МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2000

УДК 539.214; 539.374

© 2000 г. С.Н. ИВАНЧЕНКО, Ю.И. КАДАШЕВИЧ, С.П. ПОМЫТКИН

КВАЗИСТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ УПЛОТНЕНИЕ МАТЕРИАЛА

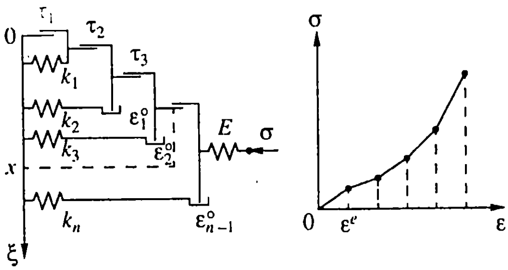
Традиционным объектом изучения механики деформируемого твердого тела являются материалы, плотность которых в процессе деформирования изменяется незначительно, либо вообще не меняется. В данной работе будут рассматриваться материалы, обладающие существенной необратимой сжимаемостью.

1. Введение. Диаграмма "напряжение – деформация" для сжимаемых материалов характеризуется замедленным ростом напряжений и, как следствие, направлена выпуклостью вверх при сжатии. Классический путь построения теории пластичности уплотняемых материалов связан с именем Д. Дракера, В.В, Новожилова, В.Н. Николаевского, В. Прагера [1–4]. В нем формулируются две группы соотношений, связывающие девиаторы неупругих деформаций и напряжений и первые инварианты тензоров деформаций и напряжений.

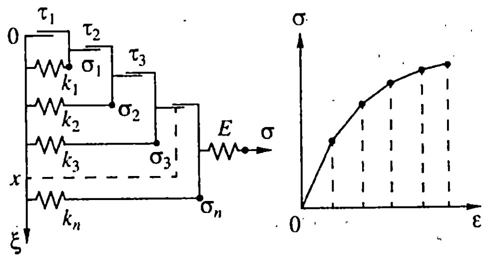
Наиболее удачной попыткой уточнения теории пластичности для неуплотняемых материалов является, на наш взгляд, использование структурных моделей среды [5, 6], в которых поведение твердого тела моделируется поведением упругих и неупругих элементов, которые расположены группами. Локальные законы необратимого деформирования задаются в наиболее простом виде, и важную роль играет условие их взаимодействия. В работе [5] построена достаточно общая теория пластичности статистического типа, которая в качестве основного параметра использует понятие предела текучести. Геометрическая иллюстрация многоэлементных моделей подробно рассмотрена в [7]. Однако указанная теория не может быть непосредственно применена к уплотняемым материалам, в силу специфических свойств их поведения. Поэтому авторы данной публикации предлагают принципиально новую структурную модель лестничного типа, представленную на фиг. 1.

Введение в теорию нового элемента (элемента уплотнения) позволяет описывать значительно более сложную кривую одноосного деформирования. По-видимому, В. Прагер [4] первый привлек внимание к возможности нового элемента среды, который он назвал элементом затвердевания. Однако эта идея не нашла должного понимания, и лишь в работе [8] указывается на целесообразность его использования.

2. Структурная модель уплотняемого материала. Рассмотрим модель, которая состоит из элементов сухого трения τ_i, упругих элементов E_i, K_i и элементов уплотнения ε_i°. Элементы, как видно на фиг. 1, соединены параллельно и вступают в движение не одновременно, а последовательно, шаг за шагом. Такого типа модели обычно называют лестничными моделями. Особенность конструирования данной модели состоит в том, что величина пластической деформации элемента подбирается таким образом, чтобы она в точности равнялась деформации, соответствующей элементу уплотнения ε_i°. Иными словами, в определенный момент элемент уплотнения замыкается, и соответствующая ячейка со своими параметрами τ_i и K_i может деформи-



Фиг. 1



Фиг. 2

роваться в любом направлении. Если же элемент уплотнения не замкнут, то модель работает только на траекториях нагружения, производящих уплотнение материала. Отметим, что можно было бы рассмотреть и случаи частичного замыкания и частичного размыкания элементов при обратном нагружении, однако в данной работе эти явления не рассматриваются. Таким образом, при прямом нагружении, если вовлечено n элементов (фиг. 1), легко получить, что

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon^p = \frac{\tau_2 - \tau_1}{K_1} + \frac{\tau_3 - \tau_2}{K_2} + \ldots + \frac{\sigma - \tau_n}{K_n}$$

где ε^e – упругая деформация, ε^p – пластическая деформация, σ – напряжение. Предположим теперь, что параметры материала τ, K, ε° являются случайными величинами и связаны между собой фундаментальной зависимостью. Будем считать, что главным случайным параметром является предел уплотнения ε°, и его интегральная функция распределения известна, тогда можно записать, что $\xi = \Phi(\varepsilon^\circ)$ и считать, что K и τ являются функциями ξ. После этого легко получить следующие одномерные зависимости при монотонном нагружении

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad \varepsilon^e = \sigma/E$$

$$\varepsilon^p = \int_0^x \frac{\partial\tau}{\partial\xi}\frac{1}{K(\xi)}d\xi, \quad \sigma = \tau(x)$$

Здесь x определяет количество элементов, вступивших в течение.

Сразу отметим, что при разгрузке и последующем повторном нагружении модель с элементами уплотнения переходит в модель, переворачивающую диаграмму деформирования и реализующую принцип "толкания" элементов, указанный фактически А.А. Ржаницыным [9] для лестничных моделей. Некоторые сведения о лестничных моделях приведены в работе [10].

При обратном нагружении поведение предложенной лестничной модели изменяется. Произошло замыкание ряда элементов. Рассмотрим поведение модели (фиг. 2) в этом случае. Пусть вовлечено в течение i элементов, тогда имеет место следующие равенства.

$$\sigma = \tau_i + \varepsilon^p \sum_{j=i}^{n} K_j, \quad \tau_{i+1} - \tau_i = \varepsilon^p K_i$$

Если же перейти к непрерывной модели, то легко получить следующую группу определяющих соотношений

$$\sigma = \tau(x) + \varepsilon^p \int_x^{x_0} K(\xi)d\xi, \quad \frac{\partial\tau}{\partial\xi} = \varepsilon^p K(\xi)\,|_{\xi=x}$$

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad \varepsilon^e = \sigma / E, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1$$

где x_0 – значение параметра x, отвечающее концу первого этапа нагружения.

Таким образом, предложенная структурная модель лестничного типа позволяет описать диаграмму деформирования уплотняемого материала, обращенной выпуклостью вверх по отношению к оси деформирования. Подчеркнем, что элемент уплотнения, введенный в теорию, позволяет регулировать законы деформирования при прямом и обратном нагружении. Интересно, что ступенчатое включение элементарных ячеек в движение позволяет легко переходить к непрерывным моделям и экспериментально выявлять статистические параметры модели.

3. Одноповерхностные теории течения, учитывающие уплотнение. Выделим класс теорий пластического течения, учитывающих уплотнение материала, которые фактически были приняты во внимание при построении новой модели. Поверхность текучести в этих теориях уточняла критерий текучести Мизеса следующим образом

$$\sigma_i + \beta\sigma_0 = \sqrt{2}\sigma_T \qquad [1] \tag{3.1}$$

$$T_i + \beta\sigma_0 + \sqrt{2}\sigma_T \qquad [2]$$

$$T_i + \beta T_0 = \sqrt{2}\sigma_T \qquad [11]$$

$$\sigma_i^2 + \beta\sigma_0^2 = 2\sigma_T^2 \qquad [12]$$

$$T_i + \beta(\rho_i)\sigma_0 = \sqrt{2}\sigma_T \qquad [13]$$

Здесь σ'_{ij} – девиатор тензора действующих напряжений σ_{ij}, $\sigma_T = \text{const}$ – предел текучести (при $\beta = 0$), β – константа материала, $\sigma_i = \sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}$ – интенсивность действующих напряжений, ρ'_{ij} – девиатор тензора микронапряжений ρ_{ij}, $\tau'_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho'_{ij}$ – девиатор тензора активных напряжений τ_{ij}, $\tau_i = \sqrt{\tau'_{ij}\tau'_{ij}}$ – интенсивность активных напряжений,

$$\sigma_0 = \tfrac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad \rho_0 = \tfrac{1}{3}\rho_{ij}\delta_{ij}$$

$$\tau_0 = \tfrac{1}{3}\tau_{ij}\delta_{ij}, \quad \varepsilon_0^p = \tfrac{1}{3}\varepsilon_{ij}^p\delta_{ij}$$

причем

$$\rho'_{ij} = K_1\varepsilon_{ij}^{p'}, \quad \rho_0 = K_2\varepsilon_0^p$$

Авторы данной публикации приняли за основу дальнейшего исследования вариант теории пластичности в форме, предложенной в работе [11], когда локальный закон течения выражается формулами

$$d\varepsilon_{ij}^{p'} = \frac{\tau'_{ij}}{\tau_i}d\lambda, \quad d\varepsilon_0^p = \beta d\lambda \tag{3.2}$$

Этот вариант наиболее удачно описывает влияние микронапряжений при циклических нагружениях.

4. Формулировка статистической теории неупругости, учитывающей уплотнение. Рассматривается первоначально изотропный материал, подчиняющийся критерию (3.1). Законы локального пластического течения имеют вид (3.2). За главный случайный параметр теории принимаем локальный предел уплотнения ε^0. Если считать известной интегральную функцию распределения $\Phi(\varepsilon^\circ) = \xi$, тогда

$$\langle\varepsilon_{ij}^p\rangle = \int_0^1 \varepsilon_{ij}^p(\xi)d\xi, \quad \langle\sigma_{ij}\rangle = \int_0^1 \sigma_{ij}(\xi)d\xi$$

где $\langle\cdot\rangle$ – знак осреднения.

Кроме того, справедливы соотношения

$$\partial\tau'_{ij} / \partial\xi = K_1(\xi)\varepsilon_{ij}^{p'}, \quad \partial\tau_0 / \partial\xi = K_2(\xi)\varepsilon_0^p$$

Подчеркнем важность граничного условия, состоящего в том, что при $\xi = x$ пластические деформации равны 0 при монотонном нагружении или не изменяются при циклическом нагружении. Естественно, что в зависимости от материала вид функции распределения $\Phi(\varepsilon^{\circ})$ может оказаться различным. Одним из авторов данной публикации на специальной экспериментальной установке [14] проводились опыты на трехосное нагружение с уплотняющимися асфальто-бетонными смесями. Установлено[1], что функция распределения имеет вид

$$\Phi(x) = 1 - \left[\frac{1}{1 + x / M(x)}\right]^2$$

5. Идентификация параметров теории уплотнения. Параметры теории определяются из опытов на пропорциональное нагружение:

$$\sigma_2 = \sigma_3 > \sigma_1, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \alpha\sigma_1, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

Выбираются два значения параметра α и находятся зависимости $\sigma_1 = \varphi_1(\varepsilon_1^p)$, $\sigma_1 = \varphi_2(\varepsilon_1^p)$, отвечающие значениям $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, что позволит определить характер зависимостей β, σ_T, $M = 3K_1 + \beta^2 K_2$ от ξ. Это становится очевидным, если учесть, что при нагружении справедливы соотношения

$$\varepsilon_0^p = \frac{\sqrt{2}\sigma_T + [-\sqrt{2/3}(1-\alpha) + 1/3\beta(1+2\alpha)\sigma_1]}{3K_1 + \beta^2 K_2} 3\beta$$

$$\varepsilon_0^p = \frac{3\beta}{\beta - \sqrt{6}} \varepsilon_1^p$$

6. Сопоставление экспериментальных данных с теоретическими результатами. Была проведена серия экспериментов в условиях трехосного осесимметричного сжатия. Опыты проводились на сплошных круглых образцах (диаметр 50–100 мм) из песчаных асфальтобетонных смесей ($55 \leqslant E \leqslant 95$ МПа, $\nu \approx 0{,}24$) при $60°\text{C} \leqslant T \leqslant 140°\text{C}$ по схеме раздавливания – $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{const}$; $\sigma_2 > \sigma_1$. В частности изучались:

a) одноосное сжатие – $\sigma_2 = \sigma_3 > \sigma_1$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$;

b) пропорциональное нагружение – $\sigma_2 = \sigma_3 > \sigma_1$; $-\sigma_3 = \alpha\sigma_1$;

c) всестороннее равномерное сжатие – $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$;

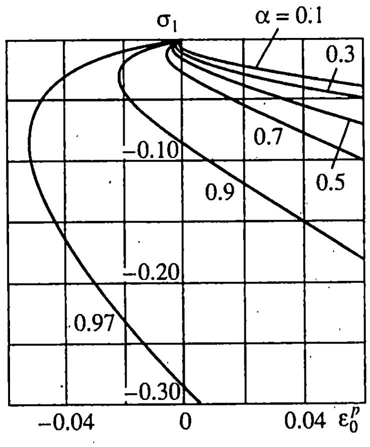
d) компрессионное сжатие (сжатие без бокового расширения) – $\sigma_2 = \sigma_3 > \sigma_1$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$;

e) опыты на сдвиг – $\sigma_1 = -\sigma_3$; $\sigma_2 = 0$;

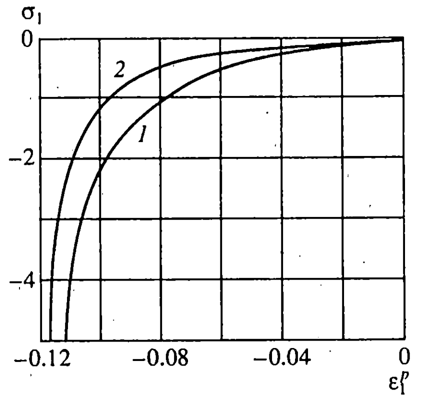
На фиг. 3–5 приведены графики объемного деформирования при простом пропорциональном нагружении, деформирования в условиях компрессионного сжатия и сдвиг (*1* – эксперимент, *2* – расчет, напряжения в МПа). Экспериментальные данные дают погрешность не более 20% и на фиг. 3 сознательно не приведены во избежание загромождения рисунка.

В исследованиях на сложное циклическое нагружение после предварительного деформирования материала силой в направлении σ_1 осуществлялась смена направления деформирования и нагружение осуществлялось в направлении σ_3. При этом боковая пластическая деформация, ε_3^p, приобретенная на первом этапе нагружения, жестко

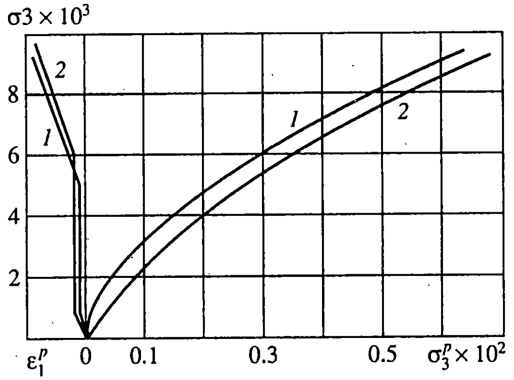
[1] *Иванченко С.Н.* Научные основы формирования рабочих органов дорожных машин для уплотнения асфальтобетонных смесей: Автореф. на соискание д.т.н. СПб, 1997. 34 с.



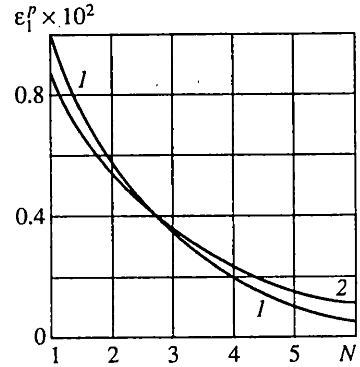
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

устремляется к нулю, реализуя, таким образом, боковое обжатие материалов. Затем действием деформации ε_3 производится разгрузка материала, а контроль осуществляется за полной и пластической осевыми деформациями ε_1 и ε_1^p. Далее процесс "сжатие – боковое обжатие" полностью повторяется. На фиг. 6 представлена экспериментальная (1) и теоретическая (2) кривые изменения осевой пластической деформации ε_1^p от числа циклов нагружения N (различие не превышает 20%).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-01169).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Drucker D.C., Prager W.* Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Quart. Appl. Math. 1952. V. 10. № 2. P. 157–165.
2. *Новожилов В.В.* О пластическом разрыхлении // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 681–689.
3. *Николаевский В.Н.* Механические свойства грунтов и теория пластичности // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемых тел. М.: ВИНИТИ, 1972. Т. 6. 86 с.
4. *Прагер В.* Об идеально затвердевающих материалах // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1958. № 3. С. 99–103.
5. *Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И.* Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с.

6. *Бесселинг И.* Теория пластического течения начально изотропного материала, который анизотропно упрочняется при пластических деформациях // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1961. № 2. С. 124–168.
7. *Иванченко С.Н., Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П.* Принципы геометрического представления многоэлементных структурных моделей // Исследования по механике строительных конструкций и материалов. СПб: СПбГАСУ, 1997. С. 56–62.
8. *Sobotka Z.* Reology of materials and ingineering structures. Prague. Academia. 1984. 548p.
9. *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 461 с.
10. *Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П.* О реологических моделях неупругости конструкционных материалов // Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства. СПб: СПбГТУРП, 1994. С. 3–5.
11. *Кадашевич Ю.И.* Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера и влияние среднего нормального напряжения на границу текучести // Тр. ЛТИ ЦБП. 1965. Вып. 18. С. 234–235.
12. *Green R.J.* A Plasticity theory for porous solids // Intern. J. Mech. Sci. 1972. V. 14. № 4. P. 215–224.
13. *Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В., Рыбакина О.Г.* Разрыхление и перспективы построения критерия прочности при сложном нагружении с учетом ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 108–114.
14. *Иванченко С.Н.* Релаксация напряжений в асфальтобетонных смесях при их уплотнении // Исследования и испытание строительных машин и оборудования. Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 1993. С. 101–110.

Хабаровск, С.-Петербург

Поступила в редакцию
27.07.1999