МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2000

УДК 539.374

© 2000 г. Д.Д. ИВЛЕВ, А.Ю. ИШЛИНСКИЙ, Л.А. МАКСИМОВА

О ТЕЧЕНИЯХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Рассматриваются свойства течений изотропных несжимаемых сред. Показано, что в общем случае при главных напряжениях не равных друг другу, наибольшая свобода течения имеет место, когда два главных напряжения равны между собой, а третье отлично от них. В этом случае характер течения определяется волновым уравнением.

1. Сен-Венану [1] принадлежат уравнения, определяющие плоское течение изотропной идеально пластической среды:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0 \tag{1.1}$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy} – компоненты тензора напряжения в декартовой системе координат x, y,

условие пластичности

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4k^2,\quad k-\text{const} \tag{1.2}$$

где k – предел текучести на сдвиг,

условие несжимаемости

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y=0 \tag{1.3}$$

условия изотропии

$$\varepsilon_{xy}(\sigma_x-\sigma_y)=\tau_{xy}(\varepsilon_x-\varepsilon_y) \tag{1.4}$$

где ε_x, ε_y, ε_{xy} – компоненты тензора скорости деформации.

Условие изотропии (1.4) определяет соосность главных направлений тензоров напряжений и скоростей деформации.

Предположим, что имеет место однородное напряженное состояние σ_x, σ_y, τ_{xy} – const, в этом случае можно выбрать направление осей координат вдоль главных направлений 1, 2, тогда

$$\sigma_x=\sigma_1,\quad \sigma_y=\sigma_2,\quad \tau_{xy}=0,\quad \sigma_1,\ \sigma_2-\text{const} \tag{1.5}$$

Согласно (1.5) уравнение равновесия удовлетворяется; из (1.2), (1.5) имеет место

$$\sigma_1-\sigma_2=\pm 2k \tag{1.6}$$

Из (1.4), (1.5), (1.6) следует

$$\varepsilon_{xy}(\sigma_1-\sigma_2)=0,\qquad \varepsilon_{xy}k=0 \tag{1.7}$$

Предположим, что

$$\sigma_1=\sigma_2,\qquad k=0 \tag{1.8}$$

Согласно (1.8), уравнение (1.7) удовлетворяется; величина ε_{xy} может иметь значения, отличные от нуля. В данном случае течение изотропной среды определяется условием несжимаемости (1.3), которое представим в виде

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0 \qquad (1.9)$$

где u, v – компоненты скорости перемещения.

Полагая наличие потенциала скорости

$$u = \partial\varphi/\partial x, \qquad v = \partial\varphi/\partial y \qquad (1.10)$$

из (1.9), (1.10) получим

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = 0 \qquad (1.11)$$

Из предположения (1.10) следует безвихревой характер течения

$$\partial u/\partial y - \partial v/\partial x = 0 \qquad (1.12)$$

Соотношения (1.9)–(1.12) определяют кинематику потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости.

При $k \neq 0$ из уравнений (1.3), (1.6), (1.7) следует

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_{xy} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad (1.13)$$

Уравнения (1.9), (1.13) определяют течение несжимаемой идеально пластической среды при однородном напряженном состоянии (1.5), (1.6). Удовлетворим уравнению несжимаемости при помощи функции тока

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (1.14)$$

Из (1.13), (1.14) следует

$$\partial^2\psi / \partial x^2 - \partial^2\psi / \partial y^2 = 0 \qquad (1.15)$$

Таким образом, при сколь угодно малом $k \neq 0$ однородное течение изотропной среды определяется волновым уравнением (1.15). Уравнение Лапласа (1.11), определяющее течение идеальной несжимаемой жидкости, имеет место при равенстве компонент напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$, и не следует в пределах при $k \to 0$ (1.6).

Отметим, что зависимости между компонентами напряжений и скоростей деформации налагают ограничения на характер течений, определяемых уравнением (1.15). Для несжимаемой вязкой среды при условиях (1.15) имеет место

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad \varepsilon_x - \varepsilon_y = \frac{1}{\mu}(\sigma_1 - \sigma_2) \qquad (1.16)$$

где μ – коэффициент вязкости.

Из (1.16) следует

$$u = \frac{1}{2\mu}(\sigma_1 - \sigma_2)x + C_1, \quad v = -\frac{1}{2\mu}(\sigma_1 - \sigma_2)y + C_2, \quad C_1,\ C_2 - \mathrm{const} \qquad (1.17)$$

2. В случае пространственного течения рассмотрим уравнение несжимаемости:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (2.1)$$

и условия изотропии [2]:

$$\sigma_{ik}\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{ik}\sigma_{kj} \qquad (2.2)$$

определяющие соосность главных направлений тензоров напряжений и скорости деформации.

Условия изотропии (2.2), в компонентах декартовой системы координат имеют вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_x\varepsilon_{xy}+\tau_{xy}\varepsilon_y+\tau_{xz}\varepsilon_{yz}=\varepsilon_x\tau_{xy}+\varepsilon_{xy}\sigma_y+\varepsilon_{xz}\tau_{yz}\\
&\tau_{xy}\varepsilon_{xz}+\sigma_y\varepsilon_{yz}+\tau_{yz}\varepsilon_z=\varepsilon_{xy}\tau_{xz}+\varepsilon_y\tau_{yz}+\varepsilon_{yz}\sigma_z\\
&\tau_{xz}\varepsilon_x+\tau_{yz}\varepsilon_{xy}+\sigma_z\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{xz}\sigma_x+\varepsilon_{yz}\tau_{xy}+\varepsilon_z\tau_{xz}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Предположим

$$\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{xz}=0,\quad \sigma_x=\sigma_1,\quad \sigma_y=\sigma_2,\quad \sigma_z=\sigma_3,\quad \sigma_i-\text{const} \tag{2.4}$$

Согласно (2.4), из (2.3) будем иметь

$$\varepsilon_{xy}(\sigma_1-\sigma_2)=0,\quad \varepsilon_{xz}(\sigma_1-\sigma_3)=0,\quad \varepsilon_{yz}(\sigma_2-\sigma_3)=0 \tag{2.5}$$

Предположим, что

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3 \tag{2.6}$$

В этом случае соотношения (2.5) удовлетворены и величины ε_{xy}, ε_{xz}, ε_{yz} могут быть отличны от нуля.

Полагая наличие потенциала

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{2.7}$$

согласно (2.1), (2.7) получим гармоническое уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{2.8}$$

Из условий (2.7) следует отсутствие вихря

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{2.9}$$

Соотношения (2.1), (2.7)–(2.9) определяют кинематику течения идеальной несжимаемой жидкости.

В случае

$$\sigma_1=\sigma_2,\quad \sigma_1-\sigma_3=2k,\quad k\neq 0 \tag{2.10}$$

согласно (2.5), (2.10) имеет место

$$\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0 \tag{2.11}$$

(величина ε_{xy} может быть отличной от нуля).

Уравнения (2.11) в компонентах скорости перемещений имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0 \tag{2.12}$$

Уравнениям (2.12) удовлетворим, полагая [3]:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad w=-\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{2.13}$$

Из (2.1), (2.13) следует волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0 \tag{2.14}$$

Таким образом, соотношения (2.10), соответствующие условию полной пластичности [4], определяют сдвиговой характер течения изотропной несжимаемой среды.

Из соотношений (2.13) следует

$$\partial u / \partial y - \partial v / \partial x = 0 \tag{2.15}$$

Согласно (2.15), течение определяемое соотношениями (2.1), (2.12), (2.13), (2.14), имеет безвихревой характер в плоскости xy:

В случае

$$\sigma_i \neq \sigma_j \tag{2.16}$$

согласно (2.16), (2.5) к соотношениям (2.11) присоединяется уравнение

$$\varepsilon_{xy} = 0, \quad \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = 0 \tag{2.17}$$

Из (2.13), (2.16) следует

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \tag{2.18}$$

Из соотношений (2.14), (2.18) получим

$$\psi = f_1(x+z) + f_2(x-z) + f_3(y+z) + f_4(y-z) \tag{2.19}$$

Условия (2.17), (2.18) накладывают ограничения на характер течения, определяемого соотношениями (2.1), (2.12).

Итак, в случае, когда все главные напряжения равны между собой (2.6), имеет место течение идеальной несжимаемой жидкости (2.1), (2.7)–(2.9). В случае, когда не все главные напряжения равны между собой, максимальная свобода течения изотропной несжимаемой среды имеет место при условии (2.10). Течение определяется соотношениями (2.1), (2.12)–(2.14).

Потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости (1.11), (2.8) в определенной степени является неустойчивым: при сколь угодно малой разнице между значениями главных напряжений изотропная среда изменяет характер течения (1.15), (2.14). Вторично подобным обстоятельством можно объяснить парадоксы течений идеальной жидкости, отмеченные в [5], когда течения идеальной жидкости обнаруживают волновой характер.

3. В случае ортогональных криволинейных координат α, β, γ, условие несжимаемости имеет вид

$$\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma = 0 \tag{3.1}$$

Если осям α, β, γ поставить в соответствие главные направления 1, 2, 3, положим

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha, \quad \sigma_2 = \sigma_\beta, \quad \sigma_3 = \sigma_\gamma, \quad \tau_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.2}$$

где $\tau_{\alpha\beta}$ – касательные напряжения, соотношения (2.3) сохраняют свой вид в любой ортогональной системе координат.

Согласно (2.5), (3.2) будем иметь

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\sigma_1 - \sigma_2) = 0, \quad \varepsilon_{\alpha\gamma}(\sigma_1 - \sigma_3) = 0, \quad \varepsilon_{\beta\gamma}(\sigma_2 - \sigma_3) = 0 \tag{3.3}$$

Соотношениям

$$\sigma_i = \sigma_j, \quad \sigma_i - \sigma_j = 2k \tag{3.4}$$

аналогично (2.5), (2.10), (2.11) будут соответствовать три случая:

$$\varepsilon_{\alpha\gamma} = \varepsilon_{\beta\gamma} = 0, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} \neq 0 \tag{3.5}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\gamma} = 0, \quad \varepsilon_{\alpha\gamma} \neq 0 \tag{3.6}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma} = 0, \quad \varepsilon_{\beta\gamma} \neq 0 \tag{3.7}$$

Рассмотрим цилиндрическую систему координат $\alpha = \rho$, $\beta = \theta$, $\gamma = z$.

При условиях $\tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho z} = \tau_{\theta z} = 0$ уравнения равновесия в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{3.8}$$

Имеет место

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\rho\theta} = \frac{1}{2}\left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{v}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{3.9}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho}\right)$$

где u, v, w – компоненты скорости перемещения вдоль осей ρ, θ, z.

Согласно (3.1), (3.9), уравнение несжимаемости имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.10}$$

В случае

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta, \qquad \sigma_\rho - \sigma_z = 2k \tag{3.11}$$

из (3.8), (3.11) следует

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = C, \qquad \sigma_z = -2k + C, \qquad C - \text{const} \tag{3.12}$$

При условиях (3.11), согласно (3.5), (3.9) имеет место

$$\varepsilon_{\rho z} = \varepsilon_{\theta z} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v) = 0 \tag{3.13}$$

Уравнениям (3.13) удовлетворим, полагая

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad v = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{3.14}$$

Из (3.10), (3.14) получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0 \tag{3.15}$$

В случае

$$\sigma_\rho = \sigma_z, \qquad \sigma_\rho - \sigma_\theta = 2k \tag{3.16}$$

из (3.8), (3.16) следует

$$\sigma_\rho = \sigma_z = -2k \ln \rho + C, \quad \sigma_\theta = -2k(1 + \ln \rho) + C, \qquad C - \text{const} \tag{3.17}$$

При условиях (3.16), согласно (3.6), (3.9) имеет место

$$\varepsilon_{\rho\theta} = \varepsilon_{\theta z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{v}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u}{\rho^2}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{w}{\rho^2}\right) = 0 \tag{3.18}$$

Уравнениям (3.18) удовлетворим, полагая

$$u=\rho^2\frac{\partial\psi}{\partial\rho},\quad v=-\rho\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad w=\rho^2\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{3.19}$$

Из (3.10, (3.19) получим уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{3}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=0 \tag{3.20}$$

В случае

$$\sigma_\theta=\sigma_z,\qquad \sigma_\rho-\sigma_\theta=2k \tag{3.21}$$

из (3.8), (3.21) следует

$$\sigma_\rho=-2k\ln\rho+C,\qquad \sigma_\theta=\sigma_z=-2k(1+\ln\rho)+C,\qquad C-\text{const} \tag{3.22}$$

При условиях (3.21), согласно (3.7), (3.9) имеет место

$$\varepsilon_{\rho\theta}=\varepsilon_{\rho z}=0,\quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{v}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u}{\rho^2}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{\rho^2}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial\rho}=0 \tag{3.23}$$

Первому из уравнений (3.23) удовлетворим, полагая

$$u=-\rho^2\frac{\partial\psi}{\partial\rho},\quad v=\rho\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{3.24}$$

Из второго уравнения (3.23) и (3.24) найдем

$$\frac{\partial w}{\partial\rho}=\rho^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial z} \tag{3.25}$$

Согласно (3.10), (3.25) получим уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\partial z}=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{\rho}\right),\quad \frac{\partial^2 w}{\partial\rho\partial z}=\rho^2\frac{\partial^3\psi}{\partial\rho\partial z^2} \tag{3.26}$$

Из (3.24), (3.26) получим уравнение для определения функции $\Phi=\partial\psi/\partial\rho$:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}-\frac{5}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}-\frac{3}{\rho^2}\Phi=0 \tag{3.27}$$

4. Рассмотрим сферическую систему координат: $\alpha=\rho$, $\beta=\theta$, $\gamma=\varphi$. При условиях $\tau_{\rho\theta}=\tau_{\rho\varphi}=\tau_{\theta\varphi}=0$ уравнения равновесия в сферической системе координат имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}[2\sigma_\rho-(\sigma_\theta+\sigma_\varphi)]=0,\qquad \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)\operatorname{ctg}\theta=0,\qquad \frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}=0 \tag{4.1}$$

Имеет место

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_\rho=\frac{\partial u}{\partial\rho}, && \varepsilon_{\rho\theta}=\frac{1}{2}\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{v}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]\\
&\varepsilon_\theta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{\rho}, && \varepsilon_{\theta\varphi}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{w}{\sin\theta}\right)+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right]\\
&\varepsilon_\varphi=\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{u}{\rho}+\frac{v}{\rho}\operatorname{ctg}\theta, && \varepsilon_{\rho\varphi}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{w}{\rho}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где u, v, w – компоненты скорости перемещения вдоль осей ρ, θ, φ.

Согласно (3.1), (4.2) уравнение несжимаемости имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi}+\frac{2u}{\rho}+\frac{v}{\rho}\operatorname{ctg}\theta=0 \tag{4.3}$$

В случае

$$\sigma_\rho=\sigma_\theta,\qquad \sigma_\rho-\sigma_\varphi=2k \tag{4.4}$$

из (4.1), (4.4) следует

$$\sigma_\rho=\sigma_\theta=-2k\ln(\rho\sin\theta)+C,\quad \sigma_\varphi=-2k(1+\ln(\rho\sin\theta))+C,\quad C-\text{const} \tag{4.5}$$

При условиях (4.4), согласно (3.5), (4.2), имеет место

$$\varepsilon_{\rho\varphi}=\varepsilon_{\theta\varphi}=0,\quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{w}{\rho\sin\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u}{\rho^2\sin^2\theta}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{w}{\rho\sin\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{v}{\rho\sin^2\theta}\right)=0 \tag{4.6}$$

Уравнениям (4.6) удовлетворим, полагая

$$u=\rho^2\sin^2\theta\frac{\partial\psi}{\partial\rho},\quad v=\rho\sin^2\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad w=-\rho\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \tag{4.7}$$

Из (4.3), (4.7) получим уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{4}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}(1+2\operatorname{ctg}\theta)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0 \tag{4.8}$$

В случае

$$\sigma_\rho=\sigma_\varphi,\qquad \sigma_\rho-\sigma_\theta=2k \tag{4.9}$$

из (4.1), (4.9) следует

$$\sigma_\rho=\sigma_\varphi=-2k\ln(\rho/\sin\theta)+C,\quad \sigma_\theta=-2k(1+\ln(\rho/\sin\theta))+C,\quad C-\text{const} \tag{4.10}$$

При условиях (4.9), согласно (3.6), (4.2), имеет место

$$\varepsilon_{\rho\theta}=\varepsilon_{\theta\varphi}=0,\quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{v}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u}{\rho^2}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{v}{\rho}\right)+\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{w}{\rho\sin\theta}\right)=0 \tag{4.11}$$

Первому из уравнений (4.10) удовлетворим, полагая

$$u=\rho^2\partial\psi/\partial\rho,\quad v=-\rho\partial\psi/\partial\theta \tag{4.12}$$

Из (4.11) и второго уравнения (4.10) найдем

$$\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{w}{\rho\sin\theta}\right)=\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\varphi} \tag{4.13}$$

Согласно (4.3), (4.12) получим уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}\left(\frac{\psi}{\rho\sin\theta}\right)=-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\theta}+2\frac{u}{\rho}+\frac{v}{\rho}\operatorname{ctg}\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}\left(\frac{\psi}{\rho\sin\theta}\right)=\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^3\psi}{\partial\theta\partial\varphi^2} \tag{4.14}$$

Из (4.13), (4.11) получим уравнение для определения функции $\Phi=\partial\psi/\partial\theta$:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{4}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\Phi=0 \tag{4.15}$$

В случае

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi, \qquad \sigma_\theta - \sigma_\rho = 2k \tag{4.16}$$

из (4.1), (4.15) следует

$$\sigma_\rho = 4k \ln \rho + C, \qquad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = 2k(1 + 2 \ln \rho) + C, \qquad C - \text{const} \tag{4.17}$$

При условиях (4.15), согласно (3.7), (4.2), имеет место

$$\varepsilon_{\rho\theta} = \varepsilon_{\rho\varphi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u}{\rho^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{v}{\rho}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u}{\rho^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{w\sin\theta}{\rho}\right) = 0 \tag{4.18}$$

Уравнениям (4.18) удовлетворим, полагая

$$u = -\rho^2\frac{\partial\psi}{\partial\rho}, \quad v = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad w = \frac{\rho}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \tag{4.19}$$

Из (4.18), (4.3) получим уравнение

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - \frac{\varphi}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta = 0 \tag{4.20}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сен-Венан Б.* Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределом упругости // Теория пластичности. Сб. перев. М.: ИЛ, 1948. С. 11–19.
2. *Ишлинский А.Ю.* Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости // Уч. зап. МГУ. Механика. 1946. Вып. 117. С. 90–108; Прикладные задачи механики. Т. 1. М.: Наука, 1986. С. 62–83.
3. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. М., Ин. литература, 1963. 244 с.
3. *Максимова Л.А.* О линеаризированных уравнениях пространственных течений идеальнопластических тел // Докл. РАН. 1998. Т. 385. № 6. С. 772–773.
4. *Хаар А., Карман Т.* К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности. Сб. перев. М.: ИЛ, 1948. С. 41–56.
5. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. М.: Иностр. лит-ра, 1963. 244 с.

Чебоксары, Москва

Поступила в редакцию
7.07.2000