\beta}{\partial r^2} - \frac{i}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \psi_\beta}{\partial \theta} \right] \frac{G_\beta}{G_0} &= \\
 = 2e^{2i\theta} \varphi_0''(z) + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} - \frac{i}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Напряженное состояние на втором уровне иерархии структуры дополняется градиентными напряжениями взаимодействия между  $\beta$ -фазой и усредненным состоянием первого уровня

$$\begin{aligned}
 \tau &= 2G \partial \Psi / \partial z, \quad \Psi = \Sigma \Psi_n, \quad \Psi_n = \varphi_n(z) + \psi_n - V_n / G \\
 u_n &= \varphi_n(z) + \overline{\varphi_n(z)} + \psi_n - (V_n + \overline{V_n}) / G_0
 \end{aligned}$$

Разрешающие функции для второго уровня иерархии определяются уравнением вида (2.9), в котором параметры  $\mu_1$  и  $\mu_2$  заменены на соответствующие рассматриваемому уровню. Подобные изменения касаются и краевых условий.

Таким образом, состояние на всех  $n$  уровнях иерархии структуры среды образуют  $n$  раз статически неопределимую систему, раскрытие которой устанавливается после решения краевой задачи для тела на наименьшем масштабном уровне.

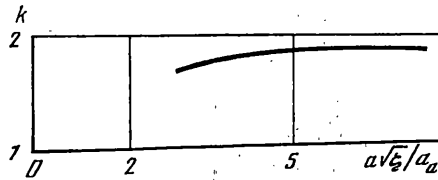
3. Для оценки влияния на напряженное состояние градиентных эффектов, обусловленных тонкой структурой материала, рассмотрены конкретные среды. Краевые эффекты в одноуровневой среде вблизи круговой полости вдоль волокон определены решениями (2.10) при краевых условиях

$$T_n - \partial M_t / \partial s = 0, \quad M_n = 0 \tag{3.1}$$

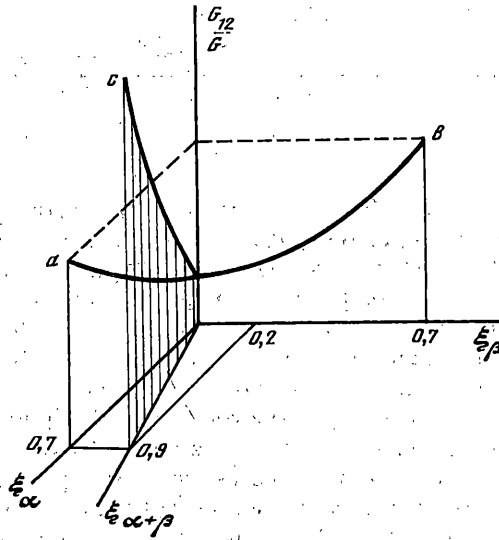
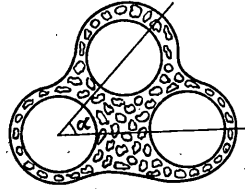
Анализ найденных решений приводит к выводам:

(а) вопреки ранее сделанным прогнозам [4] наибольшие влияния градиентные эффекты оказываются в средах, армированных волокнами с низкой (нулевой) жесткостью на сдвиг;

(б) коэффициент концентрации напряжений на контуре отверстия  $k$  вследствие градиентных напряжений снижается на 20%. Эта величина зависит от параметра  $a\sqrt{\xi} / a_a$ ,  $a$  и  $a_a$  – радиусы отверстия и элементарного волокна. Кривая этой зависимости приведена на фиг. 4, где  $k = 2$  соответствует безградиентному состоянию однородной среды;



Фиг. 4



Фиг. 5

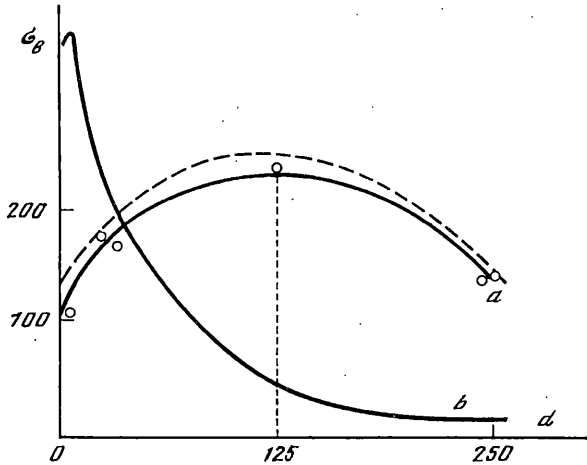
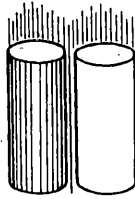
(с) приближенное значение модуля сдвига композита с двухуровневой иерархией структуры определено формулой

$$G_{12} = G_0 \frac{1 + \zeta_\beta + (1 - \zeta_\beta - \Omega)G_0 / G_\beta}{1 - \zeta_\beta + (1 + \zeta_\beta - \Omega)G_0 / G_\beta}$$

$$G_0 = G \frac{1 + \zeta_\alpha + (1 - \zeta_\alpha)G / G_\alpha}{1 - \zeta_\alpha + (1 + \zeta_\alpha)G / G_\alpha}$$

$$\Omega = 2[\kappa^2 a^2 (I_1'' - K_1' I_1 / K_1)^{-1}] [(1 - G_\beta / G_0) I_1 - \kappa K_1' I_1 / K_1 + \kappa_\beta a I_1' G_0 / G_\beta] \quad (3.2)$$

$$I_1 = I_1(\kappa a), \quad K_1 = K_1(\kappa a), \quad \kappa^2 = G_0 (j_2 G_1)^{-1}$$



Фиг. 6

В этой формуле случай  $\Omega = 0$  соответствует безградиентному состоянию, когда модуль композита определен только модулями матрицы и волокон, а также их объемным содержанием. В материалах со смешанными волокнами разных диаметров возможно повышение жесткости материала. Упрочнение композита волокнами одного диаметра повышает его жесткость согласно кривым  $a, b$  на фиг. 5. При введении в материал ультратонких волокон в пространство между волокнами большего диаметра достигается повышенная жесткость материала вследствие роста объемного содержания волокон и градиентных эффектов (кривая  $c$ , фиг. 5). Применение в композитах разномасштабных волокон приводит к образованию суперкомпозитов, обладающих повышенными, как показывают расчеты, механическими характеристиками благодаря использованию масштабного фактора. В частности, для линейно-армированного композита, упрочненного волокнами одного диаметра, экспериментальная кривая зависимости прочности от диаметра волокон при сжатии вдоль волокон имеет явно выраженный максимум (фиг. 6, сплошная кривая  $a$ ). Прочность элементарных волокон на разрыв в зависимости от диаметра характеризуется на фиг. 6 кривой  $b$ , максимум которой не совпадает с кривой  $a$ . Матрица, упрочненная ультратонкими волокнами, повышает прочность материала на сжатие, что иллюстрируется штриховой кривой.

4. В качестве другого примера рассмотрена задача о распространении коротких волн, длина которых в 2–5 раз превышает расстояние между волокнами одного уровня. На первом масштабном уровне пренебрегаем дифракционными явлениями. Сохраняя в разложении энергии члены равного порядка и учитывая симметрию структуры, на основании вариационного принципа Гамильтона найдено уравнение

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n [\mu_n \nabla^{2+2n} u - j_{2n} \nu_n^{-2} (n!)^{-2} \nabla^{2n} \ddot{u}] = 0 \quad (4.1)$$

$$j_{2n} = \frac{1}{F} \int_F x^{2n} dF, \quad \nu_n^2 = G_{12} \gamma_{n+1}^{-1}, \quad \gamma_n = \gamma_a \zeta^n + \gamma(1 - \zeta^n), \quad \mu_0 = 1$$



При распространении плоских волн в неограниченной среде решение найдено в виде

$$u = u_0 \exp[i(k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t)] \quad (4.2)$$

$$\sum_{n=0}^N k^{2n} [\mu_n k^2 - j_{2n} \nu_n^{-2} (n!)^{-2} \omega^2] = 0, \quad k^2 = k_2^2 + k_3^2$$

Сохраняя только первый член (4.2), получаем известное решение  $k^2 - \omega^2 \nu_0^{-2} = 0$ . Уточненное решение в первом приближении  $k^2 (\mu_1 k^2 - \omega^2 j_{21} \nu_1^{-2}) + k^2 - \omega^2 \nu_0^{-2} = 0$ . Сохраняя значения  $k$ , соответствующие высоким частотам и незатухающим волнам  $1 - \omega^2 j_{21} \nu_1^{-2} > 0$ , получим

$$k^2 = (1 - \omega^2 j_{21} \nu_1^{-2}) (4 j_{21} G_{12}^1 / G_{12})^{-1} \{-1 + [1 + 8 \omega^2 j_{21} \nu_0^{-2} G_{12}^1 / G_{12} (1 - \omega^2 j_{21} \nu_1^{-2})^{-2}]^{1/2}\} \quad (4.3)$$

Расчеты показывают, что наибольшее влияние градиентного состояния наблюдается в случае пористой среды  $G_a \rightarrow 0$ ,  $\gamma_a \rightarrow 0$ . Рассмотрены волны в полимерной среде без затухания с характеристиками  $\zeta = 0,65$ ,  $G/\gamma = 1,1183 \cdot 10^6$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>. Согласно расчетам, учет градиентного состояния в среде с одноуровневой структурой приводит к росту длины волны по сравнению с данными классической теории. Для рассматриваемого материала при частоте  $\omega = 10^7$  с<sup>-1</sup> длина волны по сравнению с классической увеличивается на 0,15%. При частоте  $\omega = 5 \cdot 10^7$  с<sup>-1</sup> длина волны превышает классическую уже на 15%. Дальнейшее уточнение результатов связано с учетом большего числа членов в уравнении (4.1) и диффракционных явлений, так как длина волны становится сопоставимой с габаритными размерами масштабного объема. Построено решение задачи о распространении волн в среде с двухуровневой иерархией структуры [14]. Установлены следующие предельные случаи распространения волн с ростом частоты: а) низкочастотные волны (двухуровневое длинноволновое приближение) характеризуются скоростью, зависящей от интегральных параметров – модуля упругости и плотности; б) длинные волны для первого масштабного уровня с учетом диффракционного рассеяния на волокнах второго уровня; в) волновые явления с учетом градиентного состояния на первом уровне и дифракции волн на втором уровне; д) волны, зависящие от градиентных состояний на двух масштабных уровнях и диффракционных явлений на втором масштабном уровне; е) коротковолновые явления с учетом градиентных и диффракционных полей на обоих уровнях. Анализ случая в) при  $\omega > 10^7$  с<sup>-1</sup>, когда учитывается взаимодействие диффракционных полей от включений на втором уровне, приведен к решению системы конечно-разностных уравнений

$$V_{mn}^s + \sum_{j \neq m} \sum_{q \neq n} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} V_{sq}^{\tau} U_{\tau} H_{\tau-s}(p_1 R_{mn}^{jq}) (-1)^{s+\tau} \exp[i(\tau-s)\theta_{mn}^{jq}] = 0 \quad (4.4)$$

$$u = \sum_{s=-\infty}^{\infty} V_{mn}^s [I_s(p_1 r_{mn}) - U_s H_s(p_1 r_{mn}) - W_s K_s(p_2 r_{mn})] \exp(is\theta_{mn} - i\omega t)$$

$$R_{mn}^{jq} = \omega_1 [(j-m)^2 + 2b(j-m)(q-n) \cos \alpha_1 + b^2(q-n)^2]^{1/2}$$

При этом учитываются первые две функции в разложении  $u$ . Решение (4.4) найдено в виде бегущих волн

$$V_{mn}^s = C_s \exp[i\lambda \omega_1 [m \cos \phi + bn \cos(\alpha_1 - \phi)]] \quad (4.5)$$

где  $\phi$  – угол между направлением распространения волны и  $Ox_2$ . Путем преобразований с введением координат  $X_{jq} - X_{mn} = R_{mn}^{jq} \cos \theta_{mn}^{jq}$ ,  $Y_{jq} - Y_{mn} = R_{mn}^{jq} \sin \theta_{mn}^{jq}$  систему

(4.4) приводим к алгебраическим уравнениям

$$C_s + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} C_{\tau} U_{\tau} G_{s\tau} = 0 \quad (4.6)$$

$$G_{s\tau} = (-1)^{s+\tau} \sum_{j \neq m} \sum_{q \neq n} H_{\tau-s}(\rho_1 R_{mn}^{jq}) \exp[i\lambda R_{mn}^{jq} \cos(\Phi - \theta_{mn}^{jq}) - i(s - \tau)\theta_{mn}^{jq}]$$

Из условия совместности системы алгебраических уравнений вытекают дисперсионные уравнения для определения  $\lambda$ :

$$\|\delta_{s\tau} + U_{\tau} G_{s\tau}\| = 0 \quad (4.7)$$

Поле в среде согласно соотношений (4.4), (4.5) и (4.7) определяется функциями, зависящими от макроскопических координат, и функциями, определяющими поле в отдельном масштабном объеме в цилиндрической системе координат.

5. Учет влияния градиентного состояния и тонкой структуры материалов представляют возможность уточнения разрушающей нагрузки для тел с трещиной. Рассмотрено хрупкое разрушение при сдвиге напряжениями  $\sigma_{13}$  линейно-армированного слоя с непрерывной по оси  $x_1$  эллиптической трещиной на втором масштабном уровне  $x_2 + ix_3 = c \operatorname{ch}(\xi + i\eta)$ ,  $c^2 = a^2 - b^2$ . При  $b \rightarrow 0$  эллипс вырождается в разрез  $\xi = 0$ ,  $0 \leq \eta < 2\pi$ , моделирующий трещину. Полагаем, что трещина целиком расположена в матрице. Искомые функции найдены в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = \sigma_{13}^{\circ} \frac{c}{G_0} \operatorname{sh} \xi \sin \eta + \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1} \exp[-(2n+1)\xi] \sin(2n+1)\eta \quad (5.1)$$

$$\psi_k(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{k2n+1} \frac{\operatorname{Ge} k_{2n+1}(\xi, -q_k)}{\operatorname{Ge} k_{2n+1}(0, -q_k)} se_{2n+1}(\eta, -q_k)$$

Непериодические функции Матье  $\operatorname{Ge} k_n(\xi, -q)$  удовлетворяют условиям затухания при  $\xi \rightarrow \infty$  и не имеют особенностей на берегах трещины [16]. Упругая энергия состоит из суммы энергий, накопленной усредненными (центральными) напряжениями, и градиентным состоянием. Поэтому по методу Гриффитса достаточно ограничиться первым членом разложения функций, что дает напряжения для страгивания трещины

$$\sigma_{13}^{\circ} = \frac{K_{III}}{\sqrt{\pi a}} \left[ 1 + \frac{0,1F}{q(v+2q)} \frac{\operatorname{Ge} k'_1(0, -q)}{\operatorname{Ge} k_1(0, -q)} \right] \quad (5.2)$$

$$F = 3v - 4q - 1 + (v - 3q + 13)A_3^{(1)} / A_1^1 - qA_5^{(1)} / A_1^1$$

$$q = a^2 \zeta G_0 / (2a_{\alpha}^2 G_1)$$

где  $v$  – постоянная разделения в уравнении Матье, зависящая от  $q$ ;  $A_k^{(1)}$  – коэффициент разложения  $se_1(\eta, q)$  в ряд Фурье. Критическая нагрузка является функцией полудлины трещины и параметра  $q$ . При  $q = 5$  поправка к предельным напряжениям, найденная в первом приближении, составляет несколько больше 7% в сторону увеличения критической нагрузки. В качестве примера рассмотрены пористые среды при  $q = 5$ , когда  $\zeta = 0,5$ ,  $\xi = 0,78$ ,  $\alpha = \pi/2$  и  $\zeta = 0,92$ ,  $\alpha = \pi/3$ . В первом случае вид регулярной упаковки несуществен, далее значения параметра  $a\sqrt{\zeta} / a_{\alpha} = 4,24; 3,52; 2,53$ .

Как видно, кроме длины трещины в данной теории на критическую нагрузку оказывают влияние объемное содержание волокон, механические характеристики компонентов и вид упаковки структуры. Если в системе алгебраических уравнений, вытекающих из краевых условий, сохранить большее число коэффициентов, то можно показать, что наряду с приведенной появятся более сильные особенности у кончика тре-

щины. Поэтому в работе предложен критерий разрушения, основанный на введении новых инвариантных интегралов, учитывающих градиентное состояние и обобщающих известные  $J$ -интегралы. Составим потенциальную энергию тела  $\pi$  с надрезом

$$\pi = \int_F UdF - \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( T_n u + \frac{1}{2} m_{ik} \varepsilon_k n_k \gamma_{li} \right) ds, \quad \varepsilon_2 = -1, \quad \varepsilon_3 = 1 \quad (5.3)$$

где  $\Gamma_\varepsilon$  – часть контура, на котором заданы напряжения  $T_n$  и компоненты градиентного состояния. При переходе от одного состояния к другому, когда трещина подрастает на  $\delta a$ , уменьшение потенциальной энергии при сохранении очертания контура у концов трещины, будет

$$-\frac{\partial \pi}{\partial a} = g_m = \int_F \frac{\partial u}{\partial a} dF - \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( T_n \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{1}{2} m_{ik} \varepsilon_k n_k \frac{\partial \gamma_{li}}{\partial a} \right) ds \quad (5.4)$$

Поэтому  $g_m$ -интеграл может быть представлен через интенсивность освобождения потенциальной энергии при локальном подрастании трещины. Это соотношение будет использоваться в качестве критерия хрупкого разрушения тел с учетом градиентного состояния. Если в (5.4) пренебречь градиентным состоянием, то  $q_m$ -интеграл перейдет в  $J$ -интеграл.

6. Между упругим продольным сдвигом волокнистой среды и поперечными статическими явлениями теплопереноса, определяемыми законами Фика и Фурье, а также электро- и магнитостатическими полями в армированных диэлектриках, имеется аналогия [17]. Она, когда ось  $x_1$  совмещена с осью ориентации волокон, имеет вид

$$\sigma_{12} - i\sigma_{13} \rightarrow D_2 - iD_3 \rightarrow q_2 - iq_3, \quad u \rightarrow \psi \rightarrow T \quad (6.1)$$

где  $D_k, q_k$  – компоненты вектора электрической индукции и тепла,  $\psi$  – потенциал,  $T$  – температура. Далее полагаем

$$\frac{G_{12}}{G} = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon} = \frac{\varkappa_{22}}{\varkappa}, \quad \frac{G_a}{G} = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} = \frac{\varkappa_a}{\varkappa} \quad (6.2)$$

где  $\varepsilon_k$  и  $\varkappa_k$  – диэлектрическая проницаемость и коэффициент теплопроводности. С помощью приведенной аналогии термодинамические потенциалы равновесного состояния обобщены на градиентное состояние:

внутренняя энергия

$$dU = TdS + \sigma_{1k} d\gamma_{1k} + E_k dD_k + HdB_k + \sum_{n=0}^N (\partial_2 + \partial_3)^2 (\partial_{ik} T dS_{ik} + m_{ik} dx_{ik} + E_{ik} dD_{ik} + H_{ik} dB_{ik}), \quad (\partial_2 + \partial_3)^2 q_{ik} \partial_{ik} T = q_{ik}^2 \partial_{ik}^2 T + 2q_{ik}^{11} \partial_{ik}^{11} T + q_{ik}^{02} \partial_{ik}^{02} T \quad (6.3)$$

свободная энергия Гельмгольца

$$dF = -SdT + \sigma_{1k} d\gamma_{1k} + E_k dD_k + H_k dB_k - \sum_{n=0}^N (\partial_2 + \partial_3)^n (S_{ik} d\partial_{ik} T - m_{ik} dx_{ik} - E_{ik} dD_{ik} - H_{ik} dB_{ik})$$

энтальпия

$$dH = TdS - \gamma_{1k} d\sigma_{1k} - D_k dE_k - B_k dH_k + \sum_{n=0}^N (\partial_2 + \partial_3)^n (\partial_{ik} T dS_{ik} - \varkappa_{ik} dm_{ik} - D_{ik} dE_{ik} - B_{ik} dH_{ik})$$

свободная энергия Гиббса

$$d\Phi = -SdT - \gamma_{1k}d\sigma_{1k} - D_k dE_k - B_k dH_k - \sum_{n=0}^N (\partial_2 + \partial_3)^n (S_{ik} d\partial_{ik} T + \kappa_{ik} dm_{ik} + D_{ik} dE_{ik} + B_{ik} dH_{ik})$$

На основе этих потенциалов нетрудно составить формулы для механической и электрической энтальпий, механического термодинамического потенциала и электрического термодинамического потенциала. Найденные потенциалы уточняют вклад в процессы, происходящие в неоднородной среде в связи с их строением на последующих масштабных уровнях.

7. Плоское состояние в волокнистых средах достигается в поперечном сечении линейно армированного слоя при двухмерном напряженном состоянии. Поэтому учет градиентных полей при плоском состоянии позволяет выделить важную составляющую в общем напряженном состоянии. Поле представлено в виде разложения

$$\begin{pmatrix} \sigma_{ik} \\ U \end{pmatrix} = \exp(x_2 \partial_2 + x_3 \partial_3) \begin{pmatrix} \sigma_{ik} \\ U \end{pmatrix}, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad U = u_2 + iu_3. \quad (7.1)$$

Условия совершенного контакта компонентов

$$(\sigma_n - i\sigma_{ns})^+ = (\sigma_n - i\sigma_{ns})^-, \quad U^+ = U^-$$

После преобразований, аналогичных приведенным выше, для плоского состояния находим определяющие соотношения

$$m_{23} = 2R_0 \partial_3 \Omega, \quad m_{32} = 2R_0 \partial_2 \Omega \quad (7.2)$$

где  $R_0$  – новая постоянная, зависящая от состава и строения среды на выбранном масштабном уровне, алгоритм определения которой разработан в [18]; компоненты состояния, усредненные по масштабному объему, определены соотношениями

$$T_{ik} \hat{\epsilon}_{ik} + \hat{m}_{ik} \hat{\kappa}_{ik} = \operatorname{Re} \frac{i}{2F} \oint_{\Gamma} (\sigma U - \bar{\Sigma} \bar{U}) d\bar{z} \quad (7.3)$$

$$\sigma = \sigma_2 + \sigma_3, \quad \Sigma = \sigma_3 - \sigma_2 + 2i\sigma_{23}$$

Состояние в масштабном объеме среды с двоякопериодической упаковкой волокон определяется потенциалами Колосова  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , разложенными в ряды по эллиптическим функциям Вейерштрасса и специальным полиномам [13]. Последние позволяют удовлетворить краевым условиям для центральных напряжений. Градиентная составляющая находится приближенно, но при сильном (экспоненциальное) затухании ее возникающие погрешности, как можно показать, будут незначительными. Усредненные напряжения и их градиенты определены соотношениями

$$T_{ik} \hat{\epsilon}_{ik} + \hat{m}_{ik} \hat{\kappa}_{ik} = \frac{i}{F} \oint u_2 [\sigma_2 \cos \theta + (\sigma_{23} + 2G_{23} \Omega) \sin \theta] ds + \frac{i}{F} \oint u_3 [(\sigma_{23} - 2G_{23} \Omega) \cos \theta + \sigma_3 \sin \theta] ds + \frac{1}{F} \oint \Omega (m_{32} \cos \theta + m_{23} \sin \theta) ds \quad (7.4)$$

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + R_0 \frac{\partial}{\partial x_3} \nabla^2 \Omega + X = 0 \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} - R_0 \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 \Omega + Y = 0$$

полностью совпадают с таковыми, полученными на основе моментной теории упругости [4]. Существуют два пути решения их, один из них сводится к определению двух функций напряжений, а другой – к использованию теории функций комплексных переменных. Последний метод более эффективный. Искомые функции в этом случае связаны с компонентами состояния соотношениями

$$\hat{\sigma} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad \bar{\Sigma} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \Psi(z)] + 4(\hat{\kappa} + 1)l^2\varphi'''(z) + 8iR_0 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \quad (7.6)$$

$$2G_{23}U = \hat{\kappa}\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \psi(z) + 4iR_0 \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}} - 2(\hat{\kappa} + 1)l^2\overline{\varphi''(z)}$$

$$\nabla^2 \Omega - l^{-2}\Omega = 0, \quad l^2 = R_0^2(2G_{23})^{-1}$$

Из приведенных соотношений можно образовать компоненты несимметричного тензора напряжений

$$\hat{\sigma}_{23} - \hat{\sigma}_{32} = -2R_0 \nabla^2 \Omega \quad (7.7)$$

$$m_{32} - im_{23} = -2i(\hat{\kappa} + 1)l^2\Phi''(z) + 4R_0 \partial \Omega / \partial z_0$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{23} \\ \hat{\sigma}_{32} \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_{23} \pm R_0 \nabla^2 \Omega$$

Видно, что перестановка индексов несимметричных касательных напряжений в силу того, что  $\Omega$  – антисимметричный тензор второго ранга, приводит к взаимным переходам напряжений друг в друга: Все ранее предложенные теории [1–7] основаны на введении несимметричного тензора напряжений. Из приведенных выше соотношений следует, что введение несимметричного тензора в теорию упругости не представляется целесообразным.

Краевые условия задачи составляются из соотношений, вытекающих из варьирования потенциальной энергии. Условия совершенного контакта будут

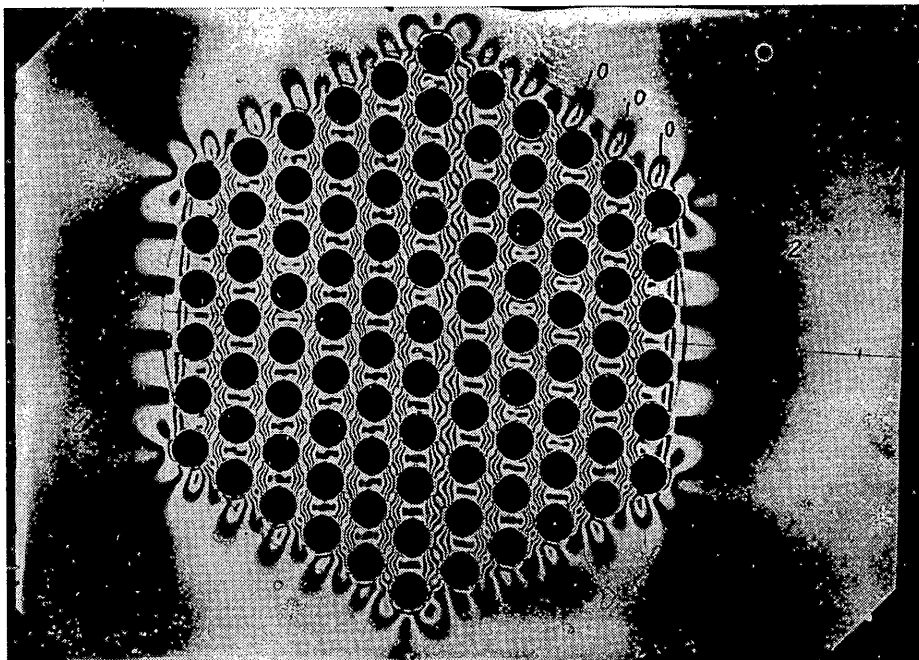
$$(Q_n - iQ_s)^+ = (Q_n - iQ_s)^-, \quad (d\bar{U} / ds)^+ = (d\bar{U} / ds)^- \\ M_n^+ = M_n^-, \quad \Omega^+ = \Omega^- \quad (7.8)$$

$$Q_n - iQ_s = (Q_2 - iQ_3)e^{-i\theta}, \quad Q_2 = \hat{\sigma}_2 \cos \theta + (\hat{\sigma}_{23} + R_0 \nabla^2 \Omega) \sin \theta$$

$$Q_3 = (\hat{\sigma}_{23} - R_0 \nabla^2 \Omega) \cos \theta + \sigma_3 \sin \theta, \quad M_n = m_{32} \cos \theta + m_{23} \sin \theta$$

Параметр  $l$ , играющий фундаментальную роль, для пористых сред более чем в 2 раза превосходит его значение для композитов, наполненных жесткими волокнами. Для оценки влияния градиентного состояния на центральные напряжения около кругового отверстия в перфорированной малыми круговыми отверстиями пластинке при растяжении ее напряжениями  $\sigma_2^0$  рассчитан коэффициент концентрации напряжений у контура. Если пренебречь градиентными эффектами, то коэффициент концентрации напряжений не зависит от упругих постоянных и его максимальное значение равно 3. При учете градиентных эффектов он зависит от параметра  $a\sqrt{\xi}/a_a$ ,  $a$  – радиус отверстия,  $a_a$  – радиус элементарного волокна или поры. Снижение концентрации напряжений  $\sigma_2$  на контуре отверстия в зависимости от масштабного фактора  $a\sqrt{\xi}/a_a$  представлено на фиг. 7, где сплошная кривая соответствует пористой среде, а штриховая – упрочненной жесткими волокнами ( $G_a \rightarrow \infty$ ). Влияние градиентных эффектов повы-





Фиг. 9

Условия совершенного контакта относительно потенциалов сведены к системе

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \Phi_a(z) - \overline{\Phi_a(z)} - e^{2i\theta} [\bar{z}\Phi'(z) - \bar{z}\Phi'_a(z) + \Psi(z) - \Psi_a(z)] &= -\mu L\Omega + \mu_a L_a \Omega_a \\
 \Phi_a(z) + (1 - \kappa_a G / G_a)(1 - G / G_a)^{-1} \overline{\Phi_a(z)} - e^{2i\theta} [\bar{z}\Phi'_a(z) + \Psi_a(z)] - \\
 - (\kappa + 1)(1 - G / G_a)^{-1} \overline{\Phi(z)} &= -\mu_a L_a \Omega_a \\
 \mu G (\kappa + 1)^{-1} \partial \Omega / \partial n &= \mu_a G_a (\kappa_a + 1)^{-1} \partial \Omega_a / \partial n, \quad \Omega = \Omega_a
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

При решении системы (8.2) каждая одноименная группа коэффициентов приводится к бесконечной последовательности конечно-разностных уравнений второго порядка

$$C_{n+2} - \lambda_1 C_{n+1} - \lambda_2 C_n = 0 \tag{8.3}$$

Подчиняя решения начальным условиям, находим

$$C_n = C_0 (X_1 - X_2)^{-1} [(X_1 + \alpha_1 \alpha_2) X_2^n - (X_1 + \alpha_1 \alpha_3) X_1^n]$$

Если выполняются ограничения  $|\mu X_k| < 1$ , то ряды (8.1) сходятся и их можно просуммировать. Анализ найденных решений показывает, что при равномерном растяжении пластинки  $\sigma_2^0 = \sigma_3^0$  и градиентное состояние для кругового отверстия отсутствует.

9. Экспериментальная проверка влияния градиентных эффектов на напряженное состояние пластинки осуществлялась с помощью поляризационно-оптического метода на пластинках из эпоксидной смолы<sup>1</sup>. Неоднородные включения в пластинке моделировались зоной, перфорированной круговыми отверстиями малого диаметра (фиг. 8). Пластинка нагружена растягивающими напряжениями  $\sigma_3^0$ . Распределение напряжений в пластинке представлено на фиг. 9, где видно, что влияние градиентного состояния

<sup>1</sup> Опыты проводились в ИМАШ РАН проф. Б.Н. Ушаковым по программе, составленной автором.

простирается на расстояния, немного превышающие область одного малого отверстия. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_3$  по сечению  $x_3 = 0$  представлено в виде сплошной кривой на фиг. 10. Штриховая кривая характеризует распределение напряжений  $\sigma_3$ , вычисленных при условии, что градиентные эффекты отсутствуют, а включение представляет собой однородную круговую шайбу. Видно, что градиентные эффекты снижают максимальные напряжения и сдвигают их максимум от границы, а их влияние распространяется на область, размер которой соизмерим с площадью, ограниченной малым отверстием.

10. Уточненное решение задачи о хрупком разрушении пластинки с трещиной в среде с одноуровневой структурой имеет вид

$$\Phi(\chi) = \frac{\sigma_3^0}{4} + \sigma_3^0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{2n}}{2n} \exp(-2n\chi), \quad \chi = \xi + i\eta \quad (10.1)$$

$$\Psi(\chi) = \frac{\sigma_3^0}{2} + \sigma_3^0 \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \exp(-2k\chi)$$

$$\Omega = \sigma_3^0 \sum_{r=0}^{\infty} C_{2r+2} \text{Ge} k_{2r+2}(\xi, -q) [\text{Ge} k'_{2r+2}(0, -q)]^{-1} \text{se}_{2r+2}(\eta, -q)$$

Коэффициенты в разложениях (10.1) найдены в виде рядов по параметру

$$A_{2n} = a_{2n} + \mu a'_{2n} + \mu^2 a''_{2n} + \dots, \quad B_{2n} = b_{2n} + \mu b'_{2n} + \mu^2 b''_{2n} + \dots \quad (10.2)$$

Если в принятом приближении отбросить влияние поворотов, то усеченная система решается в явном виде. Одна система приводится к виду

$$X_{n+3} - 3X_{n-2} + 3X_{n+1} - X_n = 2\sigma_{n0} + \mu[2(n+2)^2 X_{n+2} - 2(n+1)^2 X_{n+1} - (-1)^n \sum_{m=1}^{\infty} m p_{2m}^{(2n+2)} X_m], \quad X_n = A_{2n}/n \quad (10.3)$$

Решение удастся получить в явном виде для любого приближения

$$X_n = 2 + \mu n^4 / 3 + \mu^2 (3n^8 - 14n^6 + 21n^4) / 252 + \dots \quad (10.4)$$

Асимптотическое разложение потенциала построено с учетом представления

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \exp(-2n\chi) = \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \frac{d^k}{d\chi^k} \left( \frac{z/a}{\sqrt{(z/a)^2 - 1}} - 1 \right) \quad (10.5)$$

$$\Phi(z) = -\frac{\sigma_3^0}{4} + \frac{\sigma_3^0 z/a}{2\sqrt{(z/a)^2 - 1}} q_0(z) + \dots$$

$$p_{2n}(z) = (z/a)^{2n} [(z/a)^2 - 1]^{-n}$$

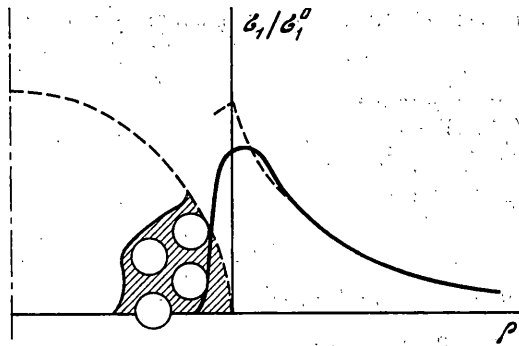
$$q_0(z) = 1 + \mu/6 + 533\mu^2/1008 - 175\mu^2 p_6(z)/56 + 105\mu^2 p_8(z)/112 -$$

$$-(35\mu + 47\mu^2) p_2(z)/84 + (42\mu + 301\mu^2) p_4(z)/168$$

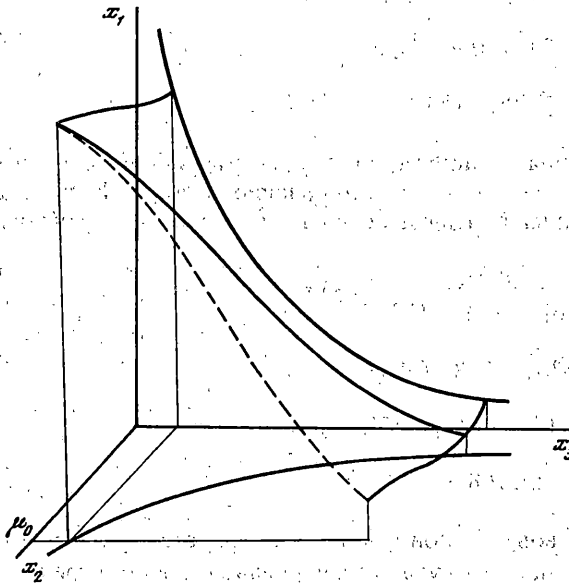
Вторая система алгебраических уравнений имеет подобное строение

$$B_{2n+6} - 3B_{2n+4} + 3B_{2n+2} - B_{2n} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_9 n^9 \quad (10.6)$$





Фиг 10



Фиг. 11

Общее решение найдено в виде суммы решений однородного и неоднородного уравнений

$$B_{2n}^{\circ} = \lambda_1 n + \lambda_2 n^2, \quad B_{2n} = 2n^2 + \lambda_3 n^3 + \dots + \lambda_{12} n^{12}$$

Асимптотическое разложение искомой функции равно [20]:

$$\Psi(z) = \frac{\sigma_3^{\circ}}{2} \left\{ 1 + q_1(z) + \frac{z/a}{4\sqrt{(z/a)^2 - 1}} [-4 + 4\lambda_4 - 17\lambda_6 + \right. \\ \left. + (4 - 10\lambda_4 - 123\lambda_6 p_2(z) + (6\lambda_4 - 105\lambda_6) p_4(z) + \dots) \right\} \quad (10.7)$$

$$q_1(z) = (\lambda_3 - \lambda_5)/4 - (\lambda_3 + 145\lambda_5) p_2(z)/2 - \\ - (3\lambda_3 + 30\lambda_5) p_4(z)/8 + \dots$$

Распределение нормальных напряжений на площадках  $x_3 = 0$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_3^0}{2} \left[ q_1(x_2) + \frac{x_2/a}{\sqrt{(x_2/a)^2 - 1}} q_2(x_2) - \frac{x_2/a}{[(x_2/a)^2 - 1]^{3/2}} q_3(x_2) + \dots \right] \quad (10.8)$$

$$q_2(z) = 1 + \mu/3 + 533\mu^2/504 + \lambda_4 - 17\lambda_6/4 + (1 - \lambda_3/2 - 71\lambda_5 - 5\lambda_4/2 - 123\lambda_6/4)p_2(z) + (42\mu + 301\mu^2 + 126\lambda_4 - 2205\lambda_6)p_4(z)/84 + \dots$$

$$q_3(z) = 1 + \mu/6 + 533\mu^2/1008 - (35\mu + 47\mu^2)p_2(z)/84 + (240\mu + 1505\mu^2)p_4(z)/168 + \dots$$

Видно, что напряжения у концов трещины растут по более сложному закону, нежели классический; последнее исключает применение критерия Ирвина. Распределение моментных напряжений на площадках, перпендикулярных контуру трещины при  $\eta = 0$ :

$$m_s = \frac{2R_0}{\sqrt{2ar}} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} - \frac{\mu a \sigma_3^0}{16[(x_2/a)^2 - 1]^{3/2}} f(x_2) + \dots \quad (10.9)$$

$$f(z) = 1 + \mu/6 + 533\mu^2/1008 - (35\mu + 47\mu^2)p_2(z)/28 - (42\mu + 301\mu^2)[5(z/a)^2 + 1][(z/a)^2 - 1]^{-1} p_4(z)/168 + \dots$$

Установлено существование контурного интеграла  $g_m$ , учитывающего градиентное состояние и не зависящего от пути интегрирования. Энергия среды с надрезом будет

$$\pi = \int_F UdF - \int_{\Gamma_e} (\Sigma_{ik} n_k u_i + m_n \Omega) ds$$

$\Gamma_e$  – часть контура  $\Gamma$ ; на которой заданы центральные напряжения и градиенты. Если при переходе от одного к другому состоянию длина трещины подрастает на величину  $\delta a$ , то уменьшение потенциальной энергии при сохранении очертания контура конца трещины будет [20]

$$-\frac{\partial \pi}{\partial a} = g_m = \int_F \frac{\partial U}{\partial a} dF - \int_{\Gamma_e} \left( \Sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial a} + m_n \frac{\partial \Omega}{\partial a} \right) ds \quad (10.10)$$

Таким образом,  $g_m$ -интеграл может быть представлен через интенсивность освобождения потенциальной энергии при росте трещины. Поэтому соотношение (10.10) предлагается в качестве критерия хрупкого разрушения тела на соответствующем масштабном уровне, так как форма записи  $g_m$ -интеграла не зависит от иерархии структуры. Решение (10.8) остается справедливым, если расстояние от кончика трещины соответствует второму масштабному уровню. Если по одной оси координат отложить критические напряжения, а по  $x_2, x_3$  соответственно зависимость их от длины трещины  $a$  и параметра  $\mu$ , то предельное состояние можно представить в виде поверхности

(фиг. 11), где  $\mu_0$  определено условием  $a_a(a\sqrt{\xi})^{-1} < 1$ . Состояние при  $\mu > \mu_n$  соответствует трещине первого масштабного уровня.

**11.** В рамках первого приближения предложены основы градиентной теории упругости неоднородных сред при пространственном напряженном состоянии и разработаны алгоритмы определения интегральных компонентов напряженного состояния и эффективных параметров в определяющих уравнениях [21]. Центральные и нецентральные напряжения и соответствующие им деформации представим степенными разложениями

$$\begin{pmatrix} \sigma_{ik} \\ u_i \end{pmatrix} = \exp(x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + x_3 \partial_3) \begin{pmatrix} \sigma_{ik} \\ u_i \end{pmatrix}. \quad (11.1)$$

В дальнейшем верхние индексы у напряжений будут обозначать производные согласно правилу  $\partial f_i / \partial x_k = f_i^k$  ( $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ).

При сохранении в (11.1) только первых членов градиентных состояний дополнительно к центральным напряжениям следует добавить 18 компонентов, характеризующих нецентральное взаимодействие. Между ними существуют зависимости, вытекающие из уравнений равновесия

$$\sigma_1^1 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^3 = 0, \quad \sigma_{12}^1 + \sigma_2^2 + \sigma_{23}^3 = 0, \quad \sigma_{13}^1 + \sigma_{23}^2 + \sigma_3^3 = 0 \quad (11.2)$$

Все компоненты удобно разделить на три родственные группы самоуравновешенных состояний: а) шесть состояний чистого изгиба, распределенных попарно на трех взаимно перпендикулярных площадках

$$\sigma_k = x_s \sigma_s^k \quad (s \neq k) \quad (11.3)$$

в) три состояния градиентного продольного сдвига вдоль осей координат

$$\sigma_{ik} = x_s \sigma_{ik}^s \quad (i \neq k \neq s);$$

с) девять состояний растяжение-сдвиг  $\sigma_{ik} = x_s \sigma_{ik}^s$ .

Приведенным напряжениям соответствуют смещения

$$u_1 = \epsilon_1^1 x^2 / 2 - \omega_{21}^1 x^2 / 2 + \omega_{13}^2 z^2 / 2 - \omega_{21}^2 xy + \omega_{13}^1 xz \quad (11.4)$$

$$u_1 = (\gamma_{12}^3 + \gamma_{13}^2 - \gamma_{23}^1) yz,$$

$$u_1 = \epsilon_1^1 x^2 / 2 + \gamma_{12}^2 y^2 / 2 + \gamma_{13}^3 z^2 / 2 \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)$$

Интегральные параметры для масштабного объема  $v$  находятся согласно равенству

$$\hat{\sigma}_{ik} \hat{\epsilon}_{ik} + m_{ik}^s \omega_{ik}^s + \dots = \frac{1}{v} \oint \sigma_{ik} u_i df_k \quad (11.5)$$

Усредненные параметры 24 состояний вычисляются по формулам, вытекающим из (11.5). Например

$$m_{21}^1 = \frac{1}{v} \oint \left( \frac{x^2}{2} \sigma_2 dx dz - xy \sigma_1 dy dz \right)$$

$$\tau_{12}^3 = \frac{1}{2v} \oint [(xz \sigma_{12} - xy \sigma_{13}) dy dz + (yz \sigma_{12} - xy \sigma_{23}) dx dz + (yz \sigma_{13} + xz \sigma_{23}) dx dy]$$

В случае сред с наивысшей группой симметрии, например в композиции, образованной одинаковыми шарами, расположенными в узлах гексагональной решетки, опреде-

ляющие уравнения содержат только два существенно различных параметра

$$\begin{vmatrix} m_{21}^1 \\ m_{13}^1 \\ m_{32}^2 \end{vmatrix} = \alpha(1 - \hat{v}^2)^{-1} \begin{vmatrix} \omega_{21}^1 - \hat{v}\omega_{32}^3 \\ \omega_{13}^1 - \hat{v}\omega_{32}^2 \\ \omega_{32}^2 - \hat{v}\omega_{13}^1 \end{vmatrix}, \quad (11.6)$$

$$\begin{vmatrix} m_{21}^2 \\ m_{13}^3 \\ m_{32}^3 \end{vmatrix} = \alpha(1 - \hat{v}^2)^{-1} \begin{vmatrix} \omega_{21}^2 - \hat{v}\omega_{13}^3 \\ \omega_{13}^3 - \hat{v}\omega_{21}^3 \\ \omega_{32}^3 - \hat{v}\omega_{21}^1 \end{vmatrix}$$

Для ячейки в виде куба со стороной  $2a$  параметр  $\alpha = a^2 \hat{E} / 3$ .

12. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, соответствующего изгибу среды. При варьировании функционала

$$\int dv (\hat{\sigma}_{ik} \hat{\epsilon}_{ik} + m_{ik}^s \omega_{ik}^s) \quad (12.1)$$

определим усилия на произвольных площадках

$$M_1 = m_{32}^2 \cos ny + m_{32}^3 \cos nz,$$

$$M_2 = m_{13}^1 \cos nx + m_{13}^3 \cos nz$$

$$M_3 = m_{21}^1 \cos nx + m_{21}^2 \cos ny,$$

(12.2)

$$\tau_1 = \tau_3 \cos ny - \tau_2 \cos nz$$

$$\tau_2 = \tau_1 \cos nz - \tau_3 \cos nx, \quad \tau_3 = \tau_2 \cos nx - \tau_1 \cos ny$$

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{32}^2}{\partial y} + \frac{\partial m_{32}^3}{\partial z} \right), \quad \tau_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{13}^1}{\partial x} + \frac{\partial m_{13}^3}{\partial z} \right),$$

$$\tau_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{21}^1}{\partial x} + \frac{\partial m_{21}^2}{\partial y} \right)$$

а также уравнения равновесия

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{13}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} - \frac{\partial \tau_2}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}_2}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} - \frac{\partial \tau_3}{\partial x} = 0$$

(12.3)

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\sigma}_3}{\partial z} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x} - \frac{\partial \tau_1}{\partial y} = 0$$

Строение уравнений равновесия представляет возможность ввести несимметричный тензор напряжений

$$\tau_{ik} = \hat{\sigma}_{ik} + \chi_{iks} \tau_s \quad (12.4)$$

где  $\chi_{iks}$  – тензор Леви-Чивита. В новых обозначениях уравнения могут быть записаны в компактном виде  $\partial \tau_{ik} / \partial x_i = 0$ .

Введение несимметричного тензора приводит к необходимости привлекать еще три уравнения равновесия моментов. Преобразуем уравнения через смещения, привлекая

для этого закон Гука

$$(\hat{\lambda} + \hat{G}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \hat{G} \nabla^2 \mathbf{u} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_k \tau_k \quad (12.5)$$

где  $\mathbf{e}_k$  – орты декартовой системы координат. Касательные напряжения  $\tau_k$  выразим через компоненты вектора поворотов

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \alpha (1 - \hat{\nu}^2)^{-1} [\nabla^2 \boldsymbol{\omega} - (1 - \hat{\nu}) \mathbf{e}_k \partial^2 \omega_k / \partial x_k^2] \quad (12.6)$$

$$\omega_{32} = \omega_1, \quad \omega_{13} = \omega_2, \quad \omega_{21} = \omega_3$$

Согласно (12.5), (12.6) и определения  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u}$ , учет градиентов напряжений приводит к разрешающим уравнениям вида

$$(L_{0k} + \lambda L_k)(u, v, w) = 0, \quad \lambda = \alpha (1 - \hat{\nu}^2)^{-1} / 2 \quad (12.7)$$

где  $L_{0k}$  – операторы уравнения Ляме,  $L_k$  – дифференциальные операторы более высокого порядка.

13. Рассмотрим общие решения полученных уравнений. Их можно строить по аналогии с классическими решениями. Вводя бигармонический вектор Галеркина, находим решение уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & (\nu \nabla^2 - \partial^2 / \partial x^2) \operatorname{div} \mathbf{H} - 2(1 - \hat{\nu}) \nabla^2 \partial H_1 / \partial x - \\ & - \alpha (1 - \hat{\nu}^2)^{-1} \partial / \partial x (\partial \omega_3 / \partial y - \partial \omega_2 / \partial z). \end{aligned} \quad (13.1)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{H} = 0 \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)$$

Касательные напряжения определены функциями

$$\begin{aligned} \sigma_{21} = & -\partial^2 / \partial x \partial y \operatorname{div} \mathbf{H} + (1 - \hat{\nu}) \nabla^2 (\partial H_1 / \partial y + \\ & + \partial H_2 / \partial x) + \frac{1}{2} \alpha (1 - \hat{\nu}^2)^{-1} [\partial^2 \omega_3 / \partial x^2 - \\ & - \partial^2 \omega_3 / \partial y^2 + \hat{\nu} \partial / \partial z (\partial \omega_2 / \partial y - \partial \omega_1 / \partial x)]. \end{aligned} \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \quad (13.2)$$

Приведем соотношения, вытекающие из уравнения (12.5). Применяя векторную операцию расходимости, получим известную формулу  $\nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3$ . Используя (12.6), приходим к уравнению для определения поворотов среды

$$(\nabla^2 - \operatorname{grad} \operatorname{div}) [\nabla^2 \boldsymbol{\omega} - (1 - \hat{\nu}) \mathbf{e}_k \partial^2 \omega_k / \partial x_k^2 - 4(1 - \hat{\nu}^2)(\hat{G} / \alpha) \boldsymbol{\omega}] = 0 \quad (13.3)$$

Из них следуют уравнения для компонентов вектора поворотов

$$\begin{aligned} L_1 \omega_1 + (1 - \hat{\nu}) \frac{\partial^4 \omega_2}{\partial x \partial y^3} + (1 - \hat{\nu}) \frac{\partial^4 \omega_3}{\partial x \partial z^3} &= 0 \\ (1 - \hat{\nu}) \frac{\partial^4 \omega_1}{\partial x^3 \partial y} + L_2 \omega_2 + (1 - \hat{\nu}) \frac{\partial^4 \omega_3}{\partial y \partial z^3} &= 0 \\ (1 - \hat{\nu}) \frac{\partial^4 \omega_1}{\partial x^3 \partial z} + (1 - \hat{\nu}) \frac{\partial^4 \omega_2}{\partial y^3 \partial z} + L_3 \omega_3 &= 0 \end{aligned} \quad (13.4)$$

$$L_k = \nabla^2 \nabla^2 + (1 - \hat{\nu}) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \nabla^2 \right) - 4(1 - \hat{\nu}^2)(\hat{G} / \alpha) \nabla^2$$

Элементарные решения системы получаем подстановкой  $\omega_k = C_k \exp [a(x + y + z)]$ , тогда характеристическое уравнение будет

$$[(2 + \hat{\nu})a^2 - 4(1 - \hat{\nu}^2)\hat{G} / \alpha]^3 [3a^2 - 4(1 - \hat{\nu}^2)\hat{G} / \alpha] = 0 \quad (13.5)$$

Определение смещений можно свести к решению известной задачи об определении вектора  $\mathbf{u}$  по известным его расхожимости и вихрю при заданных краевых условиях

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = [(1 + \hat{\nu})(1 - 2\hat{\nu}) / \hat{E}] \operatorname{div} - \nabla^2 \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u} = 2\omega \quad (13.6)$$

Для более строгого учета влияния градиентных эффектов на состояние тел уравнения (12.5) необходимо дополнить членами, учитывающими сдвиговые и другие компоненты состояния. Последнее целесообразно начинать с анализа простейших схем нагружения и краевых условий.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cosserat E.F., Cosserat F.F.* Theorie des corps deformbles. Paris: Hermann, 1909. 226 p.
2. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц. // Физика твердого тела. 1960. Т. 2. Вып. 7. С. 1399–1409.
3. *Пальмов В.А.* Основные уравнения несимметричной упругости. // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401–408.
4. *Миндлин Р.Д.* Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1964. № 4. С. 115–128.
5. *Эринген А.К.* Теория микрополярной упругости // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 646–751.
6. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
7. *Белоносов С.М.* Моментная теория упругости. Владивосток: Дальнаука, 1993. 148 с.
8. *Соколкин Ю.В., Чекалкин А.А., Котов А.Г.* Структурный многоуровневый подход к проектированию пространственно армированных углерод-углеродных композитов // Механика композит. материалов. 1995. Т. 31. № 2. С. 200–208.
9. *Дмитриенко Ю.И.* Механика композиционных материалов при высоких температурах. М.: Машиностроение, 1997. 364 с.
10. *Фистуль В.И.* Новые материалы. М.: "МИСИС". 1995. 141 с.
11. *Ванин Г.А.* Градиентная теория сдвига многоуровневых композитов // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 120–128.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
13. *Ванин Г.А.* Микромеханика композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 302 с.
14. *Ванин Г.А.* Градиентная теория распространения волн сдвига в волокнистой среде // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С. 47–52.
15. *Ванин Г.А.* Градиентная теория сдвига композитов с трещиной // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 114–121.
16. *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.
17. *Ванин Г.А.* Градиентная механика и термодинамика многоуровневых композитов // Механика композит. материалов. 1996. Т. 32. № 1. С. 3–20.
18. *Ванин Г.А.* Градиентная теория плоского деформированного состояния многоуровневых сред // Изв. РАН МТТ. 1996. № 3. С. 5–15.
19. *Ванин Г.А.* Градиентное межфазное взаимодействие неоднородной пластинки с включением // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 146–151.
20. *Ванин Г.А.* Плоская задача градиентной теории хрупкого разрушения композитов с трещиной // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 70–78.
21. *Ванин Г.А.* Градиентная теория упругости // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 1. С. 46–53.

Москва

Поступила в редакцию  
12.03.1999