

**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2000**

УДК 531.53

© 2000 г. В.Ф. ЖУРАВЛЕВ

**ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ
ОБОБЩЕННОГО МАЯТНИКА ФУКО**

В [1] рассмотрена модель обобщенного маятника Фуко (ОМФ) с обратными связями по амплитуде и квадратуре в виде дифференциальных уравнений, записанных в декартовых и в тороидальных координатах. Получены также и калибровочные уравнения ОМФ, позволяющие по наблюдению его реакции на вращение основания вычислять дефекты. При этом речь шла о дефектах самой конструкции ОМФ. На практике, между тем, возникает необходимость нахождения в процессе калибровки не только дефектов гироскопа, но и дефектов датчиков перемещения и датчиков силы, служащих для регистрации состояния гироскопа и для управления этим состоянием. Полученные в [1] калибровочные уравнения могут служить и этой цели, если в исходной модели учесть дефекты указанных датчиков. Однако нелинейный характер подобных уравнений как по фазовым переменным, так и по дефектам сильно затрудняет процедуру идентификации и снижает ее точность.

Ниже для решения этой задачи предлагается использовать анализ реакции ОМФ на тестовое гармоническое возмущение. Выполнен также анализ точности предлагаемой калибровки.

1. Уравнения идентификации. Будем исходить из уравнений движения ОМФ, полученных в [1] в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\omega\dot{y} + x &= -\epsilon(E - E_0)\dot{x} + \mu Ky + \mathcal{F}\dot{y} + \mathcal{F}x + X \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} + y &= -\epsilon(E - E_0)\dot{y} - \mu Kx - \mathcal{F}\dot{x} + \mathcal{F}y + Y \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь x, y – координаты, определяющие основную форму колебаний ОМФ, ω – угловая скорость вращения основания, E и E_0 – текущее и стабилизируемое значение энергии колебаний ($2E = x^2 + y^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2$), K – квадратура (момент количества движения относительно центра колебаний $K = x\dot{y} - y\dot{x}$), \mathcal{F} и \mathcal{F} – скаляры, определяющие управление прецессией и частотой, ϵ и μ – коэффициенты усиления в обратных связях, X и Y – собственно механические дефекты ОМФ. Наиболее общий вид линейных по фазовым переменным сил, характеризующих дефекты, следующий [2]:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} &= (C + H + N) \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + (D + G + \Gamma) \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{vmatrix} \\ C = \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}, \quad H = h \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{vmatrix} \\ D = \begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}, \quad G = g \begin{vmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Матрицы C и H характеризуют погрешность жесткости и разножесткость ОМФ, матрица N представляет собой матрицу циркулярных сил. Матрицы D и G характеризуют демпфирование и анизотропию демпфирования, Γ – матрица гироскопических сил.

Введем для дальнейшего обозначения для фазовых переменных $\eta = \|x\ y\|^T$, $\dot{\eta} = \|x'\ y'\|^T$, а также обозначения для управлений: управление, зависящее от положения $L_1\eta = (\mu KJ + \mathcal{F}I)\eta$, управление, зависящее от скорости $L_2\dot{\eta} = [-\varepsilon(E - E_0)I + \mathcal{J}J]\dot{\eta}$. Здесь через I и J обозначены известные симплектические матрицы:

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Также введем для краткости обозначения: $P = C + H + N$ – матрица позиционных сил и $Q = D + G + \Gamma$ – матрица скоростных сил.

Уравнения (1.1) в этих обозначениях примут вид

$$\ddot{\eta} + \eta = P\eta + Q\dot{\eta} + L_1\eta + L_2\dot{\eta} \quad (\omega = 0) \quad (1.2)$$

Введем в рассмотрение матрицы датчиков перемещения и датчиков силы (матрицы трансдукторов). Пусть наблюдаемая ("электрическая") переменная η_e связана с механической переменной η так:

$$\eta_e = A\eta, \quad \dot{\eta}_e = A\dot{\eta} \quad (1.3)$$

Датчики силы преобразуют наблюдаемые переменные η_e и $\dot{\eta}_e$ в силы, прикладываемые к ОМФ и фигурирующие в правых частях уравнений (1.2) при помощи матрицы B : $BL_1\eta_e$ и $BL_2\dot{\eta}_e$. Поэтому уравнения (1.2) перепишутся в виде

$$\ddot{\eta} + \eta = P\eta + Q\dot{\eta} + BL_1\eta_e + BL_2\dot{\eta}_e$$

В дальнейшем удобно все члены выражать в наблюдаемых переменных, поэтому, учитывая (1.3) найдем

$$\ddot{\eta}_e + \eta_e = APA^{-1}\eta_e + AQA^{-1}\dot{\eta}_e + AB\dot{\eta}_e + AB\dot{\eta}_e \quad (1.4)$$

Для системы (1.4) ставится задача найти матрицы A , B , P , Q на основе наблюдений ее отклика на те или иные внешние воздействия. Сразу заметим, что без каких-либо дополнительных специальных условий такая задача решена быть не может. В уравнение (1.4) входит явно только три матрицы $\tilde{P} = APA^{-1}$, $\tilde{Q} = AQA^{-1}$ и AB и никакими динамическими испытаниями ничего кроме этих трех матриц найти нельзя. Начнем задачу с определения этих трех матриц. В дальнейшем будут определены те дополнительные условия, которые позволят задачу идентификации решить полностью, когда информация о найденных параметрах достаточна для управления ОМФ и для извлечения навигационной информации с необходимой точностью.

Для выполнения идентификации ОМФ управление по координатам отключено ($L_1 \equiv 0$), а управление по скоростям поддерживает искусственную изотропную дисциплину $L_2 = -\xi I$. К такой системе прикладывается гармоническое возбуждение

$$\ddot{\eta}_e + \eta_e = \tilde{P}\eta_e + \tilde{Q}\dot{\eta}_e - \xi AB\dot{\eta}_e + ABr \cos(1 + \Delta/2)t \quad (1.15)$$

где Δ – малая расстройка частот, а r – вектор, определяющий направление и амплитуду возбуждения.

В уравнении (1.5) выполним замену переменных $(\eta_e, \dot{\eta}_e) \rightarrow (u, v)$ по формулам

$$\eta_e = u \cos(1 + \Delta/2)t + v \sin(1 + \Delta/2)t, \quad \dot{\eta}_e = -u \sin(1 + \Delta/2)t + v \cos(1 + \Delta/2)t$$

Переменные u и v имеют смысл медленных координат и импульсов соответственно, если правые части в (1.5) рассматривать, как малые возмущения.

Преобразованная к новым переменным система осредняется по явно входящему времени, в результате приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} 2\ddot{u} &= \tilde{Q}u - \tilde{P}v - \xi ABu - \Delta v \\ 2\ddot{v} &= \tilde{P}u + \tilde{Q}v - \xi ABv + \Delta u + ABr \end{aligned} \quad (1.6)$$

Если в исходной системе (1.5) правые части имеют обобщенный потенциал, то система (1.6) – гамильтонова, а переменные u, v – канонические.

Проблему идентификации будем решать, наблюдая периодический отклик на периодическое воздействие. В системе (1.6) периодическому решению системы (1.5) соответствует положение равновесия

$$\begin{aligned} \tilde{Q}u - \tilde{P}v - \xi ABu - \Delta v &= 0 \\ \tilde{P}u + \tilde{Q}v - \xi ABv + \Delta u + ABr &= 0 \end{aligned}$$

Будем рассматривать два различных направления возбуждения, определяемых векторами r^1 и r^2 и обозначим $R = \|r^1 \ r^2\|$ матрицу, столбцы которой составлены из этих векторов. Направлению возбуждения r^i соответствуют и векторы u^i, v^i , которые определяют матрицы решений

$U = \|u^1 \ u^2\|, \ V = \|v^1 \ v^2\|$, удовлетворяющие следующей матричной системе:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}U - \tilde{P}V - \xi ABU - \Delta V &= 0 \\ \tilde{P}U + \tilde{Q}V - \xi ABV + \Delta U &= -ABR \end{aligned} \quad (1.7)$$

Линейной системы матричных уравнений (1.7) недостаточно для определения трех матриц \tilde{Q}, \tilde{P} и AB . Поэтому описанный эксперимент следует повторить дважды один раз с частотой возбуждения $\Delta_1 = -\Delta$, а второй раз с частотой возбуждения $\Delta_2 = \Delta$. (Частоты можно было выбирать произвольно, указанный выбор сделан для определенности.)

Введем обозначения для соответствующих матриц решений $U_i = U(\Delta_i)$, $V_i = V(\Delta_i)$ ($i = 1, 2$). Полученные таким образом два комплекта системы (1.7) имеют явное решение относительно искомых матриц:

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \Delta(W_1 + W_2)(W_1 - W_2)^{-1} \\ \tilde{Q} &= \Delta[(W_1 + W_2)(W_1 - W_2)^{-1} - I](V_1 U_1^{-1} - \xi W_1 R^{-1}) \\ AB &= -\Delta[(W_1 + W_2)(W_1 - W_2)^{-1} - I]W_1 R^{-1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $W = U + VU^{-1}V; R^{-1}$ существует так как $\det R \neq 0$.

Повторение всех указанных экспериментов на поворотном столе, врачающемся с угловой скоростью ω , приводит к изменению матрицы Q : $Q(\omega) = Q + 2\xi\omega J$, где ξ – масштабный коэффициент (коэффициент Брайана). Вычитая из $\tilde{Q}(\omega)$ найденное на неподвижном основании \tilde{Q} в дополнение к (1.8) находим матрицу

$$J = AJA^{-1} \quad (1.9)$$

Полученные результаты (1.8) и (1.9) исчерпывают все потребности идентификации, поскольку являются достаточными как для полной компенсации дефектов, так и для точного решения задачи ориентации (определение угла ориентации θ).

2. Компенсация дефектов. Располагая матрицами \tilde{P}, \tilde{Q} и AB можно сформировать сигнал $-(AB)^{-1}(\tilde{P}\eta_e + \tilde{Q}\dot{\eta}_e)$ и подать его на датчики силы. Уравнения маятника примут

вид

$$\ddot{\eta} + \eta = P\eta + Q\dot{\eta} - B(AB)^{-1}(\tilde{P}\eta_e + \tilde{Q}\dot{\eta}_e)$$

которому в наблюдаемых переменных соответствуют уравнения

$$\ddot{\eta}_e + \eta_e = \tilde{P}\eta_e + \tilde{Q}\dot{\eta}_e - AB(AB)^{-1}(\tilde{P}\eta_e + \tilde{Q}\dot{\eta}_e) = 0$$

Все дефекты оказались полностью скомпенсированными.

3. Определение ориентации. Определение ориентации может быть осуществлено в двух различных режимах: в режиме датчика угловой скорости и в режиме датчика угла. В режиме датчика угловой скорости используется управление прецессией таким образом, чтобы удержать угол θ , определяющий ориентацию наблюдаемой формы колебаний относительно подвижной базы; равным нулю. Для этого управление прецессией формируется в виде $L_2\dot{\eta}_e = (AB)^{-1}\mathcal{J}\tilde{J}\eta_e$ и прикладывается к маятнику на вращающемся объекте: $\ddot{\eta} + \eta = -2\omega\tilde{J}\dot{\eta} + B(AB)^{-1}\mathcal{J}\tilde{J}\eta_e$, что в наблюдаемых переменных дает $\ddot{\eta}_e + \eta_e = -2\omega\tilde{J}\dot{\eta}_e + AB(AB)^{-1}\mathcal{J}\tilde{J}\eta_e$. Откуда следует выражение для команды управления прецессией $\mathcal{J} = 2\omega$, которая, таким образом равна удвоенной угловой скорости, умноженной на коэффициент Брайана.

В режиме датчика угла требуется использовать какую-либо зависимость угла θ от переменных, определяющих форму колебаний. Примером такой зависимости может быть выражение [1]:

$$\operatorname{tg} 2\theta = 2 \frac{\eta_1\eta_2 + \dot{\eta}_1\dot{\eta}_2}{\eta_1^2 + \dot{\eta}_1^2 - \eta_2^2 - \dot{\eta}_2^2} \equiv 2 \frac{xy + \dot{x}\dot{y}}{x^2 + \dot{x}^2 - y^2 - \dot{y}^2}$$

Формально, для подстановки в подобные выражения переменных η требуется знание матрицы A : $\eta = A^{-1}\eta_e$. Матрицу A можно попытаться найти из выражения (1.9), ибо его левая часть в описанном выше процессе идентификации уже определена. Общее решение этого уравнения относительно матрицы A имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} 1 & j_{22} \\ 0 & -j_{21} \end{vmatrix} (C_1 I + C_2 J) \quad (3.1)$$

где j_{kl} – компоненты матрицы \tilde{J} , а C_1 и C_2 – произвольные. (Следует иметь в виду, что $\operatorname{tr} \tilde{J} = 0$ и $\det \tilde{J} = 1$).

Таким образом, вычислить матрицу A из уравнения (1.9) можно только с точностью до матричного множителя, характеризующего произвольное однородное растяжение (коэффициент C_1) и произвольный угол поворота (коэффициент C_2). Таким образом, ни амплитуду колебаний, ни начальный угол ориентации формы колебаний, не прибегая к дополнительным независимым датчикам, установить нельзя.

Но это не мешает вычислить текущее положение формы по отношению к начальному. Практически для этого достаточно выбрать любое частное решение уравнения (1.9), например в (3.1) можно взять $C_1 = C_2 = 0$.

4. Погрешности идентификации. Поставим следующую задачу. Пусть в системе (1.7) из которой ищутся матрицы \tilde{P} , \tilde{Q} , AB в виде (1.8), матрица амплитуд гармонического возбуждения известна с погрешностью, так что вместо, например, $R = rI$ имеем $R = rI + \delta R$. Кроме того, будем предполагать, что и частота возбуждения известна неточно (достаточно рассмотреть одну из частот: $\Delta_1 = -\Delta$, а $\Delta_2 = \Delta + \delta\Delta$). Сверх всего этого предполагается, что и матрицы амплитуд периодических колебаний U и V наблюдаются с погрешностями $U + \delta U$ и $V + \delta V$. Требуется установить ошибки в вычислении \tilde{P} , \tilde{Q} и AB по формулам (1.8) в этих условиях.

Начнем с ошибок возбуждения δR и $\delta \Delta$. Эти ошибки не приводили бы к погрешностям \tilde{P} , \tilde{Q} и AB , если бы матрицы решения системы с такими погрешностями были подставлены в формулы

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= [(W_1 + W_2)\Delta + W_2\delta\Delta](W_1 - W_2)^{-1}, \\ \tilde{Q} &= (\tilde{P} - I\Delta)(V_1U_1^{-1} - \xi W_1R^{-1}), \quad AB = -(\tilde{P} - I\Delta)W_1R^{-1}\end{aligned}\quad (4.1)$$

которые следуют из (1.7) вместо (1.8) для реально осуществляемого возбуждения. Поскольку вместо (4.1) на самом деле используются формулы (1.8), то погрешности искомых матриц имеют вид:

$$\begin{aligned}\delta \tilde{P} &= W_2(W_1 - W_2)^{-1}\delta\Delta \\ \delta \tilde{Q} &= W_2(W_1 - W_2)^{-1}\left(V_1U_1^{-1} - \xi W_1\frac{1}{r}\right)\delta\Delta + \frac{\xi\Delta}{r^2}[(W_1 + W_2)(W_1 - W_2)^{-1} - I]W_1\delta R \\ \delta AB &= -\frac{1}{r}W_2(W_1 - W_2)^{-1}W_1\delta\Delta - \frac{\Delta}{r^2}[(W_1 + W_2)(W_1 - W_2)^{-1} - I]W_1\delta R\end{aligned}\quad (4.2)$$

Поскольку все вариации вычисляются в окрестности невозмущенного состояния в (4.2) следует подставить следующие выражения:

$$\begin{aligned}U_1 &= -U_2 = \frac{abr\Delta}{\Delta^2 + \xi^2 a^2 b^2} I, \quad V_1 = V_2 = \frac{\xi a^2 b^2 r}{\Delta^2 + \xi^2 a^2 b^2} I \\ W_1 &= -W_2 = \frac{rab}{\Delta} I, \quad (W_1 - W_2)^{-1} = \frac{\Delta}{2rab} I \\ V_1 U_1^{-1} &= -V_2 U_2^{-1} = \frac{\xi ab}{\Delta} I, \quad R^{-1} = \frac{1}{r} I - \frac{1}{r^2} \delta R + \dots\end{aligned}$$

Эти выражения получаются из системы (1.7), в которой положено $\tilde{P} = \tilde{Q} = 0$, $A = aI$, $B = bI$, $R = rI$.

В результате (4.2) принимает вид:

$$\begin{aligned}\delta \tilde{P} &= -\frac{1}{2} I\delta\Delta, \quad \delta \tilde{Q} = -\frac{\xi ab}{r} \delta R \\ \delta AB &= \frac{ab}{2\Delta} I\delta\Delta - \frac{ab}{r} \delta R\end{aligned}\quad (4.3)$$

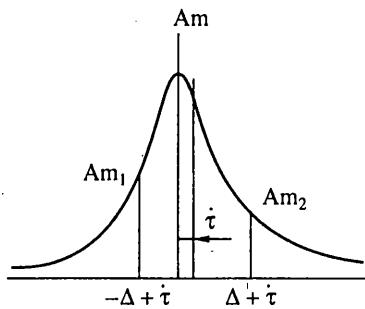
Учтем теперь погрешности в наблюдении матриц решений δU и δV . Для этого достаточно продифференцировать (1.8) по этим переменным, учитывая следующие равенства:

$$\delta W_i = \delta U_i + \delta V_i U_i^{-1} V_i + V_i \delta U_i^{-1} V_i + V_i U_i^{-1} \delta V_i = \left(1 - \frac{\xi^2 a^2 b^2}{\Delta^2}\right) \delta U_i - (-1)^i \frac{2\xi ab}{\Delta} \delta V_i$$

(использовано тождество $\delta U^{-1} = -U^{-1} \delta U U^{-1}$).

Получающиеся таким образом дефекты в вычислении матриц \tilde{P} , \tilde{Q} и AB , следует сложить с (4.3), что и дает полный результат:

$$\begin{aligned}\delta \tilde{P} &= -\frac{1}{2} I\delta\Delta + \frac{1}{2rab}(\Delta^2 - \xi^2 a^2 b^2)(\delta U_1 + \delta U_2) + \frac{\xi\Delta}{r}(\delta V_1 - \delta V_2) \\ \delta \tilde{Q} &= -\frac{\xi ab}{r} \delta R + \frac{2\xi\Delta}{r} \delta U_1 - \frac{(\Delta^2 - \xi^2 a^2 b^2)}{abr} \delta V_1 \\ \delta AB &= ab\left(I \frac{\delta\Delta}{2\Delta} - \frac{1}{r} \delta R\right) + \frac{1}{2r\Delta}(\Delta^2 - \xi^2 a^2 b^2)(\delta U_1 - \delta U_2) + \frac{\xi ab}{r}(\delta V_1 + \delta V_2)\end{aligned}\quad (4.4)$$



Фиг.

5. Стабилизация частоты возбуждения. Формулы (4.4) показывают, что можно снизить погрешности идентификации, если коэффициент искусственной диссипации выбрать из условия $\Delta^2 - \xi^2 a^2 b^2 = 0$. Качество идентификации можно повысить, если стабилизировать частоту возбуждения. Идею такой стабилизации, основанной на введении обратной связи по частоте возбуждения, можно пояснить на примере одномерного осциллятора:

$$\ddot{\eta} + \dot{\eta} = \cos(1 + \dot{\tau}/2 - \Delta/2)t + \cos(1 + \dot{\tau}/2 + \Delta/2)t, \quad \dot{\tau} = \text{const} \quad (5.1)$$

(Учитывая линейность системы, два эксперимента с разными Δ_1 и Δ_2 можно объединить в одном эксперименте с правой частью в (5.1) в виде суммы двух гармонических функций).

Если сдвиг средней частоты равен нулю $\dot{\tau} \equiv 0$, то гармонические слагаемые решения имеют равные амплитуды (фигура) $Am_1 = Am_2$. Следовательно, для стабилизации средней частоты в (5.1) достаточно ввести обратную связь

$$\ddot{\eta} + \eta = \cos[(1 - \Delta/2)t + \tau/2] + \cos[(1 + \Delta/2)t + \tau/2]$$

$$\tau = \rho(Am_2 - Am_1) \quad (\rho > 0)$$

В случае исходной системы в этой идеи следует только уточнить понятие амплитуды. Перепишем исходную систему в режиме идентификации параметров в виде

$$\ddot{\eta} + \eta = P\eta + Q\dot{\eta} + Br\{\cos[(1 - \Delta/2)t + \tau/2] + \cos[(1 + \Delta/2)t + \tau/2]\}$$

Для последующего анализа, в котором используется метод осреднения, удобно записать для каждой гармонической составляющей решения этого уравнения свое собственное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\eta}^i + \eta^i = P\eta^i + Q\dot{\eta}^i + (-1)^i \Delta \eta^i + Br \cos(t + \tau/2) \quad (i = 1, 2) \quad (5.2)$$

Предполагаем вводимую по частоте обратную связь слабой, так что переменную τ можно считать медленной. Введем в рассмотрение однородное время $\chi = t + \tau/2$.

Тогда

$$\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta}{d\chi} \left(1 + \frac{\dot{\tau}}{2}\right), \quad \ddot{\eta} = \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{d\chi^2} \left(1 + \frac{\dot{\tau}}{2}\right)^2 + \frac{d\eta}{d\chi} \frac{\ddot{\tau}}{2}$$

и в первом приближении метода осреднения при подстановке этих выражений в (5.2) можно опустить нелинейные слагаемые, что дает

$$\ddot{\eta}^i + \eta^i = P\eta^i + Q\dot{\eta}^i + [\dot{\tau} + (-1)^i \Delta]\eta^i + Br \cos \chi$$

Осуществляя переход от переменных $\eta, \dot{\eta}$ к переменным u, v : $\eta = u \cos \chi + v \sin \chi$,

$\dot{\eta} = -u \sin \chi + v \cos \chi$ и осуществляя осреднение по переменной χ , находим

$$2\dot{u}^i = Qu^i - Pv^i - [\tau + (-1)^i \Delta]v^i$$

$$2\dot{v}^i = Pu^i + Qv^i + [\dot{\tau} + (-1)^i \Delta]u^i + Br$$

$$\dot{\tau} = \rho(Am_2 - Am_1), \quad Am_i = \sqrt{(u^i)^T u^i} \quad (5.3)$$

Эксперимент с двумя несовпадающими направлениями возбуждения r^1 и r^2 приводит к матричным уравнениям для положения равновесия

$$\tilde{Q}U_i - \tilde{P}V_i - [\tau + (-1)^i \Delta]V_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

$$\tilde{P}U_i + \tilde{Q}V_i - [\tau + (-1)^i \Delta]U_i + ABR = 0, \quad \dot{\tau} = \text{const}$$

Откуда находим ($R = I$):

$$\tilde{P}_i = -\dot{\tau}I + \Delta(W_1 + W_2)(W_1 - W_2)^{-1}$$

$$\tilde{Q} = \Delta[I + (W_1 + W_2)(W_1 - W_2)^{-1}]V_2 U_2^{-1} \quad (5.4)$$

$$AB = -\Delta[I + (W_1 + W_2)(W_1 - W_2)^{-1}]W_2$$

Как следует из (5.4) в положении равновесия $\dot{\tau} = -\text{tr } \tilde{P} = -\text{tr } P = -2c$. Обычными методами доказывается, что это положение равновесия асимптотически устойчиво. Из (5.4) также следует, что уравнения для вариаций искомых матриц в случае стабилизации частоты остаются теми же – (4.4).

Выражаю признательность М. Карону, П. Леже, В. Вандебеку и М. Сорину за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко, как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.
2. Журавлев В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 6–19.

Москва

Поступила в редакцию
10.01.1999

Зав. редакцией В.М. Кутырева

Технический редактор Т.В. Скворцова

Сдано в набор 05.06.2000

Подписано к печати 27.09.2000

Формат бумаги 70 × 100 1/16

Офсетная печать

Усл.печ.л. 15,6 Усл.кр.-отт. 5,2 тыс. Уч.-изд.л. 18,6

Бум.л. 6,0

Тираж 328 экз. Зак. 3896

Свидетельство о регистрации № 0110261 от 08.02.93 г.
в Министерстве печати и информации Российской Федерации
Учредители: Российская академия наук, Отделение проблем машиностроения,
механики и процессов управления,
Общество с ограниченной ответственностью «Журналы по механике»

Адрес издателя: 117864, Москва, Профсоюзная ул., 90

Адрес редакции: 117526 Москва, проспект Вернадского, д. 101. Тел. 434-35-38
Отпечатано в ППП "Типография "Наука", 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6