МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2000

УДК 539.374

 В.А. КОЛЕСНИКОВ

РАСШИРЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Цель настоящей работы – получение оценок несущей способности скважин цилиндрической формы в грунтовых средах в момент их образования, а также под действием высокого технологического внутреннего давления.

Скважина в грунтовой среде моделируется цилиндрической полостью в упругопластической среде. Последняя образуется цилиндром, одновременно расширяющимся с постоянной скоростью и движущимся вдоль своей оси. Среда предполагается здесь уплотняющейся. В таком виде она впервые была предложена А.Ю. Ишлинским. В дальнейшем полное обоснование модели такой среды было сделано в [1]. По сдвигу среда описывается полными уравнениями Прандтля – Рейса (они содержат как конвективные, так и "Яумановы" члены). При выборе модели среды будем руководствоваться соображениями пригодности ее использования для описания поведения цилиндрических скважин в грунтах.

Аналогичные задачи рассматривались ранее. Вначале такая задача была рассмотрена в [2]. Там она решалась без учета движения вдоль оси, среда была идеальная – "пластический газ". Для упругопластической среды Сен-Венана – Мизеса без учета касательных напряжений на поверхности, исследование проводилось в [3]. В более полной постановке для уплотняющейся среды Сен-Венана – Мизеса задача была рассмотрена в [4]. Для вязкопластических сред аналогичные проблемы изучались в [5]. В квазистатическом режиме применительно к среде, описываемой уравнениями Прандтля – Рейса, в случае малых деформаций подобная задача решена в [6] и [7].

Здесь построено аналитическое решение, которое представляет собой комбинацию ударной волны, области течения упругого несжимаемого материала, упругой поперечной и пластической волн. В пластической области решение сведено к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. В зависимости от параметров задачи рассмотрены различные структуры решения. Определено напряженно-деформированное состояние в окрестности скважины.

Рассматриваемая среда предполагается уплотняющейся, под этим понимается следующее. Обозначим деформацию объема и давление через $\vartheta = 1 - \rho_0/\rho$ и $p = -\sigma_{ii}/3$, здесь ρ_0 – начальная, ρ – текущая плотности, σ_{ij} – компоненты напряжения. Объемное деформирование происходит по схеме, представленной на фиг. 1. Среда при сколь угодно малом возмущении переходит из состояния с плотностью ρ_0 в состояние с плотностью ρ, которая при дальнейшем увеличении или уменьшении давления остается постоянной, а материал среды несжимаемым.

По сдвигу среда описывается так. Девиаторные компоненты напряжения s_{ij} и скорости деформаций e_{ij} связаны уравнениями Прандтля – Рейса

$$G\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right) = Ds_{ij}/Dt + \lambda s_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij} p, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad \lambda \geqslant 0$$

$$Ds_{ij} / Dt = ds_{ij} / dt + s_{kj}\omega_{ki} + s_{ik}\omega_{kj}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial v_i / \partial x_j - \partial v_j / \partial x_i)$$

Здесь v_i – компоненты скорости, G – модуль сдвига, d_{ij} – символ Кронекера, D/Dt – производная по Яуману, d/dt – полная производная по времени. Значения $\lambda > 0$ отвечают пластическому состоянию, при $\lambda = 0$ среда упруга и подчиняется закону Гука.

Условие пластичности берется в форме Мизеса $s_{ij}s_{ij} = 2\tau_s^2$, где τ_s – константа текучести.

Искомые функции удовлетворяют уравнениям сохранения импульса

$$\rho\, d\mathbf{v}/dt = -\mathrm{grad}p + \mathrm{div}\, S \tag{1}$$

и условию несжимаемости

$$\mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0$$

Здесь $\mathbf{v}$ – скорость частиц среды, p – давление, S – девиатор напряжения.

В качестве начальных принимаются условия $\mathbf{v} = 0$, $\sigma_{ij} = 0$ при $t = 0$.

Пусть при $t < 0$ безграничная среда покоится и ненапряжена. При $t = 0$ от некоторой прямой начинает расширяться с постоянной скоростью c цилиндрическая поверхность, сообщая такую же скорость соприкасающимся с ней частицам среды. К образующейся таким образом цилиндрической границе кроме того приложено касательное напряжение, т.е. движение вызывается расширением по закону $r = ct$ жесткого шероховатого цилиндра, который как бы расталкивает среду и одновременно двигается вдоль своей оси. Упомянутое значение касательного напряжения есть напряжение трения.

Задача рассматривается в эйлеровой цилиндрической системе координат r, φ, z; за ось z принимается ось цилиндра. Предполагается, что искомые функции не зависят от переменной z. В силу постоянства скорости расширения цилиндра задача будет автомодельной, т.е. все искомые функции зависят от отношения r/t.

На поверхности цилиндра ставятся следующие условия. Радиальная скорость частиц v_r удовлетворяет соотношению

$$v_r = c \tag{2}$$

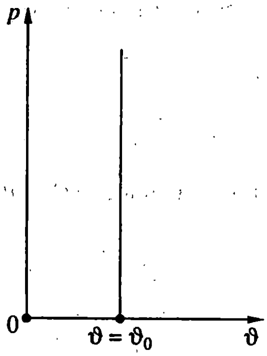
Величина s_{rz}, ввиду предполагаемого проскальзывания частиц среды вдоль поверхности цилиндра, задается законом сухого трения, если она меньше предела текучести и равной ему в противном случае

$$s_{rz} = \pm \min(\tau_s, \nu |\sigma_{rr}|) \tag{3}$$

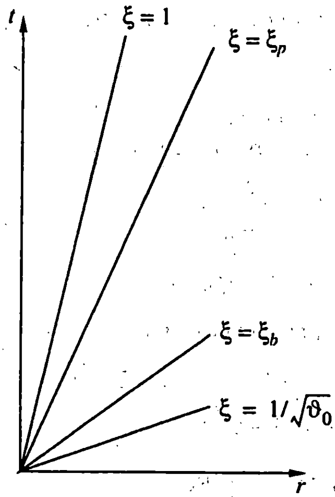
При этом знак в последнем соотношении выбирается из тех соображений, что движение цилиндра происходит в отрицательном направлении оси z. Граничное условие такого типа реализуется при достаточно больших скоростях движения цилиндра вдоль своей оси.

Отметим также, что для решения поставленной здесь задачи возможен приближенный подход, основанный на решении задачи о косом ударе [8], заданном нормальной скоростью и касательным напряжением.

Аналогично [9, 10] решение задачи в зависимости от соотношений между параметрами среды и скоростью расширения цилиндра строится из комбинации ударной волны, области течения несжимаемого упругого материала, упругой поперечной и



Фиг. 1



Фиг. 2

пластической волн. Пластическая область примыкает к поверхности цилиндра, упругая расположена за ней. На границе пластической и упругой зон $r = r_p$ предполагается выполнение следующих условий

$$[v_z] = 0, \qquad [s_{rz}] = 0$$

$$[s_{ij}s_{ij}] = 0, \qquad I = s_{ij}s_{ij} = 2\tau_s^2 \tag{4}$$

Причем второе соотношение вытекает из условия сохранения импульса в проекции его на ось z при выполнении первого.

Расположение границы зон зависит от величины параметров среды ϑ_0, G, τ_s, скорости расширения c и определяется в ходе решения задачи.

Характерным для настоящей задачи обстоятельством, принимая во внимание закон объемного деформирования в среде, является обязательное наличие ударной волны. На ее фронте выполняются условия

$$\rho(v_r - V) = -\rho_0 V, \qquad \sigma_{rr} = -\rho_0 V v_r \tag{5}$$

Здесь V – скорость ударного фрота, σ_{rr} – радиальное напряжение.

Другим существенным моментом является возможность определения всюду за ударной волной, в силу принятой модели среды, радиальной скорости v_r. Действительно, условие несжимаемости в выбранной системе координат дает

$$\partial v_r/\partial r + v_r/r = 0$$

Это уравнение совместно с условием (2) на поверхности цилиндра, при $r = ct$, приводит к соотношению

$$v_r = c^2 t/r \tag{6}$$

Последнее соотношение позволяет, пользуясь (5), вычислить положение ударного фронта, его скорость и радиальные напряжения на нем. Переписав первое соотношение (5) в виде $v_r = \vartheta_0 V$ с помощью (6), имеем

$$r_* = ct/\sqrt{\vartheta_0}, \qquad V = c/\sqrt{\vartheta_0}$$

Здесь r_* – радиус ударного фронта, ϑ_0 – предельное значение объемного сжатия, при котором происходит "упаковка" материала среды. Согласно второму соотношению (5):

$$\sigma_{rr} = -\rho_0 c^2 \tag{7}$$

на фронте ударной волны.

Перейдем к автомодельной переменной $\xi = r/ct$ и нормируем неизвестные. Пусть

$$v = v_r/c = 1/\xi, \quad w = v_z/c$$

$$s_r = s_{rr}/\tau_s, \quad s_\varphi = s_{\varphi\varphi}/\tau_s, \quad s_z = s_{zz}/\tau_s$$

$$\tau = s_{rz}/\tau_s, \quad \sigma = \sigma_{rr}/\rho c^2$$

Решение в пластической зоне удовлетворяет полным уравнениям Прандтля – Рейса

$$\begin{gathered}
-2/\xi = \Lambda s_r + m((1-\xi^2)s_r' + \xi\tau w') \\
\xi w' = \Lambda\tau + m((1-\xi^2)\tau' + \xi(s_r - s_z)w'/2) \\
2/\xi = \Lambda s_\varphi + m(1-\xi^2)s_\varphi' \\
0 = \Lambda s_z + m((1-\xi^2)s_z' - \xi\tau w') \\
\Lambda = \xi\tau w' + (s_\varphi - s_r)/\xi, \quad s_\varphi + s_r + s_z = 0 \\
\Lambda > 0
\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $m = \tau_s/G$, штрихом обозначено дифференцирование по ξ. Кроме того решение удовлетворяет условию текучести Мизеса

$$s_r^2 + s_\varphi^2 + s_z^2 + 2\tau^2 = 2 \tag{9}$$

и проекции уравнения сохранения импульса на ось z:

$$n(\xi\tau' + \tau) = (1-\xi^2)w' \tag{10}$$

где $n = \tau_s/\rho c^2$. Из четырех уравнений Прандтля – Рейса, с учетом условия текучести и соотношения для девиаторов, независимыми оказываются только два. Обозначая $s_z = -2q$, $s_\varphi - s_r = 2s$, в качестве независимых выберем второе и четвертое уравнения (8):

$$\begin{gathered}
\xi w' = \Lambda\tau + m((1-\xi^2)\tau' + \xi(s-3q)w'/2) \\
0 = \Lambda q + m((1-\xi^2)q' + \xi\tau w'/2)
\end{gathered} \tag{11}$$

Воспользовавшись методом формальных асимптотических разложений из второго уравнения (11) можно установить, что величина q – порядка m. Учитывая, что для грунтов $m = \tau_s/G \ll 1$, будем далее пренебрегать в уравнениях членами порядка m^2. Тогда условие текучести, соотношение для Λ и первое уравнение (11) образуют систему

$$\begin{gathered}
s = \sqrt{1-\tau^2}, \quad \Lambda = \xi\tau w' + 2s/\xi \\
\xi w' = \Lambda\tau + m((1-\xi^2)\tau' + \xi s w'/2)
\end{gathered} \tag{12}$$

Второе уравнение в (11) дает конечное соотношение для q, $q = -m\xi\tau w'/(2\Lambda)$. Система (12) вместе с (10) сводится к нелинейному уравнению первого порядка для определения $\tau(\xi)$. Действительно, исключая w' и Λ, получаем

$$(n\xi^2 s(s-m/2) + m(1-\xi^2)^2)\tau' = (2(1-\xi^2) - n\xi^2(s-m/2))s\tau/\xi \tag{13}$$

А также уравнение первого порядка для w:

$$\xi s(s-m/2)w' = m(1-\xi^2)\tau' + 2s\tau/\xi \tag{14}$$

которое можно решить, зная $\tau = \tau(\xi)$.

Представим теперь решение за ударной волной. В силу выбранной диаграммы (фиг. 1), на ударной волне объемная деформация мгновенно принимает значение $-\vartheta_0$ и далее ввиду несжимаемости остается постоянной. Пользуясь (6), для радиального смещения u, полагая его малым при больших r, имеем

$$u = \int\limits_{r/V}^{t} v_r dt = r\left(\left(\frac{ct}{r}\right)^2 - \vartheta_0\right)/2, \qquad t \geqslant r/V$$

Отсюда деформации выражаются

$$e_{rr} = -((ct/r)^2 + \vartheta_0)/2, \qquad e_{\varphi\varphi} = ((ct/r)^2 - \vartheta_0)/2, \qquad e_{zz} = 0$$

Тогда компоненты девиатора напряжений s_{ij} равны

$$s_{rr} = 2G(e_{rr} + \vartheta_0/3) = -G(\xi^{-2} + \vartheta_0/3)$$

$$s_{\varphi\varphi} = G(\xi^{-2} - \vartheta_0/3), \quad s_{zz} = 2G\vartheta_0/3 \tag{15}$$

В упругой поперечной волне компоненты скорости v_z удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2}$$

В силу автомодельности из него следует

$$w = v_z/c = B_0 \ln(\eta - \sqrt{\eta^2 - 1}) \tag{16}$$

Здесь $\eta = bt/r$, $b = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость поперечной волны, B_0 – константа, определяемая из краевых условий. Отсюда для величины τ, в силу закона Гука, имеем

$$\tau = B_0 \frac{\rho_0 bc}{\tau_s}\sqrt{\eta^2 - 1} \tag{17}$$

Построим теперь решение задачи в целом. В зависимости от соотношения между параметрами среды τ_s, G, ϑ_0, плотностью ρ_0 и скоростью c возможны различные режимы распространения волн. В нашем случае с заданной диаграммой (фиг. 1) соотношение между скоростями $b = \sqrt{G/\rho_0}$ – упругой поперечной, $V = c/\sqrt{\vartheta_0}$ – ударного фронта, v_p – скорости границы пластической и упругой зон следующее

$$v_p \leqslant b \leqslant V \tag{18}$$

Значит реализуется такой режим распространения волн. Впереди по невозмущенному полупространству двигается ударная волна, на ее фронте происходит упаковка материала среды (за ее фронтом среда вплоть до поверхности цилиндра становится несжимаемой), далее следует упругая поперечная, в которой выполняется условие текучести и начинается пластическая зона, примыкающая к поверхности цилиндра $\xi = 1$ (фиг. 2).

Решение задачи строится следующим образом. Вначале находится величина τ в пластической зоне $1 \leqslant \xi \leqslant \xi_p$, для этого, как было предложено выше, достаточно решить уравнение (13) совместно с условием текучести и условием (3) в качестве граничного. Граница упругой и пластической зон $\xi = \xi_p$ определяется при помощи двух последних соотношений (4), а также условия текучести и (15):

$$\xi_p = (1 - \tau_*^2)^{-1/4}/\sqrt{m} \tag{19}$$

Здесь под τ_* в силу второго соотношения (4) понимается значение функции $\tau = \tau(\xi)$ уже найденное в пластической зоне при $\xi = \xi_p$. Отметим, что (19) представляет собой уравнение для определения ξ_p. Затем определяются τ и скорость w в упругой поперечной волне $\xi_p \leqslant \xi \leqslant \xi_b$. Для этого достаточно определить константу B_0, входящую в (16), (17). Воспользуемся при этом непрерывностью τ в соответствии со вторым соотношением (4). Найденное таким образом w, в силу первого соотношения (4) служит граничным условием для определения w в пластической зоне из уравнения (14). Величины, входящие в правую часть этого уравнения, в пластической зоне были определены выше. Напомним, что радиальные скорости v во всей области $1 \leqslant \xi \leqslant 1/\sqrt{\vartheta_0}$ находятся при помощи (6). Продольное поле $\xi_b = b/c \leqslant \xi \leqslant 1/\sqrt{\vartheta_0}$ характеризуется $w = \tau = 0$; упругие девиаторные компоненты напряжения здесь находятся в соответствии с (15), компонента скорости v уже определена. Относительно радиальных напряжений σ можно сказать следующее. Они непрерывны во всей области $1 \leqslant \xi < 1/\sqrt{\vartheta_0}$ и определяются из уравнения

$$\sigma' = (1 + 2ns)\xi^{-1} - \xi^{-3} \tag{20}$$

которое представляет собой проекцию уравнения сохранения импульса (1) на ось r. В качестве граничного принимается условие на ударном фронте (7).

В связи с тем, что условие (3) на поверхности цилиндра – условие альтернативного типа и величина σ_{rr} определяется в ходе решения задачи, все названные в этом пункте уравнения приходится решать совместно, применяя при этом метод стрельбы.

Укажем некоторые возможные варианты поведения решения. Так, если $\vartheta_0 \geqslant m$, то за ударным фронтом среда неизбежно находится в пластическом состоянии по сдвигу. Здесь $b < c/\sqrt{\vartheta_0}$, поэтому упругая поперечная волна не возникает вовсе и за ударной волной нужно пользоваться уравнениями Прандтля – Рейса. На самой ударной волне возникает тангенциальный разрыв, на котором выполняется условие $s_{rz} = -\rho_0 c v_z / \sqrt{\vartheta_0}$. Оно служит краевым для (13). Итак условием существования описанного режима будет

$$m \leqslant \vartheta_0 \leqslant \rho_0 c^2/G$$

Если $\vartheta_0 < m$, ситуация следующая. С учетом выполнения двух последних соотношений в (4), а также условия текучести в продольной волне и (15) для границы ξ_p упругой и пластической зон получаем

$$\xi_p = 1/\sqrt{m} \tag{21}$$

При $\vartheta_0 \leqslant \sqrt{m} \leqslant c^2/b^2$ упругая поперечная волна также не возникает вовсе, на границе зон (21), будет чисто поперечный разрыв, на нем выполняется условие $s_{rz} = -\rho_0 c v_z / \sqrt{m}$, которое служит краевым для определения решения в пластической зоне. В последнем соотношении в качестве s_{rz} и v_z берутся их значения со стороны пластической области. В области, которая располагается между пластической зоной и ударным фронтом решения были описаны выше.

В случае, когда условие текучести не выполняется, решение может быть выписано явным образом. Действительно, за ударной волной, в области течения несжимаемого упругого материала справедливо (15). При этом уравнение (20) примет вид

$$\sigma' = \xi^{-1} - (1 - 2n/m)\xi^{-3}$$

Интегрирование дает

$$\sigma = \ln \xi + (1 - 2n/m)\xi^{-2}/2 + \sigma_0 \tag{22}$$

Константа σ_0 определяется из граничного условия на фронте ударной волны $\sigma = -1$ при $\xi = 1/\sqrt{\vartheta_0}$:

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\ln \vartheta_0 - 1 - (1 - 2n/m)\vartheta_0/2 \tag{23}$$

Соотношения (22), (23) для радиальных напряжений имеют место во всей области $1 \leqslant \xi < 1/\sqrt{\vartheta_0}$.

Тогда условие альтернативного типа (3) на поверхности цилиндра может быть конкретизировано с учетом (22), (23) и приведено к виду

$$s_{rz} = \tau_0 = \text{const}$$

Оно используется в качестве граничного для определения решения в упругой поперечной волне для $1 \leqslant \xi < \xi_b$. С его помощью из (17) при $\xi = 1$ находится константа B_0:

$$B_0 = \tau_0 /(\rho_0 b\sqrt{b^2 - c^2})$$

Теперь скорость w и касательные напряжения τ в упругой поперечной волне целиком определяются соотношениями (16), (17).

В случае нагрузочной диаграммы более общего вида, у которой есть участок чисто упругого поведения материала решение будет другим. Для него теоретически возможны режимы движения, когда $v_p \leqslant V \leqslant b$.

Если упругий участок – линейный и предшествует несжимаемости материала, решение задачи сводится к решению, приведенному в настоящей работе, когда параметры среды и скорость расширения цилиндра связаны соотношениями

$$mA \geqslant 2\vartheta_0/\sqrt{3}, \quad mA \geqslant \sqrt{(m/f) - \vartheta_0^2/3}$$

$$\tau_* = 7(\xi_p), \quad m = \tau_s/G \ll 1$$

$$A = \sqrt{1 - \tau_*^2}$$

Автор благодарит В.Н. Кукуджанова за постоянное внимание к работе. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 98-05-64751).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю., Зволинский Н.В., Степаненко И.З.* К динамике грунтовых масс // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 4. С. 729–731.
2. *Сагомонян А.Я.* Проникание газовой струи в грунт // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1979. № 5. С. 60–64.
3. *Багдоев А.Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1961. 276 с.
4. *Колесников В.А., Флитман Л.М.* Автомодельная задача о расширяющемся и движущемся вдоль своей оси цилиндре, окруженном упругопластической средой // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1984. С. 175–176.
5. *Кукуджанов В.Н.* Ударные волны в уплотняющейся вязкопластической среде // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. Т. 11. № 6. С. 61–72.
6. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
7. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
8. *Колесников В.А.* Косой удар по поверхности упругопластического полупространства // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 71–76.
9. *Скобеев А.М.* О плоской упругопластической волне // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 509–515.
10. *Ковшов А.Н.* О двух задачах динамики грунта при сильных нагрузках // Инж. ж. МТТ. 1968. № 5. С. 184–189.

Москва

Поступила в редакцию
25.03.1999