МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2000

УДК 539.3

© 2000 г. И.Ю. ЦВЕЛОДУБ

ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ В ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДЕ
(плоская задача)

В работе [1] доказано следующее утверждение, обобщающее известные результаты Дж. Эшелби [2] и других авторов, упомянутых в [1]: если линейно-упругое пространство с эллипсоидальным включением испытывает такие воздействия, при которых деформация включения в предположении, что оно также линейно-упругое, является однородной, то она будет однородной и при любой физической нелинейности включения при условии однородности его свойств (т.е. определяющие уравнения материала включения одинаковы для всех его точек).

Два случая таких воздействий описаны в [2]:

1. Включение претерпевает изменение формы и линейных размеров, которые в отсутствие сопротивления окружающей среды соответствуют однородной деформации; внешние силы при этом отсутствуют.

2. Включение имеет упругие константы, отличные от констант среды, к которой на бесконечности приложены внешние силы.

В [1] отмечается, что физическая нелинейность не обязательно означает нелинейную упругость материала включения, последнее может быть и упругопластическим и даже вязкоупругопластическим. Однако конкретные соотношения, связывающие напряженно-деформированное состояние (НДС) среды и включения, в [1] отсутствуют, что можно объяснить тем, что в [1] такая цель не преследовалась, и, как отмечается в [2], полное решение для общего (3-мерного) случая даже для линейно-упругого включения очень громоздко, а для рассматриваемой нелинейности может оказаться просто необозримым. Тем не менее упомянутые соотношения можно получить в важном для приложений двумерном случае, т.е. для изотропной упругой плоскости с эллиптическим включением, процесс деформирования которого описывается нелинейными уравнениями самого общего вида. Это и проделано в данной работе, где, кроме того, доказана единственность найденного решения (при соответствующих ограничениях на определяющие уравнения) и показано, что отмеченным свойством однородности НДС обладает только эллиптическое включение. Рассмотрены некоторые примеры, в частности, исследован случай идеального упругопластического включения.

Заметим, что плоская упругая задача Эшелби в геометрически нелинейной постановке рассмотрена в [3], где также приведены соображения в пользу необходимости эллиптической формы включения для реализации в нем однородного НДС.

1. НДС упругой плоскости с физически нелинейным эллиптическим включением. Рассмотрим изотропную упругую плоскость с эллиптическим включением, находящиеся в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния. На бесконечности действуют равномерно распределенные, зависящие в общем случае от времени или некоторого параметра нагружения, напряжения, главные значения которых обозначим через N_1 и N_2, а угол, который главная ось, соответствующая N_1, составляет с осью Ox, через α. Уравнение границы L, отделяющей включение S^* от упругой среды S, имеет вид $x^2a^{-2} + y^2b^{-2} = 1$, $a \geqslant b$. До момента приложения указанных внешних нагрузок области S и S^* находились в естественном недеформированном состоянии.

Для области S справедлив закон Гука, который в обоих случаях плоской задачи можно записать в виде

$$8\mu\varepsilon_{11} = (\varkappa + 1)\sigma_{11} + (\varkappa - 3)\sigma_{22} \tag{1.1}$$

$$8\mu\varepsilon_{22} = (\varkappa + 1)\sigma_{22} + (\varkappa - 3)\sigma_{11}$$

$$2\mu\varepsilon_{12} = \sigma_{12}$$

где $\mu = E/[2(1 + \nu)]$ – модуль сдвига (E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона), а $\varkappa = 3–4\nu$ при плоской деформации или $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – для обобщенного плоского напряженного состояния [4].

Конкретизации определяющих уравнений для материала включения пока не требуется, поэтому запишем их в виде

$$\varepsilon_{kl}^* = \mathcal{F}_{kl}(\sigma_{mn}^*) \quad (k,l,m,n = 1,2) \tag{1.2}$$

где $\mathcal{F}_{kl}$ в общем случае нелинейные операторы, которые, в частности, могут являться и функциями. Здесь и в дальнейшем индексом звездочка будут снабжаться величины, относящиеся к включению S^*; аналогичные величины без верхнего индекса характеризуют упругую область S. Некоторые частные случаи соотношений (1.2) будут рассмотрены в п. 2.

Задача рассматривается в геометрически линейной постановке, т.е. деформации выражаются через перемещения u_k ($k = 1, 2$) известными соотношениями Коши. На границе L поля нагрузок и перемещений непрерывны.

Покажем, что при указанных выше условиях и естественных ограничениях на соотношения (1.2) включение S^* будет находиться в однородном НДС и установим связь последнего с напряжениями на бесконечности. Для этого отобразим область S на внешность единичного круга с границей γ комплексной плоскости ζ [4]:

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^{-1}), \quad \zeta = \rho e^{i\theta} \tag{1.3}$$

$$R = (a + b)/2, \quad m = (a - b)/(a + b) \quad (R > 0, 0 \leqslant m < 1)$$

Для случая, когда главный вектор внешних сил, приложенных к границе L со стороны области S^*, равен нулю (что и имеет место в данной задаче) и вращение на бесконечности отсутствует, функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, определяющие НДС в S, имеют вид [4]:

$$\varphi(\zeta) = \Gamma R\zeta + \varphi_0(\zeta), \quad \Gamma'(\zeta) = \Phi' R\zeta + \psi_0(\zeta) \tag{1.4}$$

$$4\Gamma = N_1 + N_2, \quad 2\Gamma' = (N_2 - N_1)e^{-2i\alpha}$$

где $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ определяются известным образом [4, 5] через граничное значение функции $f = 2\,\partial U/\partial\bar{z}$, где $U = U(z, \bar{z})$ – функция напряжений. В силу непрерывности усилий, передаваемых через границу L, на ней должно выполняться условие $\partial U/\partial\bar{z} = \partial U^*/\partial\bar{z}$, поэтому

$$f = 2\partial U^*/\partial\bar{z} \quad \text{на} \quad L \tag{1.5}$$

где $U^* = U^*(z, \bar{z})$ – функция напряжений для включения.

Предположим, что σ_{kl}^* не зависят от x и y. Тогда, учитывая, что [5]: $\sigma_{11}^* + \sigma_{22}^* = 4\partial^2 U^*/(\partial z\partial\bar{z})$ и $\sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + 2i\sigma_{12}^* = 4\partial^2 U^*/\partial z^2$, для U^* после отбрасывания линейных относительно z и $\bar{z}$ слагаемых, не влияющих на напряженное состояние, будем иметь

$$2U^* = Az\bar{z} + Bz^2/2 + \bar{B}\bar{z}^2/2 \tag{1.6}$$

$$2A = \sigma_{11}^* + \sigma_{22}^*, \quad 2B = \sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + 2i\sigma_{12}^*$$

Находя из (1.5) и (1.6) значения f и $\bar{f}$ на γ и подставляя их в упомянутые формулы для φ_0 и ψ_0, из (1.4) получим

$$\varphi(\zeta) = R\{\Gamma\zeta + [\bar{B} + m(A-\Gamma) - \bar{\Gamma}']\zeta^{-1}\}, \quad \psi(\zeta) =$$

$$= R\left\{\Gamma'\zeta + \frac{[(m^2+1)(A-2\Gamma) + m(B+\bar{B}-\bar{\Gamma}')]\zeta^2 + \bar{B} - m^2B - \bar{\Gamma}'}{\zeta(\zeta^2 - m)}\right\}, \quad |\zeta| \geqslant 1 \tag{1.7}$$

Ввиду (1.2) деформации ε_{kl}^* также не зависят от x и y, а, следовательно, от z и $\bar{z}$. Тогда учитывая известные соотношения [5]: $2\partial w^*/\partial\bar{z} = \varepsilon_{11}^* - \varepsilon_{22}^* + 2i\varepsilon_{12}^*$ и $\partial w^*/\partial z + \partial\bar{w}^*/\partial\bar{z} = \varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^*$, где $w^* = u_1^* + iu_2^*$, и считая, что точка $(0, 0) \in S^*$ и является фиксированной, т.е. $w^*(0, 0) = 0$, найдем

$$2w^* = Cz + D\bar{z} \tag{1.8}$$

$$C = \varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^* + 2i\varepsilon^*, \quad D = \varepsilon_{11}^* - \varepsilon_{22}^* + 2i\varepsilon_{12}^*$$

где ε^* – произвольная постоянная, равная значению "вращения".

Из условия непрерывности на L перемещений будем иметь $w = w^*$ на γ, поэтому функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ из (1.7) должны удовлетворять известному граничному условию для перемещений, из которого и аналогичного условия для первой основной задачи, содержащего функцию $\bar{f}$ [4, 5], с учетом (1.8) получим

$$(\varkappa+1)\overline{\varphi(\sigma)} = (A + \mu\bar{C})\overline{\omega(\sigma)} + (B + \mu\bar{D})\omega(\sigma) \tag{1.9}$$

где σ – произвольная точка на γ.

Подставляя $\varphi(\zeta)$ из (1.7) и $\omega(\zeta)$ из (1.3) в (1.9) и приравнивая коэффициенты при σ и σ^{-1} слева и справа, будем иметь

$$\mu(m\bar{C} + \bar{D}) = \varkappa(mA + B) - (\varkappa+1)(m\Gamma + \Gamma') \tag{1.10}$$

$$\mu(\bar{C} + m\bar{D}) = -(A + mB) + (\varkappa+1)\Gamma$$

Учитывая, что для напряжений на бесконечности справедливы равенства [4]: $\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty = 4\Gamma$ и $\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + 2i\sigma_{12}^\infty = 2\Gamma'$, и подставляя выражения для A, B, C и D из (1.6) и (1.8), запишем (1.10) в виде

$$8\mu(1-m^2)\varepsilon_{11}^* = -2(\varkappa+1)(1-m)^2\sigma_{11}^* + 2(\varkappa-1)(1-m^2)\sigma_{22}^* +$$

$$+(\varkappa+1)(m-1)[(m-3)\sigma_{11}^\infty + (m+1)\sigma_{22}^\infty] \tag{1.11}$$

$$8\mu(1-m^2)\varepsilon_{22}^* = 2(\varkappa-1)(1-m^2)\sigma_{11}^* - 2(\varkappa+1)(1+m)^2\sigma_{22}^* +$$

$$+(\varkappa+1)(m+1)[(m-1)\sigma_{11}^\infty + (m+3)\sigma_{22}^\infty]$$

$$2\mu(1-m^2)\varepsilon_{12}^* = -(\varkappa + m^2)\sigma_{12}^* + (\varkappa+1)\sigma_{12}^\infty$$

$$2\mu(1-m^2)\varepsilon^* = m(\varkappa+1)(\sigma_{12}^* - \sigma_{12}^\infty) \quad (0 \leqslant m < 1)$$

Подставляя (1.2) в левые части первых трех соотношений (1.11), получим замкнутую систему нелинейных операторных (в общем случае) уравнений для определения зависимостей $\sigma_{kl}^* = \Phi_{kl}(\sigma_{mn}^\infty)$, где Φ_{kl} – соответствующие операторы. Другими словами, (1.2) и (1.11) служат для нахождения по известной истории нагружения $\sigma_{kl}^\infty = \sigma_{kl}^\infty(t)$ на бесконечности аналогичной истории $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^*(t)$ $(k,l=1,2)$ во включении, где t – время или параметр нагружения. Условия разрешимости этой системы относительно $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^*(t)$ рассмотрим ниже. При известных σ_{kl}^* из (1.7) определяется НДС в упругой области S, а из последнего соотношения (1.11) – величина вращения ε^* в S^* как функции t.

Представляет интерес предельный случай $m=1$, когда эллиптическое включение вырождается в щель длины $4R$, заполненную нелинейной средой, и система (1.10) принимает вид $\mu(\overline{C}+\overline{D}) = \varkappa(A+B) - (\varkappa+1)(\Gamma+\Gamma') = -(A+B)+(\varkappa+1)\Gamma$. Отсюда $A+B = 2\Gamma+\Gamma'$ и $\mu(\overline{C}+\overline{D}) = (\varkappa-1)\Gamma-\Gamma'$, т.е.

$$\sigma_{22}^* = \sigma_{22}^\infty, \quad \sigma_{12}^* = \sigma_{12}^\infty, \quad \varepsilon_{11}^* = [(\varkappa+1)\sigma_{11}^\infty + (\varkappa-3)\sigma_{22}^\infty]/(8\mu) \equiv \varepsilon_{11}^\infty \tag{1.12}$$

$$\varepsilon_{12}^* + \varepsilon^* = \sigma_{12}^\infty/(2\mu) \equiv \varepsilon_{12}^\infty$$

Тождества в (1.12) имеют место в силу (1.1), так как на бесконечности среда является упругой.

Таким образом, при $m = 1$ система уравнений для σ_{kl}^* вырождается в одно – третье равенство (1.12), из которого определяется σ_{11}^*, после чего из последнего соотношения (1.12) находится величина ε^*. Из (1.7) и (1.12) следует, что $\varphi(\zeta) = R\Gamma(\zeta+\zeta^{-1}) = \Gamma\omega(\zeta) = \Gamma z$ и $\psi(\zeta) = \Gamma'\omega(\zeta) = \Gamma' z$, т.е. вне щели НДС будет однородным, совпадающим с НДС на бесконечности, причем σ_{22} и σ_{12} сохраняют свои значения и в щели, а σ_{11} терпит разрыв, его скачок $[\sigma_{11}] = \sigma_{11}^\infty - \sigma_{11}^*$.

2. О существовании решения задачи. Как видно из предыдущих рассуждений, вопрос о существовании решения рассматриваемой задачи (т.е. существовании НДС в S и S^*, задаваемых формулами (1.7) и (1.6), (1.2) соответственно) сводится к вопросу о разрешимости первых трех соотношений (1.11), где ε_{kl}^* имеют вид (1.2), относительно $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^*(t)$. Для удобства запишем эти уравнения в более компактном виде:

$$F_i = \alpha_{ij} y_j + \beta_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

$$F_1 = \varepsilon_{11}^*, \quad F_2 = \varepsilon_{22}^*, \quad F_3 = 2\varepsilon_{12}^*, \quad y_1 = \sigma_{11}^*, \quad y_2 = \sigma_{22}^*, \quad y_3 = \sigma_{12}^*$$

$$x_1 = \sigma_{11}^\infty, \quad x_2 = \sigma_{22}^\infty, \quad x_3 = \sigma_{12}^\infty, \quad \alpha_{11} = -\frac{(\varkappa+1)(1-m)}{4\mu(1+m)}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{\varkappa-1}{4\mu}, \quad \alpha_{22} = -\frac{(\varkappa+1)(1+m)}{4\mu(1-m)}, \quad \alpha_{33} = -\frac{\varkappa+m^2}{\mu(1-m^2)}$$

$$\beta_{11} = \frac{(\varkappa+1)(3-m)}{8\mu(1+m)}, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{\varkappa+1}{8\mu}, \quad \beta_{22} = \frac{(\varkappa+1)(3+m)}{8\mu(1-m)}$$

$$\beta_{33} = \frac{\varkappa+1}{\mu(1-m^2)} \quad (0 \leqslant m < 1)$$

(все остальные α_{ij} и β_{ij} равны нулю; суммирование по j от 1 до 3).

Рассмотрим некоторые случаи нелинейности материала включения. Достаточно общим представлением для связей между ε_{kl}^* и σ_{kl}^* в обозначениях (2.1) будет следующее

$$F_i = \alpha_{ij}^* y_j + f_i \quad (i=1,2,3) \tag{2.2}$$

Действительно, если:

а) $f_i = 0$ и матрица $\|\alpha^*_{ij}\|$ – симметричная положительно определенная, то включение является линейно-упругим; при этом α^*_{ij} – компоненты упругих податливостей, которые, например, для изотропной среды вследствие (1.1) имеют вид: $\alpha^*_{11} = \alpha^*_{22} = (\varkappa^* + 1)/(8\mu^*)$, $\alpha^*_{12} = (\varkappa^* - 3)/(8\mu^*)$, $\alpha^*_{33} = 1/\mu^*$ (все остальные $\alpha^*_{ij} = 0$).

в) $\alpha^*_{ij} = 0$ и $f_i = f_i(y_j)$ $(i,\ j = 1,2,3)$ – дифференцируемые функции, причем не обязательно потенциальные, то включение – нелинейно-упругое или упругопластическое, подчиняющееся деформационной теории пластичности с нелинейным, вообще говоря, участком на диаграмме "$\sigma^* - \varepsilon^*$".

с) $\alpha^*_{ij} \neq 0$ и

$$f_i = \begin{cases} 0, & s < \sigma_T \\ \lambda \partial s / \partial y_i, & s \geqslant \sigma_T \end{cases} \tag{2.3}$$

либо

$$\dot{f}_i = \begin{cases} 0, & s < \sigma_T \quad \text{или } s = \sigma_T \quad \text{и } \dot{s} < 0 \\ \lambda \partial s / \partial y_i, & s = \sigma_T \quad \text{и} \quad \dot{s} = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

т.е. f_i – компоненты пластических деформаций, то включение – упругопластическое с линейным начальным участком на упомянутой диаграмме, подчиняющееся деформационной теории (соотношения (2.3), где $s = s(y_i) > 0$ – однородная первой степени выпуклая функция, σ_T – предел текучести, $\lambda = \lambda(s) > 0$, $\lambda'(s) > 0$ – для упрочняющегося материала и $\lambda > 0$ – неопределенный множитель для идеально пластического материала; в последнем случае второе неравенство в (2.3) следует заменить равенством $s = \sigma_T$) или теории течения идеального упругопластического (соотношения (2.4), где $\lambda > 0$ – неопределенный множитель, точка означает дифференцирование по параметру нагружения τ) или упрочняющегося материалов (определяющие уравнения для последнего приведены, например, в [6]).

d) $\alpha^*_{ij} \neq 0$ и f_i – компоненты необратимых деформаций, например, нелинейно-вязких или складывающихся из пластических и вязких (или деформаций ползучести, описываемых более сложными уравнениями, содержащими структурные параметры [7]), то включение является нелинейным вязкоупругим или вязкоупругопластическим соответственно.

Подставляя (2.2) в (2.1), получим

$$A_{ij} y_j + f_i = \beta_{ij} x_j \quad (i = 1,2,3), \quad A_{ij} = \alpha^*_{ij} - \alpha_{ij} \tag{2.5}$$

где матрица $\|A_{ij}\|$ – симметричная положительно определенная, поскольку таковыми являются матрицы $\|\alpha^*_{ij}\|$ и $\|-\alpha_{ij}\|$, так как согласно (2.1) $\alpha_{11} < 0$, $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha^2_{12} = \frac{1}{4}\varkappa\mu^{-2} > 0$, $\alpha_{33} < 0$. Следовательно, существует обратная матрица $\|B_{ij}\|$, такая что $B_{ik}A_{kj} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронеккера).

Покажем, что в отмеченных выше случаях *а*) – *d*) система (2.5) разрешима относительно y_i при обычных предположениях об устойчивости процесса неупругого деформирования [7].

а) Утверждение очевидно, так как решение системы (2.5) имеет вид $y_i = B_{ik}\beta_{kj}x_j$.

в) По известной теореме о неявных функциях для разрешимости (2.5) относительно y_i необходимо, чтобы $J \equiv \det\|A_{ij} + a_{ij}\| \neq 0$, где $a_{ij} = \partial f_i/\partial y_j$. Для этого достаточно, чтобы для приращений напряжений Δy_i и деформаций Δf_i выполнялось условие устойчивости

$$\Delta f_i \Delta y_i \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Действительно, из (2.6) следует [7], что $c_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0$ при любых ξ_i, одновременно не равных нулю, где $c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$. Отсюда $(A_{ij} + c_{ij})\xi_i\xi_j > 0$, т.е. симметричная часть матрицы $\|A_{ij} + a_{ij}\|$ является положительно определенной. Тогда, как показано в [7], и все главные миноры самой матрицы будут положительными, поэтому $J > 0$.

Таким образом, при выполнении (2.6) система (2.5) определяет однозначные зависимости $y_i = y_i(x_j)$, причем, как легко видеть из (2.5), эти функции будут непрерывно дифференцируемыми.

с) Пусть f_i определяются согласно (2.3). Если $s(y_{i0}) \leqslant \sigma_T$, где $y_{i0} = B_{ik}\beta_{kj}x_j$, то $f_i = 0$, т.е. включение находится в упругой области и $y_i = y_{i0}$. Если же $s(y_{i0}) > \sigma_T$, то $f_i \neq 0$, т.е. имеют место пластические деформации, причем выполняется (2.6) [8], поэтому для упрочняющегося материала по аналогии с предыдущим случаем *в*) будем иметь $J > 0$, что обеспечивает существование дифференцируемых функций $y_i = y_i(x_j)$.

Для идеально пластического материала, когда λ из (2.3) – положительный неопределенный множитель, можно использовать следующие соображения. Обратим зависимости (2.3) при $s = \sigma_T$ по аналогии с тем, как это сделано в [7]:

$$y_i = s\partial H/\partial f_i = \sigma_T \partial H/\partial f_i \tag{2.7}$$

где $H = H(f_i)$ – однородная первой степени функция такая, что $sH = y_i f_i$. Из (2.3) и (2.7) следует, что $\lambda = H$.

Подставляя (2.7) в (2.5), будем иметь

$$\sigma_T A_{ij} \partial H/\partial f_j + f_i = \beta_{ij} x_j$$

Эти уравнения однозначно разрешимы относительно f_i ($i = 1, 2, 3$), так как $\det \|\sigma_T A_{ij}\partial^2 H/(\partial f_j \partial f_k) + \delta_{ik}\| = \det\|A_{ij}\| \det \|\sigma_T \partial^2 H/(\partial f_j \partial f_k) + B_{jk}\| > 0$, поскольку матрица $\|A_{ij}\|$ и ее обратная $\|B_{jk}\|$ – положительно определены, а $\|\partial^2 H/(\partial f_j \partial f_k)\|$ – неотрицательна ввиду (2.7) и вытекающего из (2.3) [8] условия (2.6). Тогда из (2.7) однозначно находятся и y_i.

В приведенном выше доказательстве неявно предполагалось, что функции $s = s(y_i)$ и $H = H(f_i)$ являются дважды дифференцируемыми по всем своим аргументам. Этому условию будут удовлетворять, например, следующие достаточно общие (как для изотропных, так и анизотропных сред) представления:

$$s = (\gamma_{ij} y_i y_j)^{1/2}, \quad H = (\theta_{ij} f_i f_j)^{1/2} \tag{2.8}$$

где $\|\gamma_{ij}\|$, $\|\theta_{ij}\|$ – симметричные положительно определенные матрицы, которые, как показано в [9], являются взаимно обратными. В этом случае

$$\partial s/\partial y_i = s^{-1}\gamma_{ij} y_j, \quad \partial^2 s/(\partial y_i \partial y_j) = s^{-1}(\gamma_{ij} - \partial s/\partial y_i \partial s/\partial y_j)$$

Поскольку $s = \sigma_T$, то все эти производные, как легко видеть, будут ограниченными.

Предположим теперь, что материал включения подчиняется теории течения, так что имеют место соотношения (2.4), и что нагружение на бесконечности, например, простое, т.е. $x_i = \tau x_{i0}$ ($0 \leqslant \tau \leqslant 1$, x_{i0} – const). Тогда вследствие (2.5) пластические деформации возникают при значении параметра нагружения τ, равном $\tau_p \equiv \sigma_T s^{-1}(y_{i0})$, $y_{i0} = B_{ik}\beta_{kj}x_{j0}$. Для описания процесса упругопластического деформирования при $\tau \geqslant \tau_p$ из (2.4) и (2.5) будем иметь задачу Коши

$$\dot{y}_i + B_{ij}\lambda \partial s/\partial y_j = y_{i0}, \quad y_i(\tau_p) = y_{i0}\tau_p \tag{2.9}$$

для существования и единственности решения которой, как известно, достаточно ограниченности всех производных $\partial(\lambda\partial s/\partial y_j)/\partial y_i$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Неизвестный множитель λ найдем из (2.9), умножая первое соотношение на $\partial s/\partial y_i$, суммируя по i и учитывая, что $\dot{y}_i \partial s/\partial y_i = 0$: $\lambda = z_k y_{k0}/(B_{ij} z_i z_j)$, $z_i \equiv \partial s/\partial y_i$.

Отсюда видно, что для корректности задачи (2.9) достаточно ограниченности первых и вторых производных функций $s = s(y_i)$, что будет иметь место, если последняя определяется согласно (2.8).

d) В этом случае систему (2.5) следует записать в скоростях аналогично (2.9)

$$\dot{y}_i + B_{ij}\dot{f}_j = B_{ik}\beta_{kj}\dot{x}_j \tag{2.10}$$

где точка означает дифференцирование по времени t. Компоненты $\dot{f}_i$ могут зависеть не только от y_j и f_j, но и от истории нагружения. Например, при описании процесса ползучести металлических материалов имеем [7]:

$$\dot{f}_i = \dot{f}_i(y_j, q_k) \quad (i, j = 1, 2, 3; \; k = 1, 2, \ldots, p) \tag{2.11}$$

где q_k – структурные параметры, подчиняющиеся кинетическим уравнениям

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(y_i, f_i, q_l) \quad (k, l = 1, 2, \ldots, p; \; i = 1, 2, 3) \tag{2.12}$$

Соотношения (2.10)–(2.12) образуют систему уравнений для нахождения y_i, f_i и q_k, к которой необходимо добавить начальные условия для f_i и q_k при $t = 0$, тогда аналогичные условия для y_i определятся из (2.5). Корректность этой задачи будет обеспечена, если функции (2.11) и (2.12) будут удовлетворять известному условию Липшица по всем своим аргументам.

Заметим, что в общем случае, когда f_i являются компонентами неупругих деформаций, для единственности решения задачи (2.10) с соответствующими начальными условиями для f_i и, если это необходимо, для других параметров (например, q_k из (2.11) и (2.12)), характеризующих состояние материала включения в момент $t = 0$, достаточно выполнения постулата устойчивости, аналогичного (2.6):

$$\int_0^t \Delta\dot{f}_i \Delta\dot{y}_i \, dt \geqslant 0 \tag{2.13}$$

при любом $t > 0$. Справедливость этого утверждения доказана в [7], где проведено исследование условия (2.13) применительно к определяющим уравнениям ползучести вида (2.11) и (2.12). Кроме того, (2.13) имеет место и в теории пластичности как для идеально пластических (поскольку $\Delta\dot{f}_i \Delta\dot{y}_i \geqslant 0$ вследствие (2.4)), так и упомянутого в [9] одного класса упрочняющихся материалов.

Отметим также, что предельный случай $m = 1$ (щель, заполненная нелинейной средой) ввиду (1.12) сводится к разрешимости одного уравнения: $F_1 = \varepsilon_{11}^{\infty}$ относительно y_1 (y_2 и y_3 – известны). Поэтому все проведенные выше рассуждения упрощаются, например, в b) достаточно, чтобы $a_{11} \geqslant 0$, а в c) y_1 однозначно определяется из условия $s(y_1, y_2, y_3) = \sigma_T$. Во всех случаях $a) - d)$ условия устойчивости (2.6) или (2.13) обеспечивают единственность решения упомянутого уравнения.

3. О единственности решения задачи. Покажем, что полученное решение для плоскости с эллиптическим включением будет единственным, т.е. при указанных внешних воздействиях и отмеченных выше ограничениях на связи между ε_{kl}^* и σ_{kl}^* в области S^* реализуется однородное НДС, определяемое из системы (1.11). Предположим, что существует еще одно решение; их разности будем обозначать с помощью символа Δ. Вместо S будем пока рассматривать конечную упругую область S_r, ограниченную окружностью L_r радиуса r и контуром L. Тогда вследствие условий на L и известного уравнения виртуальных работ [6, 7] будем иметь

$$\int\limits_{S_r} \Delta\varepsilon_{kl}\Delta\sigma_{kl}dS + \int\limits_{S^*} \Delta\varepsilon^*_{kl}\Delta\sigma^*_{kl}dS = \int\limits_{L_r} \Delta u_k \Delta p_k ds \tag{3.1}$$

где $\Delta p_k = \Delta\sigma_{kl}n_{l0}$, n_{k0} – компоненты единичного вектора внешней к L_r нормали.

Далее используем рассуждения, аналогичные приведенным в [4]. Поскольку S – упругая область и $\Delta\Gamma = \Delta\Gamma' = 0$ (Γ и Γ' определены в (1.4)), то напряжения $\Delta\sigma_{kl}$ при возрастании $|z|$ будут убывать как $|z|^{-2}$, а перемещения Δu_k ограничены, следовательно, интеграл в правой части (3.1) будет порядка r^{-1}. Поэтому, устремляя r к бесконечности, получим из (3.1)

$$\int\limits_{S} \Delta\varepsilon_{kl}\Delta\sigma_{kl}dS + \int\limits_{S^*} \Delta\varepsilon^*_{kl}\Delta\sigma^*_{kl}dS = 0 \tag{3.2}$$

Заметим, что в (3.2) вместо компонент деформаций (и/или напряжений) можно записать их скорости.

Подставляя (2.2) в (3.2) и учитывая (2.6), получим, что в рассмотренных выше случаях a), b) и c) (в последнем – когда имеют место равенства (2.3)) НДС определяется однозначно во всей плоскости, т.е. $\Delta\sigma_{kl} = 0$ в S и $\Delta\sigma^*_{kl} = 0$ в S^*. В остальных случаях, интегрируя записанное для напряжений и скоростей деформаций соотношение (3.2) по времени от нуля до текущего момента t и учитывая (2.13) и равенства $\Delta\sigma_{kl}\,|_{t=0} = \Delta\sigma^*_{kl}\,|_{t=0} = 0$ (которые следуют из единственности решения соответствующих моменту $t = 0$ упругой или упругопластической задач, отмеченных выше), по аналогии с [7] найдем, что напряжения однозначны всюду в $S \cup S^*$ при $t > 0$.

4. Некоторые примеры. Рассмотрим плоскость с изотропным упругопластическим эллиптическим ($0 \leqslant m < 1$) включением в случае, когда действующие на бесконечности усилия N_1 и N_2 параллельны координатным осям ox и oy, т.е. при $\alpha = 0$. Упругие постоянные α^*_{ij} из (2.2) определены в разделе a) пункта 2, а скорости деформаций подчиняются соотношениям (2.4), в которых функция s имеет вид (2.8), где можно положить

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = (\alpha_*^2 + \beta_*^2)/4, \quad \gamma_{12} = (\alpha_*^2 - \beta_*^2)/4, \quad \gamma_{33} = \beta_*^2$$

а все остальные $\gamma_{ij} = 0$. Действительно, для обобщенного плоского напряженного состояния при $\alpha_* = 1$ и $\beta_* = \sqrt{3}$ имеем критерий Мизеса, а для плоской деформации несжимаемого упругопластического тела при $\alpha_* = 0$ и $\beta_* = 2$ – критерии Треска и Мизеса, которые отличаются только константой в условии $s = \sigma_T$ [8]. Заметим, что в обоих случаях $\alpha_*^2 + \beta_*^2 = 4$, однако в дальнейшем α_* и β_* будем считать не связанными между собой, но удовлетворяющими неравенству $\alpha_*^2 - \beta_*^2 < 0$. Тогда для s получим

$$s = (\alpha_*^2 A^2 + \beta_*^2 B\bar{B})^{1/2} \tag{4.1}$$

где A и B определены в (1.6).

Считая, что нагружение на бесконечности простое ($x_i = \tau x_{i0}$), из (2.9) при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_p$ найдем

$$y_i = \tau y_{i0}, \quad y_{i0} = p_{ij}x_{j0} \tag{4.2}$$

$$p_{11} = (\varkappa + 1)[(1-m)(\varkappa^* - m)\xi + (1+m)(\varkappa - m + 2)]/(2\Delta)$$

$$p_{12} = (\varkappa+1)(1+m)[(2+m-\varkappa^*)\xi + (\varkappa - m - 2)]/(2\Delta)$$

$$p_{21} = (\varkappa+1)(1-m)[(2-m-\varkappa^*)\xi + (\varkappa + m - 2)]/(2\Delta)$$

$$p_{22} = (\varkappa+1)[(1+m)(\varkappa^* + m)\xi + (1-m)(\varkappa + m + 2)]/(2\Delta)$$

$$p_{33} = (\varkappa+1)[(1-m^2)\xi + \varkappa + m^2]^{-1}, \quad \xi = \mu/\mu^*$$

$$\Delta = (\varkappa^*-1)(1-m^2)\xi^2 + [2(1+m^2\varkappa) + (\varkappa^*-1)(\varkappa+m^2)]\xi + 2\varkappa(1-m^2) > 0$$

(все остальные $p_{ij} = 0$).

Из (4.2) следует, что $y_3 = 0$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_p$, поскольку $x_{30} = 0$. Значение τ_p параметра нагружения, соответствующее началу пластического течения, определяется из (4.1) и (4.2):

$$\tau_p = \sigma_T(\alpha_*^2 A_0^2 + \beta_*^2 B_0^2)^{-1/2}, \quad 2A_0 = y_{10} + y_{20}, \quad 2B_0 = y_{20} - y_{10} \tag{4.3}$$

Из (2.9) и (4.2) вытекает, что $y_3 = 0$ и при $\tau > \tau_p$, а для величин A и B ($B = \overline{B}$ – действительная) получим задачу Коши

$$\dot{A} = \lambda_1(-q_{11}\alpha_*^2 A + q_{12}\beta_*^2 B) + A_0 \tag{4.4}$$

$$\dot{B} = \lambda_1(q_{12}\alpha_*^2 A - q_{22}\beta_*^2 B) + B_0$$

$$A(\tau_p) = A_0\tau_p, \quad B(\tau_p) = B_0\tau_p$$

$$\lambda_1 = 2\mu\lambda\sigma_T^{-1}\Delta^{-1}, \quad q_{11} = (1-m^2)\xi + \varkappa + m^2, \quad q_{12} = m(\varkappa+1)$$

$$q_{22} = (1-m^2)(\varkappa^*-1)\xi/2 + 1 + m^2\varkappa$$

Условия пластичности $s = \sigma_T$ удовлетворим, полагая $\alpha_* A = \sigma_T \sin\chi$ и $\beta_* B = \sigma_T \cos\chi$. Тогда, подставляя в (4.4) и вводя обозначение $\chi(\tau_p) = \chi_p$, найдем

$$\dot{\chi}\cos\chi = \lambda_1\alpha_*(-q_{11}\alpha_*\sin\chi + q_{12}\beta_*\cos\chi) + \tau_p^{-1}\sin\chi_p$$

$$-\dot{\chi}\sin\chi = \lambda_1\beta_*(q_{12}\alpha_*\sin\chi - q_{22}\beta_*\cos\chi) + \tau_p^{-1}\sin\chi_p \tag{4.5}$$

Исключая из (4.5) величину λ_1 (ее легко можно найти из (4.5) как функцию χ, причем условие $\lambda_1 > 0$ приводит к неравенству $\cos(\chi - \chi_p) > 0$) получим

$$\tau_p\dot{\chi}_1 = \frac{\eta\cos(\chi_1 + \chi_{**}) - \sin\chi_1}{1 - \eta\sin(2\chi_1 + \chi_{**})}, \quad \chi_1(\tau_p) = 0 \tag{4.6}$$

$$\chi_1 = \chi - \chi_p, \quad \chi_{**} = 2\chi_p - \chi_*, \quad \cos\chi_* = Q_1 Q^{-1}, \quad \sin\chi_* = Q_2 Q^{-1}$$

$$\eta = P^{-1}Q \, (0 < \eta < 1), \quad Q = (Q_1^2 + Q_2^2)^{1/2}, \quad P = q_{11}\alpha_*^2 + q_{22}\beta_*^2 > 0$$

$$Q_1 = 2q_{12}\alpha_*\beta_*; \quad Q_2 = q_{22}\beta_*^2 - q_{11}\alpha_*^2$$

(неравенство $\eta < 1$ следует из того, что $P^2 - Q^2 = 4\alpha_*^2\beta_*^2(q_{11}q_{22} - q_{12}^2) = 2\alpha_*^2\beta_*^2(1-m^2)\Delta > 0$).

Точное решение задачи (4.6) имеет вид

$$[1 + \eta\sin(\chi_{**} - 2\chi_0)]\ln\left|\frac{1+\sin(\chi_1+\chi_0)}{\cos(\chi_1+\chi_0)}\frac{\cos\chi_0}{1+\sin\chi_0}\right| + \tag{4.7}$$

$$+2\eta[\cos(\chi_1 + \chi_{**} - \chi_0) - \cos(\chi_{**} - \chi_0)] = G(\tau\tau_p^{-1} - 1)$$

$$\cos\chi_0 = G^{-1}\eta\cos\chi_{**}, \quad \sin\chi_0 = G^{-1}F_*$$

$$G = (1+2\eta\sin\chi_{**}+\eta^2)^{1/2}, \quad F_* = 1+\eta\sin\chi_{**}$$

Однако качественное исследование характера изменения величины χ_1 удобнее проводить, исходя из самого уравнения (4.6), которое можно записать следующим образом:

$$\tau_p[\eta\sin(\chi_1+\chi_{**})+\cos\chi_1]^\bullet = F(\chi_1) \tag{4.8}$$

$$F(\chi_1) = [\eta\cos(\chi_1+\chi_{**})-\sin\chi_1]^2[1-\eta\sin(2\chi_1+\chi_{**})]^{-1}$$

$$0 \leqslant F(\chi_1) \leqslant F_*$$

(величина F_* определена в (4.7)).

Легко видеть, что наибольшее значение функции $F(\chi_1)$, равное F_*, достигается при $\cos\chi_1 = 0$.

Интегрируя (4.8) по τ от τ_p до текущего значения и учитывая неравенства из (4.8) и равенство $\chi_1(\tau p) = 0$, получим

$$F_* \leqslant \eta\sin(\chi_1+\chi_{**})+\cos\chi_1 \leqslant F_*\tau\tau_p^{-1} \tag{4.9}$$

Из (4.9) следует, что $\eta\sin\chi_1\cos\chi_{**} \geqslant F_*(1-\cos\chi_1) \geqslant 0$, т.е. $\sin\chi_1$ и $\cos\chi_{**}$ – одного знака, а при $\cos\chi_{**} = 0$ имеем $\cos\chi_1 = 1$, т.е. $\sin\chi_1 = 0$.

Неравенствам (4.9) можно придать вид

$$\sin\chi_0 \leqslant \sin(\chi_1+\chi_0) \leqslant \sin\tilde{\chi}_0$$

$$\tilde{\chi}_0 = \begin{cases} \arcsin(\tau\tau_p^{-1}\sin\chi_0) & \text{при} \quad \tau\tau_p^{-1}\sin\chi_0 \leqslant 1 \\ \pi/2 & \text{при} \quad \tau\tau_p^{-1}\sin\chi_0 > 1 \end{cases}$$

Отсюда следует, что поскольку $\sin\chi_0 > 0$ (как видно из (4.7)), то $0 \leqslant \chi_1 \leqslant \tilde{\chi}_0 - \chi_0$ при $\cos\chi_0 > 0$; $\pi - \chi_0 - \tilde{\chi}_0 \leqslant \chi_1 \leqslant 0$ при $\cos\chi_0 < 0$; $\chi_1 = 0$ при $\cos\chi_0 = 0$.

Из (4.8) вытекает, что $\sin(\chi_1 + \chi_0)$ – возрастающая функция τ, поэтому в перечисленных выше случаях $\sin\chi = \alpha_*\sigma_T^{-1}A$ соответственно возрастает, убывает и остается постоянным при $\tau > \tau_p$.

В заключение этого пункта рассмотрим вкратце предельную ситуацию при $m = 1$, когда включение представляет собой щель, заполненную идеальным упругопластическим материалом, а на бесконечности действует только усилие N_2, т.е. в прежних обозначениях: $x_i = \tau x_{i0}$ ($x_{10} = x_{30} = 0$, $x_{20} \neq 0$). В этом случае из (1.12) и (4.1) найдем

$$\tau_p = 2\sigma_T[\alpha_*^2(b_0+1)^2+\beta_*^2(b_0-1)^2]^{-1/2}\,|\,x_{20}\,|^{-1}$$

$$y_1 = b_0x_{20}\tau \quad (0 \leqslant \tau \leqslant \tau_p), \qquad b_0 = \frac{(3-\varkappa^*)\xi-(3-\varkappa)}{\xi(\varkappa^*+1)} \tag{4.10}$$

$$A_4y_1 = \{A_3\tau + A_1\tau_p[1-A_2A_1^{-2}(\tau^2\tau_p^{-2}-1)]^{1/2}\}x_{20} \quad (\tau_p \leqslant \tau \leqslant 1)$$

$$A_1 = A_4b_0 - A_3, \quad A_2 = 4\alpha_*^2\beta_*^2, \quad A_3 = \beta_*^2-\alpha_*^2, \quad A_4 = \alpha_*^2+\beta_*^2$$

Величина y_1 при $\tau_p \leqslant \tau \leqslant 1$ будет действительной, если $4A_4\sigma_T^2 - A_2x_{20}^2 \geqslant 0$.

Поскольку $A_2 \geqslant 0$ и $A_3 > 0$ (справедливость последнего условия предполагалась выше), из (4.10) видно, что при $A_1 < 0$, т.е. $b_0 < A_3A_4^{-1}$, функция $y_1 = y_1(\tau)$ при $\tau > \tau_p$

будет монотонной (возрастающей и убывающей при $x_{20} > 0$ и $x_{20} < 0$ соответственно). При этом возможны следующие ситуации:

1) если $b_0 < 0$, то $\operatorname{sign} y_1 = -\operatorname{sign} x_{20}$ при $0 < \tau \leqslant \tau_p$, а при $\tau > \tau_p$ $|y_1|$ убывает и может произойти смена знака y_1, если $4\sigma_T^2 - A_4 x_{20}^2 \leqslant 0$;

2) если $0 < b_0 < A_3 A_4^{-1}$, то $\operatorname{sign} y_1 = \operatorname{sign} x_{20}$ при $0 < \tau \leqslant \tau_p$ и $\operatorname{sign} \dot{y}_1 = \operatorname{sign} x_{20}$ при $\tau > \tau_p$;

3) если $b_0 = 0$, т.е. $A_1 = -A_3 < 0$, то $y_1 = 0$ при $0 < \tau \leqslant \tau_p$ и $\operatorname{sign} \dot{y}_1 = \operatorname{sign} x_{20}$ при $\tau > \tau_p$.

Если $A_1 > 0$, т.е. $b_0 > A_3 A_4^{-1} > 0$, то $\operatorname{sign} y_1 = \operatorname{sign} x_{20}$ при $0 < \tau \leqslant 1$, при этом:

1) если $b_0 \geqslant A_4 A_3^{-1}$, то $\operatorname{sign} \dot{y}_1 = \operatorname{sign} x_{20}$ при $\tau = \tau_p + 0$ и $\operatorname{sign} \ddot{y}_1 = -\operatorname{sign} x_{20}$ при $\tau > \tau_p$, т.е. $\dot{y}_1$ может обратиться в нуль, так что функции $y_1 = y_1(\tau)$ достигнет соответствующего экстремума (это возможно в том случае, если $4A_3^2\sigma_T^2 - A_2 A_4 x_{20}^2 < 0$);

2) если $A_3 A_4^{-1} < b_0 \leqslant A_4 A_3^{-1}$, то $\operatorname{sign} \dot{y}_1 = -\operatorname{sign} x_{20}$ при $\tau_p < \tau \leqslant 1$.

Если $A_1 = 0$, т.е. $b_0 = A_3 A_4^{-1}$, то $\operatorname{sign} y_1 = \operatorname{sign} x_{20}$ при $0 < \tau \leqslant \tau_p$, а при $\tau > \tau_p$ решение не существует, так как соответствующее подкоренное выражение в (4.10) становится отрицательным.

Рассмотрение общего случая для $m = 1$, когда все $x_{i0} \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$), не вызывает принципиальных затруднений, однако приводит к более громоздким выражениям для τ_p и y_1.

5. О включении, форма которого отлична от эллиптической. Выясним, возможна ли реализация однородного НДС при указанных внешних воздействиях во включении иной формы, т.е. отличной от эллиптической. Этот вопрос затрагивался в [3], где приведены соображения в пользу необходимости эллиптичности для геометрических нелинейных упругих среды и включения. Покажем, что в рассматриваемом геометрически линейном случае изотропной упругой среды и физически нелинейного включения отмеченным свойством обладает только эллиптическое включение и никакое другое.

Пусть границей области S^* служит простой замкнутый контур L, так что конформное отображение области S на внешность единичной окружности имеет вид [4]:

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} m_k \zeta^{-k}\right) \tag{5.1}$$

которое при $m_1 = m$, $m_k = 0$ ($k \neq 1$) совпадает с (1.3).

Функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ по-прежнему имеют вид (1.4), где $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ в общем случае определяются следующим образом [4]:

$$\varphi_0(\zeta) = R\sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k}, \quad \psi_0(\zeta) = R\sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \tag{5.2}$$

Предположим, что НДС в области S^* – однородное, т.е. имеют место равенства (1.6) и (1.8). Тогда условия непрерывности перемещений и нагрузок на L примут вид [4]:

$$\begin{aligned} &\varkappa\overline{\varphi(\sigma)} - F_0(\sigma) = \mu[\bar{c}\,\overline{\omega(\sigma)} + \bar{D}\omega(\sigma)] \\ &\overline{\varphi(\sigma)} + F_0(\sigma) = A\overline{\omega(\sigma)} + B\omega(\sigma) \\ &F_0(\sigma) = \overline{\omega(\sigma)}\varphi'(\sigma)/\omega'(\sigma) + \psi(\sigma) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Складывая эти равенства, получим необходимое условие для граничного значения функции $\overline{\varphi(\zeta)}$, совпадающее с (1.9). Подставляя (5.1), (5.2) и (1.4) в (1.9), будем иметь

$$(1+\varkappa)\left(\Gamma\sigma^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{a}_k\sigma^k\right)=(A+\mu\overline{C})\left(\sigma^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{m}_k\sigma^k\right)+(B+\mu\overline{D})\left(\sigma+\sum_{k=1}^{\infty}m_k\sigma^{-k}\right)$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях σ слева и справа, получим

$$\begin{gathered}(1+\varkappa)\Gamma=(A+\mu\overline{C})+m_1(B+\mu\overline{D})\\ (1+\varkappa)\bar{a}_1=(A+\mu\overline{C})\overline{m}_1+(B+\mu\overline{D})\\ (1+\varkappa)\bar{a}_k=(A+\mu\overline{C})\overline{m}_k,\quad 0=(B+\mu\overline{D})m_k\quad(k\geqslant 2)\end{gathered}\tag{5.4}$$

Как видно из последнего соотношения (5.4), возможны две ситуации:

1) либо все $m_k = 0$, откуда и все $a_k = 0$ ($k \geqslant 2$), что соответствует рассмотренному выше случаю эллиптического контура L;

2) либо, если хотя бы один из коэффициентов m_k при $k \geqslant 2$ отличен от нуля, $B+\mu\overline{D}=0$ или после подстановки значений B и $\overline{D}$ из (1.6) и (1.8):

$$\sigma_{22}^*-\sigma_{11}^*+2i\sigma_{12}^*=2\mu(\varepsilon_{22}^*-\varepsilon_{11}^*+2i\varepsilon_{12}^*)\tag{5.5}$$

Отсюда видно, что область S^* – упругая (по крайней мере, по отношению к изменению формы), причем модули сдвига среды и включения совпадают $\mu = \mu^*$.

При условии (5.5) из первых соотношений системы (5.4) следуют равенства

$$\varepsilon^*=0,\quad(1+\varkappa)(\sigma_{11}^\infty+\sigma_{22}^\infty)/4=(\sigma_{11}^*+\sigma_{22}^*)/2+\mu(\varepsilon_{11}^*+\varepsilon_{22}^*),\quad a_k=\Gamma m_k\quad(k\geqslant 1)\tag{5.6}$$

(ε^* – величина вращения).

Из (1.4), (5.2) и (5.6) вытекает, что $\varphi = \Gamma z$. Подставляя (5.1), (5.2), (1.4) и равенство $\varphi(\sigma) = \Gamma\omega(\sigma)$ в (5.3), будем иметь

$$\Gamma'\sigma+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sigma^{-k}=(A-2\Gamma)\left(\sigma^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{m}_k\sigma^k\right)+B\left(\sigma+\sum_{k=1}^{\infty}m_k\sigma^{-k}\right)$$

Отсюда, учитывая, что существует $m_k \neq 0$ ($k \geqslant 2$), получим $A - 2\Gamma = 0$, $B = \Gamma'$, $b_k = Bm_k$ ($k \geqslant 1$), т.е. $\sigma_{kl}^*=\sigma_{kl}^\infty$ ($k, l = 1, 2$) и $\psi = \Gamma' z$. Тогда из (5.6) и равенства $\mu = \mu^*$ следует, что $4\mu^*(\varepsilon_{11}^*+\varepsilon_{22}^*)=(\varkappa-1)(\sigma_{11}^*+\sigma_{22}^*)$, т.е. и по отношению к изменению объема включение также ведет себя упруго, причем сопоставление последнего равенства с законом Гука в форме (1.1) для области S^* показывает, что $\varkappa^* = \varkappa$. Таким образом, характеристики среды и включения совпадают и мы имеем дело с однородной упругой плоскостью, в которой реализуется однородное НДС, характеризуемое функциями $\varphi = \Gamma z$ и $\psi = \Gamma' z$. Следовательно, включение неэллиптической формы, отличающееся от среды своими прочностными свойствами, в данной ситуации невозможно.

Утверждение доказано.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00551).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вакуленко А.А., Севостьянов И.Б.* Включение с нелинейными свойствами в упругой среде. Исследования по механике строительных конструкций и материалов. Л.: ЛИСИ, 1991. С. 8–16.
2. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963. 247 с.
3. *Черных К.Ф.* Несколько замечаний к задаче Эшелби // Изв. АН. МТТ. 1994. № 4. С. 47–50.

4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
6. *Койтер В.Т.* Общие теоремы теории упругопластических сред. М.: ИЛ, 1961. 79 с.
7. *Цвелодуб И.Ю.* Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991. 201 с.
8. *Цвелодуб И.Ю.* Обратная упругопластическая задача // Изв. АН. МТТ. 1998. № 1. С. 35–43.
9. *Цвелодуб И.Ю.* Обратные задачи неупругого деформирования // Изв. АН. МТТ. 1995. № 2. С. 81–92.

Новосибирск

Поступила в редакцию
2.08.1999