

УДК 624.072.21

© 2000 г.     **Н.А. БАРЧЕНКОВА, Н.В. МИНАЕВА**

**О СУЩЕСТВОВАНИИ  
СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ,  
СООТВЕТСТВУЮЩЕГО РЕШЕНИЮ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ**

Рассматривается проблема существования деформированного состояния упругого консольного стержня, находящегося под влиянием двух сосредоточенных сил, каждая из которых направлена под углом к его недеформированной оси. В случае линейной модели граница существования деформированного состояния является также и границей адекватности рассматриваемой математической модели (корректности постановки задачи).

Пусть упругий консольный стержень находится под воздействием двух сосредоточенных сил, как показано на фиг. 1. Тогда деформированная ось стержня в линейной постановке будет описываться решением следующих уравнений, представленных в безразмерном виде:

$$y''(x) - f''(x) + \alpha_1 y(x) \cos \gamma_1 + \alpha_1 x \sin \gamma_1 = 0, \quad x \in [0, a] \quad (1)$$

$$y''(x) - f''(x) + (\alpha_1 \cos \gamma_1 + \alpha_2 \cos \gamma_2) y(x) + (\alpha_1 \sin \gamma_1 + \alpha_2 \sin \gamma_2) x - \alpha_2 y(a) \cos \gamma_2 - \alpha_2 a \sin \gamma_2 = 0, \quad x \in [a, 1] \quad (2)$$

с граничными условиями

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad (3)$$

$$\bar{y} = yl, \quad \bar{x} = xl, \quad \bar{a} = al, \quad \bar{f} = fl, \quad \alpha_1 = \frac{P_1 \bar{l}^2}{EJ}, \quad \alpha_2 = \frac{P_2 \bar{l}^2}{EJ}$$

При этом предполагается, что функция  $\bar{f}(\bar{x})$  задает форму оси в свободном состоянии, т.е. начальное несовершенство, которое на фиг. 1 не представлено.

Пусть при  $f(x) = f_0(x)$ ,  $\gamma_1 = \gamma_{10}$  и  $\gamma_2 = \gamma_{20}$  задача (1)–(3) допускает решение

$$y(x) = y_0(x) \quad (4)$$

Изучим возможность приближенного описания функцией (4) деформированного состояния стержня, если  $f(x)$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  достаточно мало отличаются от  $f_0(x)$ ,  $\gamma_{10}$ ,  $\gamma_{20}$ , т.е. физической осуществимости состояния, соответствующего функции (4). Таким образом, перейдем к анализу непрерывности зависимости решения задачи (1)–(3) от  $f(x)$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  при  $f(x) = f_0(x)$ ,  $\gamma_1 = \gamma_{10}$ ,  $\gamma_2 = \gamma_{20}$ . Для этого необходимо, как следует из [1–3], построить следующую задачу относительно функции  $\zeta(x)$ :

$$y_0'' + \zeta - f_0'' + \alpha_1 (y_0 + \zeta) \cos \gamma_1 + \alpha_1 x \sin \gamma_1 = 0, \quad x \in [0, a]$$

$$y_0'' + \zeta'' - f_0'' + (\alpha_1 \cos \gamma_1 + \alpha_2 \cos \gamma_2) (y_0 + \zeta) + (\alpha_1 \sin \gamma_1 + \alpha_2 \sin \gamma_2) x -$$

$$-\alpha_2[y(\alpha) + \zeta(a)] \cos \gamma_2 - \alpha_2 a \sin \gamma_2 = 0, \quad x \in [a, 1] \quad (5)$$

$$y(0) + \zeta(0) = y'(1) + \zeta'(1) = 0$$

Поскольку функция  $y_0(x)$  является решением уравнений (1)–(3), то соотношения (5) примут вид

$$\zeta'' + \alpha_1 \cos \gamma_1 \zeta = 0, \quad x \in [0, a]$$

$$\zeta'' + (\alpha_1 \cos \gamma_1 + \alpha_2 \cos \gamma_2) \zeta = \alpha_2 \cos \gamma_2 \zeta(a), \quad x \in [a, 1] \quad (6)$$

$$\zeta(0) = \zeta'(1) = 0$$

Запишем соответствующие характеристические уравнения

$$\lambda^2 + \beta_1 = 0, \quad \mu^2 + \beta_2 = 0 \quad (7)$$

$$\beta_1 = \alpha_1 \cos \gamma_1, \quad \beta_2 = \alpha_1 \cos \gamma_1 + \alpha_2 \cos \gamma_2 \quad (8)$$

В дальнейшем для определенности будем полагать, что

$$-\frac{\pi}{2} < \gamma_1, \gamma_2 < \frac{\pi}{2}, \quad \text{т.е.} \quad \cos \gamma_1 > 0, \quad \cos \gamma_2 > 0 \quad (9)$$

Проанализируем все возможные случаи решений, введя обозначения

$$\mu_1 = \sqrt{|\beta_1|}, \quad \mu_2 = \sqrt{|\beta_2|} \quad (10)$$

1. Обе нагрузки сжимающие, т.е.

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0 \quad (11)$$

тогда общие решения уравнений (6) имеют вид

$$\zeta = c_1 \cos(\mu_1 x) + c_2 \sin(\mu_1 x), \quad x \in [0, a] \quad (12)$$

$$\zeta = c_3 \cos(\mu_2 x) + c_4 \sin(\mu_2 x) + \frac{\beta_3}{\beta_2} \zeta(a), \quad x \in [a, 1]$$

$$\beta_3 = \alpha_2 \cos \gamma_2$$

2. Одна нагрузка сжимающая, другая растягивающая:

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 < 0 \quad (13)$$

Согласно соотношениям (8) возможны два варианта:

$$(2a) \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0 \quad (14)$$

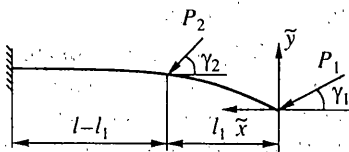
Общие решения уравнений (6) имеют вид (12):

$$(2b) \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 < 0 \quad (15)$$

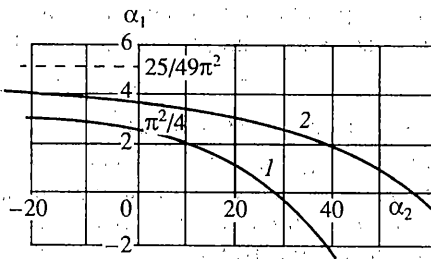
При этом общие решения принимают следующую форму

$$\zeta = c_1 \cos(\mu_1 x) + c_2 \sin(\mu_1 x), \quad x \in [0, a] \quad (16)$$

$$\zeta = c_3 \exp(\mu_2 x) + c_4 \exp(-\mu_2 x) + \frac{\beta_3}{\beta_2} \zeta(a), \quad x \in [a, 1]$$



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Одна нагрузка растягивающая, другая сжимающая:

$$\alpha_1 < 0; \alpha_2 > 0 \quad (17)$$

Согласно соотношениям (8) возможны два варианта:

$$(3a) \quad \beta_1 < 0, \beta_2 > 0 \quad (18)$$

Выпишем общие решения уравнений (6):

$$\zeta = c_1 \exp(\mu_1 x) + c_2 \exp(\mu_1 x), \quad x \in [0, a] \quad (19)$$

$$\zeta = c_3 \cos(\mu_2 x) + c_4 \sin(\mu_2 x) + \frac{\beta_3}{\beta_2} \zeta(a), \quad x \in [a, 1]$$

$$(3b) \quad \beta_1 < 0, \beta_2 < 0 \quad (20)$$

Общие решения уравнений (6) имеют вид

$$\zeta = c_1 \exp(\mu_1 x) + c_2 \exp(\mu_1 x), \quad x \in [0, a] \quad (21)$$

$$\zeta = c_3 \exp(\mu_2 x) + c_4 \exp(\mu_2 x) + \frac{\beta_3}{\beta_2} \zeta(a), \quad x \in [a, 1]$$

4. Обе нагрузки растягивающие, т.е.

$$\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0 \quad (22)$$

В этом случае  $\beta_1 < 0, \beta_2 < 0$ , поэтому общие решения соответствуют формулам (21).

Граничные условия совместно с требованиями гладкости и непрерывности функции  $y(x)$  при  $x = a$  приводят к однородной линейной системе алгебраических уравнений относительно постоянных  $c_1, c_2, c_3, c_4$  в каждом из рассматриваемых случаев 1–4.

Существование нетривиальных решений связано с выполнением следующих соотношений

1 и (2a)

$$\mu_1 \sin(\mu_1 a) \sin(\mu_2(1-a)) - \mu_2 \cos(\mu_1 a) \cos(\mu_2(1-a)) = 0 \quad (23)$$

(2b)

$$\mu_1^2 \mu_2 \sin(\mu_1 a) \operatorname{sh}(\mu_2(1-a)) + \mu_2^2 \mu_1 \cos(\mu_1 a) \operatorname{ch}(\mu_2(1-a)) = 0 \quad (24)$$

(3a)

$$\mu_1^2 \operatorname{sh}(\mu_1 a) \sin(\mu_2(1-a)) - \mu_1 \mu_2 \operatorname{ch}(\mu_1 a) \cos(\mu_2(1-a)) = 0 \quad (25)$$

(3b) и 4

$$\mu_2^2 \mu_1 \operatorname{ch}(\mu_1 a) \operatorname{sh}(\mu_2(1-a)) - \mu_1^2 \mu_2 \operatorname{sh}(\mu_1 a) \operatorname{ch}(\mu_2(1-a)) = 0 \quad (26)$$

На фиг. 2 представлены графики зависимости между параметрами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , полученные на основе уравнений (23)–(25), где цифрой 1 обозначен график, соответствующий  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ,  $a = 0,7$ , его асимптота  $\alpha_1 = 25\pi^2 / 49$ ; и цифрой 2 –  $\gamma_1 = \pi/4$ ;  $\gamma_2 = \pi/3$ ;  $a = 0,7$ , его асимптота  $\alpha_1 = 25\sqrt{2}\pi^2 / 49$  (уравнение (26) корней не имеет).

Следовательно, решение (4) задачи (1)–(3) при  $f(x) \equiv 0$  будет иметь физический смысл лишь в пределах границы, определяемой графиками на фиг. 2. Если же величины нагрузок  $P_1$  и  $P_2$  таковы, что соответствующая им точка на плоскости  $(\alpha_1, \alpha_2)$  лежит за пределами графиков (фиг. 2), то следует рассматривать задачу в нелинейной постановке.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1968. 526 с.
3. Минаев В.А., Минаева Н.В. О состояниях механической системы. М., 1998. 21 с. – Деп. в ВИНТИ 23.12.1998 г. № 3807–В98.

Воронеж

Поступила в редакцию  
14.09.1999