

УДК 539.214;539.374

© 2000 г. А.Н. СПОРЫХИН, Ю.Д. ШЕГЛОВА

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ

Дано развитие метода малого параметра к исследованию задачи кручения сплошных и полых цилиндрических стержней из анизотропно упрочняющегося упругопластического материала в случае полного охвата пластической областью внешнего контура поперечного сечения. Приведены решения для сплошного стержня с гипоциклоидным поперечным сечением и полого стержня с поперечным сечением эллиптической формы с равными и разными эксцентриситетами внешней и внутренней границ.

Методом возмущений решены многие упругопластические задачи [1]. Развитие этого метода к решению задач упругопластического кручения цилиндрических стержней в случае локального и полного охвата пластической областью контура поперечного сечения стержня дано в работе [2]. Ниже методом малого параметра исследована задача кручения сплошных и полых цилиндрических стержней из анизотропно упрочняющегося упругопластического материала. Построены решения для сплошного стержня с гипоциклоидным поперечным сечением и полого стержня с поперечным сечением эллиптической формы с равными и разными эксцентриситетами внешней и внутренней границ.

1. Пусть имеется цилиндрический стержень, поперечное сечение которого представляет собой односвязную область в случае сплошного стержня и двусвязную область для случая полого стержня. Введем цилиндрическую систему координат ρ, θ, z так, что координатная ось z направлена по оси стержня.

Пусть стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил с моментом M . Боковая поверхность стержня свободна от нагрузок. Предположим, что величина крутящего момента M такова, что пластическая зона целиком охватывает внешний контур поперечного сечения, и для каждого значения крутящего момента существует упругопластическая граница L_s , которая расположена между внешним L_1 и внутренним L_2 контурами поперечного сечения стержня.

Следуя обычной теории кручения цилиндрических стержней [3], будем считать, что все поперечные сечения испытывают жесткий поворот в своей плоскости и искривляются в направлении оси z . В принятых предположениях компоненты смещения в цилиндрической системе координат будут

$$u_\rho = 0, \quad u_\theta = \omega \rho z, \quad u_z = w(\rho, \theta, \omega) \quad (1.1)$$

где ω – крутка или угол кручения на единицу длины стержня, а w – неизвестная функция, характеризующая деформацию поперечного сечения.

Уравнения равновесия сводятся к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0 \quad (1.2)$$

В пластической области полная деформация складывается из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_{\rho z} = \varepsilon_{\rho z}^e + \varepsilon_{\rho z}^p, \quad \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{\theta z}^e + \varepsilon_{\theta z}^p \quad (1.3)$$

Компоненты полной деформации представляются в виде

$$\varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \omega \rho \right) \quad (1.4)$$

Напряжения связаны с упругими деформациями законом Гука

$$\tau_{\rho z} = 2G\varepsilon_{\rho z}^e, \quad \tau_{\theta z} = 2G\varepsilon_{\theta z}^e \quad (1.5)$$

где G – безразмерный модуль сдвига.

В пластической области выполняется условие пластичности [4]:

$$(\tau_{\rho z} - c\varepsilon_{\rho z}^p)^2 + (\tau_{\theta z} - c\varepsilon_{\theta z}^p)^2 = 1 \quad (1.6)$$

где c – безразмерный коэффициент упрочнения. При этом ассоциированный закон пластического течения имеет вид

$$\frac{d\varepsilon_{\rho z}^p}{\tau_{\rho z} - c\varepsilon_{\rho z}^p} = \frac{d\varepsilon_{\theta z}^p}{\tau_{\theta z} - c\varepsilon_{\theta z}^p} \quad (1.7)$$

В упругой зоне деформация пропорциональна крутке, полные деформации совпадают с упругими, поэтому соотношения Коши имеют вид

$$\varepsilon_{\rho z} = \frac{\omega}{2} \frac{\partial w}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \rho \right) \quad (1.8)$$

Уравнения контуров поперечного сечения L_1 и L_2 задаются соответственно в виде

$$\Phi_1(\rho, \theta) = 0, \quad \Phi_2(\rho, \theta) = 0 \quad (1.9)$$

Так как боковые поверхности стержня свободны от нагрузки, то на контурах поперечного сечения выполняются условия

$$\left\{ \tau_{\rho z} n_{\rho}^{(1)} + \tau_{\theta z} n_{\theta}^{(1)} \right\} |_{L_1} = 0 \quad (1.10)$$

$$\left\{ \tau_{\rho z} n_{\rho}^{(2)} + \tau_{\theta z} n_{\theta}^{(2)} \right\} |_{L_2} = 0 \quad (1.11)$$

где $n_{\rho}^{(i)}, n_{\theta}^{(i)}$ – компоненты единичной нормали к контуру L_i ($i = 1, 2$), которые определяются по формулам

$$n_{\rho}^{(i)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (1.12)$$

$$n_{\theta}^{(i)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

На упругопластической границе L_s выполняются условия непрерывности решений поставленной задачи

$$[w] |_{L_s} = 0, \quad [\tau_{\rho z}] |_{L_s} = 0, \quad [\tau_{\theta z}] |_{L_s} = 0 \quad (1.13)$$

Касательные напряжения $\tau_{\theta z}$ должны уравновесить безразмерный крутящий момент

$$M = \iint \tau_{\theta z} \rho^2 d\rho d\theta \quad (1.14)$$

Напряженное и деформированное состояние упругопластического анизотропно упрочняющегося стержня при кручении полностью определяется соотношениями (1.1)–(1.14). Выражения (1.1)–(1.14) записаны в безразмерном виде. Все величины, имеющие размерность длины отнесены к характерному размеру поперечного сечения стержня, а величины, имеющие размерность напряжений – к пределу пластичности при чистом сдвиге.

2. Далее символ (e) сверху подчеркивает принадлежность величин к упругой области, а символ (p) – к пластической.

Соотношению (1.6) удовлетворим, полагая [5]:

$$\tau_{\rho z}^p = -\sin \lambda + c \epsilon_{\rho z}^p, \quad \tau_{\theta z}^p = \cos \lambda + c \epsilon_{\theta z}^p \quad (2.1)$$

где $\lambda(\rho, \theta)$ – неизвестная функция, а пластические деформации определяются из выражений

$$\epsilon_{\rho z}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^p}{\partial \rho} - \frac{\tau_{\rho z}^p}{G} \right), \quad \epsilon_{\theta z}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^p}{\partial \theta} + \omega \rho - \frac{\tau_{\theta z}^p}{G} \right) \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получим

$$\tau_{\rho z}^p = -k_1 \sin \lambda + c_1 \frac{\partial w^p}{\partial \rho}, \quad \tau_{\theta z}^p = k_1 \cos \lambda + c_1 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^p}{\partial \theta} + \omega \rho \right) \quad (2.3)$$

$$k_1 = \frac{2G}{2G+c}, \quad c_1 = \frac{cG}{2G+c}$$

Формулы (2.2) с учетом (2.3) приобретут вид

$$\epsilon_{\rho z}^p = \frac{k_1}{2G} \left(G \frac{\partial w^p}{\partial \rho} + \sin \lambda \right) \quad (2.4)$$

$$\epsilon_{\theta z}^p = \frac{k_1}{2G} \left(G \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^p}{\partial \theta} + \omega \rho \right) - \cos \lambda \right)$$

Из уравнения равновесия (1.2) при подстановке (2.3), следует для пластической области

$$-\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sin \lambda) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \lambda) = -\frac{c}{2} \rho \Delta w^p \quad (2.5)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$$

где Δ – оператор Лапласа.

Используя (2.1) и (2.4), (1.7) можно привести к виду $d\epsilon_{\rho z} / -\sin \lambda = d\epsilon_{\theta z} / \cos \lambda$. Тогда соотношения ассоциированного закона интегрируются, и так как в начальный момент закручивания все компоненты полной деформации равны нулю, то из последнего выражения получим

$$\frac{\partial w^p}{\partial \rho} \cos \lambda = - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^p}{\partial \theta} + \omega \rho \right) \sin \lambda \quad (2.6)$$

Для упругой области из уравнения равновесия (1.2), учитывая (1.8) и соотношения закона Гука (1.5), получаем

$$\Delta w^e = 0 \quad (2.7)$$

Граничное условие на внешнем контуре (1.10), следуя (2.3), принимает вид

$$\begin{aligned} & \{-(\sin \lambda)n_p^{(1)} + (\cos \lambda)n_\theta^{(1)}\} |_{L_1} = \\ & = -\frac{c}{2} \left\{ \frac{\partial w^p}{\partial \rho} n_p^{(1)} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^p}{\partial \theta} + \omega \rho \right) n_\theta^{(1)} \right\} \Big|_{L_1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

а на внутреннем контуре (1.11), учитывая (1.8) и (1.5), имеет форму

$$\left\{ \frac{\partial w^e}{\partial \rho} n_p^{(2)} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^e}{\partial \theta} + \rho \right) n_\theta^{(2)} \right\} \Big|_{L_2} = 0 \quad (2.9)$$

Согласно (2.3), (1.8) и (1.5) условия непрерывности напряжений (1.13) на упруго-пластической границе запишутся так

$$\left\{ \frac{\partial w^e}{\partial \rho} \cos \lambda + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^e}{\partial \theta} + \rho \right) \sin \lambda \right\} \Big|_{L_s} = \quad (2.10)$$

$$= \frac{c_1}{G\omega} \left\{ \frac{\partial w^p}{\partial \rho} \cos \lambda + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^p}{\partial \theta} + \omega \rho \right) \sin \lambda \right\} \Big|_{L_s}$$

$$\left\{ -\frac{\partial w^e}{\partial \rho} \sin \lambda + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^e}{\partial \theta} + \rho \right) \cos \lambda \right\} \Big|_{L_s} =$$

$$= \frac{k_1}{G\omega} + \frac{c_1}{G\omega} \left\{ -\frac{\partial w^p}{\partial \rho} \sin \lambda + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^p}{\partial \theta} + \omega \rho \right) \cos \lambda \right\} \Big|_{L_s} \quad (2.11)$$

Условие непрерывности деформации (1.13) на упругопластической границе принимает вид

$$\omega w^e |_{L_s} = w^p |_{L_s} \quad (2.12)$$

3. Согласно методу малого параметра [1] все функции представляются в виде рядов по степеням малого параметра δ ($\delta \ll 1$), характеризующего в данном случае отклонение геометрии рассматриваемых контуров от окружности

$$\{w, \lambda, \tau_{ij}, \varepsilon_{ij}, \dots\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \{w_n, \lambda_n, \tau_{ij}^{(n)}, \varepsilon_{ij}^{(n)}, \dots\} \quad (3.1)$$

Реализация этого метода возможна при условии, что нулевое приближение известно. Далее учитывается, что таковым является решение задачи кручения цилиндрического стержня кругового поперечного сечения для сплошных стержней, а для полых стержней – решение задачи кручения стержня с поперечным сечением в виде кругового кольца. В безразмерном виде оно представляется так:

в пластической зоне ($\rho_0 < \rho < R_0$):

$$\tau_{\theta z}^{p(0)} = \frac{G}{2G+c} (c\omega\rho + 2)$$

$$\varepsilon_{\theta z}^{p(0)} = \frac{1}{2G+c} (G\omega\rho - 1), \quad w_0^p = \varepsilon_{\rho z}^{p(0)} = \tau_{\rho z}^{p(0)} = 0$$

в упругой зоне ($r_0 < \rho < \rho_0$):

$$\tau_{\theta z}^{e(0)} = G\omega\rho, \quad \varepsilon_{\theta z}^{e(0)} = 1/2\omega\rho, \quad w_0^e = \varepsilon_{\rho z}^{e(0)} = \tau_{\rho z}^{e(0)} = 0$$

При $R_0 = 1$, $r_0 = 0$ это решение соответствует задаче кручения сплошного стержня, а при $\rho_0 = 1$ – полого стержня.

Радиус упругопластической границы определяется соотношением $\rho_0 = 1/(G\omega)$.

Крутящий момент для круговой трубы находится по формуле

$$M = 2\pi \left[\frac{1}{4}(1 - r_0^4) + k_1 \left(\frac{c\omega}{2}(R_0^4 - 1) + \frac{1}{3}(R_0^3 - 1) \right) \right]$$

для сплошного кругового сечения имеет вид

$$M = k_1 \pi \left(-\frac{\rho_0^3}{6} + \frac{c\omega}{4} + \frac{2}{3} \right)$$

Рассмотрим решение задачи в первом приближении. Подстановкой (3.1) в (2.5)–(2.7) получим соответственно следующие уравнения:

в пластической зоне ($\rho_0 < \rho < R_0$):

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\lambda_1) = \frac{c}{2}\rho\Delta w_1^p \quad (3.2)$$

$$\partial w_1^p / \partial \rho = -\omega\rho\lambda_1 \quad (3.3)$$

в упругой зоне ($r_0 < \rho < \rho_0$):

$$\Delta w_1^e = 0 \quad (3.4)$$

Границы L_1 и L_2 представляются в виде

$$\rho|_{L_1} = R_0 + \delta R_1 + O(\delta^2), \quad \rho|_{L_2} = r_0 + \delta r_1 + O(\delta^2)$$

$$R_1 = R_1(\theta), \quad r_1 = r_1(\theta)$$

Тогда уравнения контуров поперечного сечения (1.9) приобретут форму

$$\Phi_1(\rho, \theta) = \rho - R_0 - (\delta R_1 + O(\delta^2)), \quad \Phi_2(\rho, \theta) = \rho - r_0 - (\delta r_1 + O(\delta^2))$$

С учетом этого выражения (1.12) для компонент единичных нормалей к контурам L_1 и L_2 соответственно будут такими

$$n_\rho^{(1)} = 1 + O(\delta^2), \quad n_\theta^{(1)} = -\delta \dot{R}_1 + O(\delta^2)$$

$$n_\rho^{(2)} = 1 + O(\delta^2), \quad n_\theta^{(2)} = -\delta \dot{r}_1 + O(\delta^2) \quad (3.5)$$

здесь точкой обозначена производная по θ .

Граничные условия (2.8), (2.9), следуя (3.1) и (3.5), примут вид:

на внешнем контуре

$$\lambda_1|_{\rho=R_0} = \frac{c}{2} \frac{\partial w_1^p}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_0} - \frac{\dot{R}_1}{R_0} \left(1 + \frac{c\omega}{2} R_0 \right) \quad (3.6)$$

на внутреннем контуре

$$\frac{\partial w_1^e}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r_0} = \dot{r}_1 \quad (3.7)$$

Уравнение упругопластической границы L_s ищется в виде

$$\rho_s = \rho_0 + \delta\rho_1 + O(\delta^2) \quad (3.8)$$

С учетом (3.1) и (3.8) условие (2.10) на упругопластической границе примет форму

$$\left. \frac{\partial w_1^e}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = c_1 \left. \frac{\partial w_1^p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} - k_1 \rho_0 \lambda_1 \Big|_{\rho=\rho_0} \quad (3.9)$$

а условие (2.12) запишется так

$$w_1^p \Big|_{\rho=\rho_0} = \omega w_1^e \Big|_{\rho=\rho_0} \quad (3.10)$$

Выразив λ_1 из (3.3) и подставив его в (3.2), (3.6) и (3.9), относительно поля перемещений получим эллиптическую краевую задачу следующего вида: найти функцию $w_1(\rho, \theta)$, удовлетворяющую эллиптическому уравнению

$$\frac{\partial^2 w_1^p}{\partial \rho^2} + \frac{c\omega}{2} \rho \Delta w_1^p = 0 \quad \text{при } \rho_0 < \rho < R_0 \quad (3.11)$$

уравнению Лапласа

$$\Delta w_1^e = 0 \quad \text{при } r_0 < \rho < \rho_0 \quad (3.12)$$

граничным условиям

$$\left. \frac{\partial w_1^p}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_0} = \dot{R}_1 \omega, \quad \left. \frac{\partial w_1^e}{\partial \rho} \right|_{\rho=r_0} = \dot{r}_1 \quad (3.13)$$

и условиям сопряжения вида

$$\left. \frac{\partial w_1^p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \omega \left. \frac{\partial w_1^e}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0}, \quad w_1^p \Big|_{\rho=\rho_0} = \omega w_1^e \Big|_{\rho=\rho_0} \quad (3.14)$$

где $\dot{R}_1 = \dot{R}_1(\theta)$, $\dot{r}_1 = \dot{r}_1(\theta)$ суть 2π -периодические функции.

Применяя метод разделения переменных к решению задачи (3.11)–(3.14), получим выражения для функции деформации:

при $\rho_0 < \rho < R_0$:

$$w_1^p = A_0 + B_0 \ln\left(\rho + \frac{2}{c\omega}\right) + \quad (3.15)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n^{(1)} P_{1n} + B_n^{(1)} P_{2n}) \sin n\theta + (A_n^{(2)} P_{1n} + B_n^{(2)} P_{2n}) \cos n\theta\}$$

здесь P_{1n} и P_{2n} определяются по формулам

$$P_{1n} = N_n \frac{c\omega}{2} \rho \left[\left(\frac{c\omega}{2} \rho \right)^{n-1} \left(\frac{c\omega}{2} \rho + 1 \right)^n \right]^{(n)} \quad (3.16)$$

$$P_{2n} = P_{1n} \int \frac{d(c\omega\rho)}{P_{1n}^2(c\omega\rho + 2)} \quad (3.17)$$

где N_n – нормирующий множитель;

при $r_0 < \rho < \rho_0$:

$$w_1^e = C_0 + D_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (C_n^{(1)} \rho^n + D_n^{(1)} \rho^{-n}) \sin n\theta + (C_n^{(2)} \rho^n + D_n^{(2)} \rho^{-n}) \cos n\theta \} \quad (3.18)$$

Здесь $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$, $C_n^{(i)}$, $D_n^{(i)}$ ($i = 1, 2$) – произвольные постоянные, которые определяются из условий (3.13), (3.14). При этом второе условие (3.13) используется только в случае полого стержня.

Радиус упругопластической границы в первом приближении определяется из соотношения (2.11) подстановкой (3.1) и (3.8) и имеет вид

$$\rho_1 = \frac{c}{2} \frac{\partial w_1^p}{\partial \theta} \Big|_{\rho=\rho_0} - \frac{1}{k_1 \rho_0} \frac{\partial w_1^e}{\partial \theta} \Big|_{\rho=\rho_0} \quad (3.19)$$

Выражения для напряжений и деформаций (2.3), (2.4) при $\rho_0 < \rho < R_0$ согласно (3.1), (3.3) представляются в форме

$$\tau_{\rho z}^{p(1)} = \frac{k_1}{\omega} \left(\frac{c\omega}{2} + \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial w_1^p}{\partial \rho}, \quad \tau_{\theta z}^{p(1)} = \frac{ck_1}{2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1^p}{\partial \theta} \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_{\rho z}^{p(1)} = \frac{k_1}{2} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{\partial w_1^p}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{p(1)} = \frac{k_1}{2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1^p}{\partial \theta}$$

а при $r_0 < \rho < \rho_0$, следуя (1.5), (1.8) с учетом (3.1), определяются по формулам

$$\tau_{\rho z}^{e(1)} = G\omega \frac{\partial w_1^e}{\partial \rho}, \quad \tau_{\theta z}^{e(1)} = G\omega \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1^e}{\partial \theta} \right) \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_{\rho z}^{e(1)} = \frac{\omega}{2} \frac{\partial w_1^e}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{e(1)} = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1^e}{\partial \theta} \right)$$

4. Рассмотрим сплошной стержень, контур L_1 поперечного сечения которого представлен укороченной гипоциклоидой. Параметрическое уравнение данной кривой имеет вид [6]

$$x = (b-a) \cos \varphi + \vartheta a \cos \left(\frac{b-a}{a} \varphi \right) \quad (4.1)$$

$$y = (b-a) \sin \varphi - \vartheta a \sin \left(\frac{b-a}{a} \varphi \right)$$

$$b > a > 0, \quad -\infty < \varphi < +\infty, \quad \vartheta < 1$$

Обозначив через $R = b - a$, $n = (b - a) / a$, $\delta = \vartheta / n$, перепишем (4.1) так

$$x = R(\cos \varphi + \delta \cos n\varphi), \quad y = R(\sin \varphi + \delta \sin n\varphi) \quad (4.2)$$

При $n = 1$ контур L_1 будет представлять собой эллипс с полуосями $R(1 + \delta)$, $R(1 - \delta)$, а при $n > 1$ будет приближаться по форме к правильному $n + 1$ -угольнику. Уравнение (4.2) в полярных координатах с учетом разложения в ряд по параметру δ примет форму

$$\rho = 1 + \delta \cos m\theta + O(\delta^2) \quad (4.3)$$

где $m = n + 1$, а за характерный размер принимается величина R .

Положим $m = 3$, тогда выражение для депланации в пластической области ($\rho_0 < \rho < 1$) (3.15) с учетом (3.16), (3.17) будет иметь вид

$$w_1^p = \left\{ -\frac{\omega(10g^2\rho^2 + 12g\rho^2 + 3\rho)}{10g^2 + 8g + 1} + 10\Xi_1 \left[-\frac{1}{3}(30g^2\rho^2 + 21g\rho + 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + g(10g^2\rho^3 + 12g\rho^2 + 3\rho) \left(\ln \frac{c\omega\rho + 2}{\rho(c\omega + 2)} + \Xi_2 \right) \right] \right\} \sin 3\theta \\ \Xi_1 = \frac{-0,6\omega\rho_0(2g\rho_0 + 1)}{(10g^2 + 8g + 1)(1 + 3g\rho_0\{10g\rho_0 + 7 - \Xi_3\})} \\ g = c\omega/2 \\ \Xi_2 = \frac{1}{3(10g^2 + 8g + 1)} \left(\frac{2(10g^2 + 12g + 3)}{c\omega + 2} + 20g + 7 \right) \\ \Xi_3 = \frac{2(10g^2\rho_0^2 + 12g\rho_0 + 3)}{3(c\omega\rho_0 + 2)} + \frac{1}{3}(20g\rho_0 + 7) + 2(2g\rho_0 + 1) \left(\ln \frac{c\omega\rho_0 + 2}{\rho_0(c\omega + 2)} + \Xi_2 \right)$$

Депланация в упругой области ($0 < \rho < \rho_0$), следуя (3.18), определяется выражением

$$w_1^e = \rho^3 \left\{ -\frac{\xi_1}{\rho_0^2(10g^2 + 8g + 1)} + \frac{5c\Xi_1}{\rho_0^2} \left[\xi_1 \left(\ln \frac{c\omega\rho_0 + 2}{\rho_0(c\omega + 2)} + \Xi_2 \right) - \xi_3 \right] \right\} \sin 3\theta \\ \xi_1 = 10g^2\rho_0^2 + 8g\rho_0 + 1, \quad \xi_2 = 10g^2\rho_0^3 + 12g\rho_0^2 + 3\rho_0 \\ \xi_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{2\xi_2}{\rho_0(c\omega\rho_0 + 2)} + 20g\rho_0 + 7 \right)$$

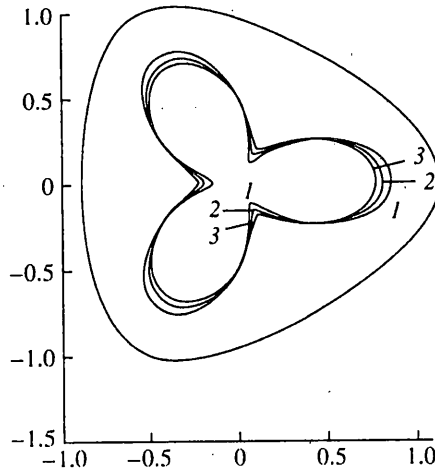
Радиус упругопластической границы в первом приближении согласно (3.19) вычисляется по формуле

$$\rho_1 = 3 \left\{ \frac{\xi_4}{10g^2 + 8g + 1} + 5c\Xi_1 \left[-\xi_4 \left(\ln \frac{c\omega\rho_0 + 2}{\rho_0(c\omega + 2)} + \Xi_2 \right) + \frac{1}{k_1} \xi_3 - \xi_5 \right] \right\} \cos 3\theta \\ \xi_4 = \xi_1 / k_1 - g\xi_2, \quad \xi_5 = 30g^2\rho_0^2 + 21g\rho_0 + 1$$

Численный анализ здесь и далее проведен для следующих материалов [7]: I – сталь 30ХГС, термообработка – закалка, отпуск 600°C, относительное остаточное удлинение – 12%, $G = 155,63$, $c = 4,94$; II – сталь 40Х термообработка – отжиг, относительное остаточное удлинение – 25%, $G = 318,54$, $c = 40,83$; III – сталь Я1Т, термообработка – закалка 1050°C, относительное остаточное удлинение – 49%, $G = 568,66$, $c = 130,56$. Характеристики материалов даны в безразмерном виде.

На фиг. 1 представлена зависимость радиуса упругопластической границы ρ_s от угла θ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют упругопластическим границам для материалов I, II, III соответственно, внешняя кривая – контур стержня. При этом значения безразмерных геометрических характеристик принимались следующими: $\delta = 0,1$, $\rho_0 = 0,5$.

В качестве второго примера рассмотрим полый стержень, поперечное сечение которого ограничено снаружи эллипсом с полуосями $b(1 + \delta d_1)$, $b(1 - \delta d_1)$ и изнутри эллиптическим отверстием с полуосями $a(1 + \delta d_2)$, $a(1 - \delta d_2)$. Здесь δ , d_1 , d_2 – постоянные, принимающие значения в пределах $0 \leq \delta \leq 1$, $-1 \leq d_i \leq 1$. Очевидно, что при



Фиг. 1

$d_1 = 0, d_2 = 1$ имеет место круг с эллиптическим отверстием, и наоборот при $d_1 = 1, d_2 = 0$ – эллипс с круговым отверстием.

Уравнения внешней L_1 и внутренней L_2 поверхности стержня могут быть представлены согласно (4.3) при $m = 2$ соответственно следующим образом:

$$\rho = \beta[1 + \delta d_1 \cos 2\theta + O(\delta^2)]$$

$$\rho = \alpha[1 + \delta d_2 \cos 2\theta + O(\delta^2)]$$

где $\beta = b/r_s, \alpha = a/r_s, r_s$ – радиус упругопластической границы в нулевом приближении.

В пластической зоне ($1 < \rho < \beta$) деформация согласно (3.15)–(3.17) имеет вид

$$w_1^p = \left\{ -\frac{2\beta d_1 \omega}{c\omega\beta + 2/3} \rho \left(\frac{c\omega}{2} \rho + \frac{2}{3} \right) + \Psi_1 \left[9 \frac{c\omega}{2} \rho \left(\frac{c\omega}{2} \rho + \frac{2}{3} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\ln \frac{\beta(c\omega\rho + 2)}{\rho(c\omega\beta + 2)} + \frac{2(c\omega\beta + 5/3)}{(c\omega\beta + 2)(c\omega\beta + 2/3)} \right) - \frac{3}{2} (3c\omega\rho + 1) \right] \right\} \sin 2\theta$$

где Ψ_1 определяется следующим образом:

$$\Psi_1 = \frac{1}{\Psi_2} \left(-2d_2\alpha^4 + \frac{2d_1\beta}{3c\omega\beta + 2} [3\alpha^4(c\omega + 1) - 1] \right)$$

$$\Psi_2 = \frac{3}{2\omega} (3c\omega + 1)(1 - \alpha^4) + \frac{9c}{2} \left[-(1 + \alpha^4) \frac{c\omega + 5/3}{c\omega + 2} + \right.$$

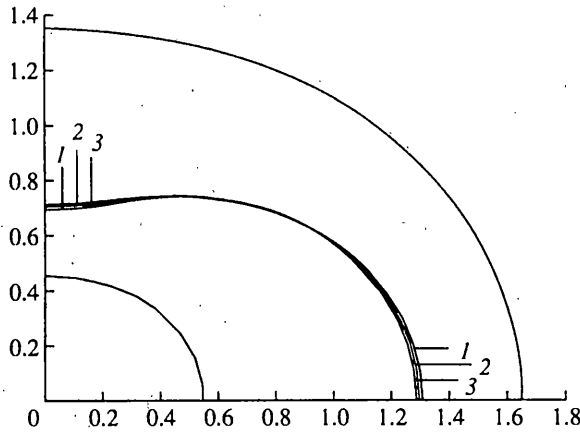
$$\left. + \frac{1}{3} (3\alpha^4(c\omega + 1) - 1) \left(\ln \frac{\beta(c\omega + 2)}{c\omega\beta + 2} + \frac{2(c\omega\beta + 5/3)}{(c\omega\beta + 2)(c\omega\beta + 2/3)} \right) \right]$$

Деформация в упругой зоне ($\alpha < \rho < 1$), следуя (3.18), находится по формуле

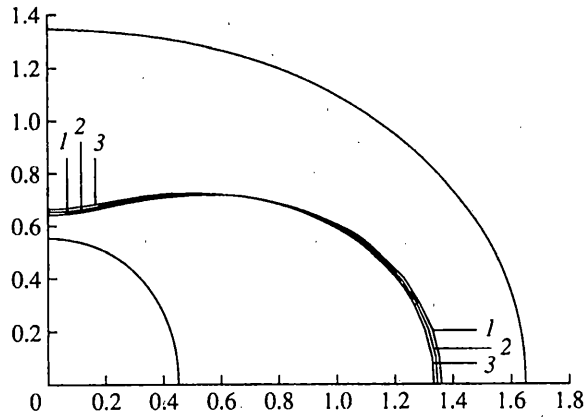
$$w_1^e = (\Psi_3 \rho^2 + (\Psi_3 + d_2)\alpha^4 \rho^{-2}) \sin 2\theta$$

$$\Psi_3 = \frac{d_2\alpha^4}{1 - \alpha^4} - \frac{\beta d_1(c\omega + 2/3)}{(1 - \alpha^4)(c\omega\beta + 2/3)} + \frac{9c}{4(1 - \alpha^4)} \Psi_1 \Psi_4$$

$$\Psi_4 = \left(c\omega + \frac{2}{3} \right) \ln \frac{\beta(c\omega + 2)}{c\omega\beta + 2} + 2 \left(\frac{(c\omega\beta + 5/3)(c\omega + 2/3)}{(c\omega\beta + 2)(c\omega\beta + 2/3)} - \frac{c\omega + 5/3}{c\omega + 2} \right)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Уравнение упругопластической границы для данного случая будет иметь вид (3.8), если в нем положить $\rho_0 = 1$.

Формулу для ρ_1 получаем из (3.19), подставляя в нее найденные выражения для деформации.

$$\rho_1 = \left\{ -\frac{2}{k_1} \left(\frac{2d_2\alpha^4}{1-\alpha^4} - \frac{\beta d_1(1+\alpha^4)}{1-\alpha^4} \frac{c\omega+2/3}{c\omega\beta+2/3} \right) + \right. \\ \left. + c \left[-2\beta d_1 \omega \frac{c/\omega+2/3}{c\omega\beta+2/3} + \Psi_1 \left(\Psi_5 - \frac{9(1+\alpha^4)}{2k_1(1-\alpha^4)} \Psi_4 \right) \right] \right\} \cos 2\theta$$

где обозначено

$$\Psi_5 = 9 \frac{c\omega}{2} \left(\frac{c\omega}{2} + \frac{2}{3} \right) \left[\ln \frac{\beta(c\omega+2)}{(c\omega\beta+2)} + \frac{2(c\omega\beta+5/3)}{(c\omega\beta+2)(c\omega\beta+2/3)} \right] - \frac{3}{2} (3c\omega+1)$$

Фиг. 2, 3, на которых показана зависимость радиуса упругопластической границы ρ_s от угла θ , позволяют сравнить упругопластические границы для материалов I, II, III (кривые 1, 2, 3 соответственно). Внешняя и внутренняя кривые на этих фигурах – контуры стержня. При этом значения безразмерных геометрических характеристик

принимались следующими: $\delta = 0,1$, $r_0 = 0,5$, $R_0 = 1,5$. На фиг. 2 принято $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, на фиг. 3 принято $d_1 = 1$, $d_2 = -1$.

Поле напряжений и деформаций в приведенных примерах можно найти подстановкой функции депланации в формулы (3.20) для пластической зоны и в формулы (3.21) для зоны упругого деформирования.

Из полученных выражений для полей перемещений, напряжений и деформаций, а также для радиуса упругопластической границы следует, что они содержат слабеющие, обусловленные влиянием модуля сдвига, параметра упрочнения и крутки. В отличие от случая идеальной пластичности зависимость от крутки, как и от параметра упрочнения, носит нелинейный характер, что согласуется с выводами [5, 8].

Результаты численного анализа задач показали, что форма упругопластической границы в значительной степени определяется геометрией контура стержня и, что на конфигурацию упругопластической границы существенное влияние оказывает возмущение внешнего контура стержня, возмущение внутреннего контура дает незначительный эффект. В случае малого упрочнения упругопластическая граница практически совпадает с упругопластической границей задачи идеальной пластичности.

Численный анализ всех полученных решений позволяет сделать вывод о незначительности влияния упрочнения на поведение упругопластической границы в данном диапазоне значений параметра s , характерном для выбранных марок сталей, так как, несмотря на достаточно широкий диапазон значений параметра упрочнения, кривые, представляющие упругопластические границы для различных значений этого параметра, имеют довольно плотное расположение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
2. *Цветков Ю.Д.* Кручение упругопластического цилиндрического стержня с поперечным сечением, близким к круговому // Актуальные задачи механики сплошных сред. Чебоксары: ЧГУ, 1986. С. 117–125.
3. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
4. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
5. *Дудукаленко В.В., Ивлев Д.Д.* О кручении анизотропно упрочняющихся призматических стержней при линеаризованном законе пластического течения // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 5. С. 173–175.
6. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1986. 544 с.
7. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
8. *Дудукаленко В.В., Ивлев Д.Д.* О кручении призматических стержней из упрочняющегося материала при линеаризованном условии пластичности // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 3. С. 115–118.

Воронеж

Поступила в редакцию
17.01.2000